

DCA
Departamento de Engenharia de
Computação e Automação Industrial

FEEC
Faculdade de Engenharia
Elétrica e de Computação

IA013 – Introdução à Computação Natural
Unicamp

Ant Colony Optimization

Fabício Olivetti de França
olivetti@dca.fee.unicamp.br

CAMPINAS, SP – BRASIL março / 2007 1

Swarm Intelligence

- O que é Inteligência de Enxame (*Swarm Intelligence*)?
 - Algoritmos em que agentes atuam localmente realizando alguma interação com o grupo
- Características:
 - Individualismo x Coletivo
 - Cada agente interage localmente com o ambiente
 - Essa interação causa um padrão coerente de forma global resolvendo um problema
 - Não existe centralização
 - Coordenação sem comunicação evidente
 - Algoritmos populares: Ant Colony Optimization (ACO) e Particle Swarm Optimization (PSO)

2

Swarm Intelligence - Motivações -

- Na natureza, criaturas simples apresentam comportamentos complexos
- Os comportamentos destes são alterados com coerência conforme o ambiente muda
- Esse comportamento é observado em:
 - insetos
 - pássaros
 - bactérias
 - e outros seres que vivem em bandos

3

Swarm Intelligence - Na Natureza -

- Busca pelo menor caminho entre o ninho e a fonte de alimento
- Organização dos corpos de indivíduos mortos e lixos dentro do ninho
- Emigração de um bando
- Construção do ninho
- Vão em grupo

4

Swarm Intelligence - No Dia a Dia -

- Trânsito (a ação dos indivíduos influi na organização do todo)

<http://vwisb7.vkw.tu-dresden.de/~treiber/MicroApplet/>
- Atribuição de pequenas tarefas para uma equipe em um grande projeto
- Linha de montagem
- Cirurgia Médica

5

Ant Colony Optimization

Goss, S., S. Aron e J. L. Deneubourg. Self-organized shortcuts in the Argentine ant. *Naturwissenschaften*, v.76, p.579-581, 1989.

6



Ant Colony Optimization



- Foi observado o comportamento das formigas na busca pelos alimentos.
- Inicialmente, cada formiga segue um caminho aleatório

- Após algum tempo elas tendiam a seguir um único caminho, considerado ótimo
- Cada formiga utiliza uma comunicação indireta para indicar para as outras o quão bom foi o caminho que ela escolheu
- Para isso, elas espalham uma substância chamada “feromônio”

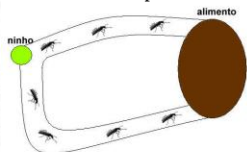
7



Ant Colony Optimization

Em um aquário devidamente adaptado para simular o ambiente natural das formigas, foram feitas as seguintes imposições:

- um ninho de formigas foi colocado em uma ponta
- uma fonte de alimentos na outra ponta



Para chegar até esse alimento foram criados dois caminhos, sendo um maior que o outro.

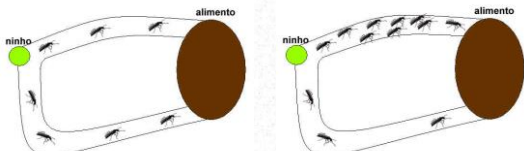
8



Ant Colony Optimization

As formigas que escolhem o menor caminho fazem o percurso mais rapidamente que as outras

Elas acabavam depositando uma maior quantidade de feromônio nesse caminho em relação as outras, dado um intervalo de tempo.



Logo, dado tempo suficiente, a intensidade de feromônio no caminho mais curto estará bem mais alta e atrairá a maior parte das formigas (mas não todas).

9



Ant Colony Optimization

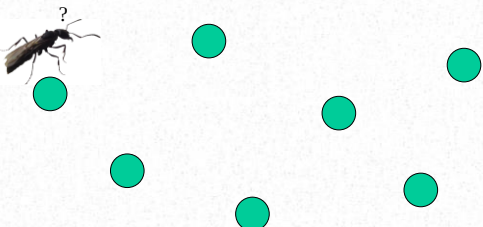
Em 1992, Dorigo percebeu que esse problema resolvido pelas formigas era muito similar ao TSP e, inspirado nesse comportamento, resolveu modelá-lo no computador e verificar como se comportava em algumas instâncias conhecidas do problema.

10



Ant Colony Optimization

Dado um grafo com n vértices, colocar uma formiga artificial em cada um destes.

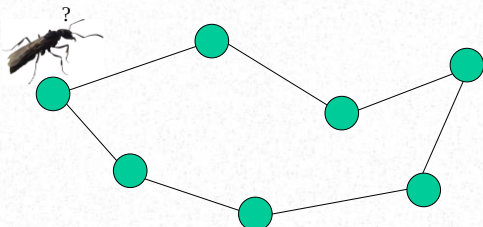


11



Ant Colony Optimization

Cada formiga traça um caminho seguindo uma fórmula probabilística em função do feromônio “depositado” em cada aresta do grafo.

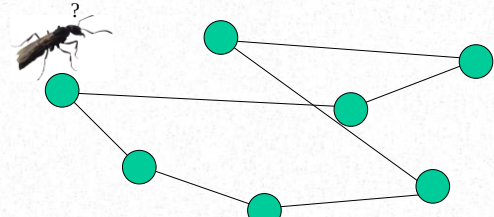


12



Ant Colony Optimization

Cada formiga traça um caminho seguindo uma fórmula probabilística em função do feromônio “depositado” em cada aresta do grafo.

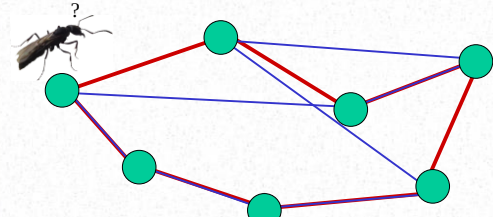


13



Ant Colony Optimization

Após a construção de todos os caminhos, a intensidade de feromônio em cada aresta é acrescida de acordo com a qualidade da solução gerada.

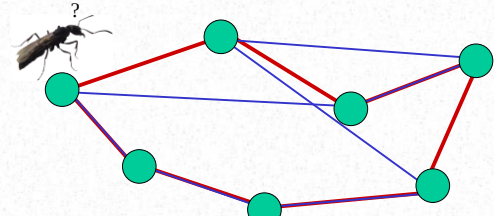


14



Ant Colony Optimization

As novas soluções são então construídas seguindo uma função de densidade de probabilidade proporcional ao nível de feromônio em cada aresta.



15



Ant Colony Optimization

```

While it < max_it do,
  for each ant do,
    build_solution();
  endfor
  update_pheromone();
endwhile

```

Dorigo, M. *Optimization, Learning and Natural Algorithms*. Politecnico di Milano, Italy, 1992.

16



Ant Colony Optimization

- build_solution() -

Para construir a solução, cada formiga utiliza iterativamente uma função probabilística para decidir se incluirá ou não determinada aresta na solução.

$$p_{i,j}^k(t) = \begin{cases} \frac{\tau_{i,j}^\alpha(t) \cdot \eta_{i,j}^\beta}{\sum_{j \in J^k} \tau_{i,j}^\alpha(t) \cdot \eta_{i,j}^\beta} & \text{se } j \in J^k \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

Onde:
 $p_{i,j}^k(t)$ é a probabilidade da formiga k optar pela aresta (i,j) na iteração t ;
 J^k é a lista de vértices ainda não visitados;
 $\tau_{i,j}$ é a quantidade de feromônio na aresta (i,j) ;
 $\eta_{i,j}$ é a informação de qualidade dessa aresta (geralmente determinada pelo inverso da distância)
 α e β são parâmetros que definem o grau de importância de τ e η , respectivamente.

17



Ant Colony Optimization

- update_pheromone() -

Para atualizar a trilha de feromônio nas arestas, é calculada inicialmente a quantidade a ser depositada em cada uma delas, proporcional à qualidade das soluções a que elas pertencem.

$$\tau_{i,j}(t+1) = (1-\rho) \cdot \tau_{i,j}(t) + \rho \cdot \Delta\tau_{i,j}$$

$$\Delta\tau_{i,j} = \begin{cases} \frac{1}{f(S)} & \text{se } (i,j) \in S \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

Onde:
 ρ é a taxa de evaporação do feromônio;
 $\Delta\tau_{i,j}$ é a quantidade de feromônio que será depositada na aresta (i,j) ;
 $f(S)$ é o custo total da solução “S”

18



Variações do ACO

- Existem diversas variações do algoritmo original na literatura propostos basicamente por dois motivos:
 - **melhorar desempenho**
 - adaptar para outros problemas

19



Elitist-AS

- Utiliza a melhor solução encontrada até o momento para atualizar o feromônio
- Favorece a exploração ao invés da exploração
- Novas soluções tendem a ter poucas variações da melhor solução, dependendo da qualidade dessa

20



Rank-based AS

- As soluções construídas pelas formigas são “rankeadas”
- Esse “rank” é utilizado para atribuir um peso de atualização de feromônio para cada solução
- Dessa forma as melhores soluções acrescentam mais feromônio do que as outras mas sem criar uma pressão seletiva muito grande
- Plenamente equivalente ao caso de seleção por roleta e por ranking em algoritmos genéticos

21



MAX-MIN Ant System

- O nível de feromônio é limitado por valores $[\tau_{\min}, \tau_{\max}]$ pré-definidos
- As atualizações de feromônio são feitas apenas pela melhor solução encontrada até o momento e pela melhor da iteração
- Valores iniciais $\tau_{\max}$ para todas as arestas e reinicializadas com esse valor quando próximo de convergir

22



Hyper-Cube Framework

- Segue mesma linha do MAX-MIN Ant System
- Valores limitantes são:
 - $\tau_{\min} = 0.001$
 - $\tau_{\max} = 0.999$
- Feromônio inicializado com valor igual a 0.5
- Valores de atualização do feromônio entre $[0, 1]$

23



IMP.MMAS

- Extensão do Hyper-Cube Framework
- Define uma regra para controlar a estagnação (convergência)
$$\tau_{i,j}(t+1) = (1-\rho) \cdot \tau_{i,j}(t) + \rho \cdot \Delta\tau_{ij}$$
- Normaliza os valores de feromônio

24



Híbrido ACO e Branch and Bound Beam-ACO

- Branch and Bound é uma técnica clássica de busca em árvore
- Consiste em criar soluções parciais tornando-as mais completas a cada nível da árvore
- São guiados por limitantes teóricos para definir qual solução expandir
- Híbrido: utiliza passos de Branch and Bound probabilístico na construção de soluções do ACO
- A cada passo, restringe as escolhas a um determinado número definido pelo limitante do Branch and Bound

25



Aplicações

- O ACO e suas variações foram aplicados a Diversos problemas discretos
- Algumas das aplicações necessitaram algumas adaptações por parte do algoritmo
- Seguindo o mesmo framework do ACO, também é possível resolver problemas contínuos

26



Aplicações TSP

Dorigo M., V. Maniezzo & A. Colomi (1996). Ant System: Optimization by a colony of cooperating agents. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics-Part B, 26(1):29-41

Colomi A., M.Dorigo, F.Maffioli, V. Maniezzo, G. Righini, M. Trubian (1996). Heuristics from Nature for Hard Combinatorial Problems. International Transactions in Operational Research, 3(1):1-21.

Dorigo M. & L.M. Gambardella (1997). Ant Colony System: A Cooperative Learning Approach to the Traveling Salesman Problem. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 1(1):53-66. (Also Technical Report TR/IRIDIA/1996-5, IRIDIA, Université Libre de Bruxelles.)

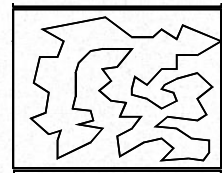
Dorigo M. & L.M. Gambardella (1997). Ant Colonies for the Traveling Salesman Problem. BioSystems, 43:73-81. Also Technical Report TR/IRIDIA/1996-3, IRIDIA, Université Libre de Bruxelles.

Bullnheimer B., R. F. Hartl & C. Strauss (1999). A New Rank Based Version of the Ant System: A Computational Study. Central European Journal for Operations Research and Economics, 7(1):25-38, 1999. Also available as Working paper POM 3/97, Institute of Management Science, University of Vienna, Austria.

27



Aplicações Sequential Ordering Problem



Similar ao TSP, mas com restrição de precedência (deve-se visitar um certo vértice k antes de passar pelo vértice l)

28



Aplicações Sequential Ordering Problem

- Considere um grafo $G = (V, E)$, com V sendo o conjunto de vértices e E o conjunto de arestas.
- Os vértices correspondem às tarefas que devem ser realizadas sequencialmente.
- A cada aresta (i, j) é associado um custo t_{ij} que representa o tempo necessário para o início da tarefa j após a conclusão de i .
- Para cada vértice i , é associado um custo p_i que representa o tempo necessário para a conclusão dessa tarefa.
- As restrições de precedência são feitas a partir de um segundo grafo $P = (V, R)$, onde uma aresta $(i, j) \in R$ se a tarefa i tem que preceder j .

29



Aplicações Sequential Ordering Problem

- Esse problema pode ser escrito como um caso geral do ATSP (asymmetric traveling salesman problem).
- Basta definir as distâncias d_{ij} de uma aresta do TSP como sendo $d_{ij} = t_{ij} + p_j$.
- Com isso podemos usar o ACO sem muitas alterações.
- Única diferença que devemos lidar: a lista tabu deve proibir arestas que não obedeçam à restrição de precedência.

30



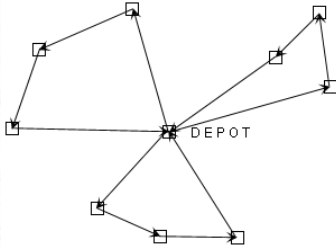
Aplicações Sequential Ordering Problem

Gambardella L. M. and M. Dorigo (1997). **HAS-SOP: An Hybrid Ant System for the Sequential Ordering Problem**. Tech. Rep. No. IDSIA 97-11, IDSIA, Lugano, Switzerland.

31



Aplicações Vehicle Routing



Dado um depósito central, n clientes e m caminhões de transporte, distribuir a mercadoria nos n clientes atendendo suas demandas utilizando-se dos m caminhões respeitando sua capacidade e sempre partindo do depósito.

32



Aplicações Vehicle Routing

- Nesse problema:
 - Cada cliente é visitado uma única vez por exatamente um veículo.
 - Todas as rotas de cada veículos iniciam e terminam no depósito.
 - cada rota a demanda total não pode exceder a capacidade do veículo.
 - O comprimento total de cada rota não excede um dado limitante L .
- É fácil perceber que, após escolher quais clientes cada veículo irá atender, o problema se torna um TSP.

33



Aplicações Vehicle Routing

- Para adaptar o ACO a esse problema:
 - Cada formiga gera um caminho iterativamente conforme o algoritmo padrão.
 - Ao violar uma das restrições, ela volta ao depósito e inicia uma nova rota com outro veículo.

34



Aplicações Vehicle Routing

Bullnheimer B., R.F. Hartl and C. Strauss (1999). **An Improved Ant system Algorithm for the Vehicle Routing Problem**. Paper presented at the Sixth Viennese workshop on Optimal Control, Dynamic Games, Nonlinear Dynamics and Adaptive Systems, Vienna (Austria), May 21-23, 1997, to appear in: *Annals of Operations Research* (Dawid, Feichtinger and Hartl (eds.): Nonlinear Economic Dynamics and Control, 1999.

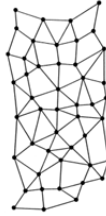
Bullnheimer B., R.F. Hartl and C. Strauss (1999). **Applying the Ant System to the Vehicle Routing Problem**. In: Voss S., Martello S., Osman I.H., Roucairol C. (eds.), *Meta-Heuristics: Advances and Trends in Local Search Paradigms for Optimization*, Kluwer-Boston.

Bullnheimer B. (1999). **Ant Colony Optimization in Vehicle Routing**. Doctoral thesis, University of Vienna, January 1999.

35



Aplicações Telecommunications

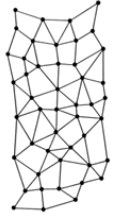


Balanceamento de dados em uma rede.
Um problema em gerenciar o balanço de carga que passa pelos nós de uma rede (ex.: chamadas em uma rede telefonica).

36



Aplicações Telecommunications



É necessário gerar um caminho sempre que é requisitada uma ligação entre dois nós, baseado na carga aplicada na rede.

37



Aplicações Telecommunications

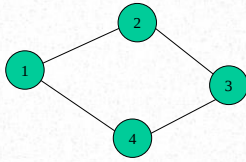
Para utilizar o ACO:

- a tabela de roteamento de dados é substituída por uma tabela de feromônios
- cada nó terá uma tabela de feromônios contendo cada possível destino na rede
- cada tabela contém uma entrada com o nível de feromônio da aresta que liga esse nó com seus vizinhos.

38



Aplicações Telecommunications



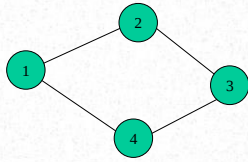
		vizinhos	
		2	4
destino	2	0.95	0.05
	3	0.49	0.51
	4	0.05	0.95

Como exemplo, vamos visualizar a tabela do nó 1 para uma rede com 4 nós. Nela podemos observar quais as probabilidades de uma formiga tomar os dois caminhos possíveis (2 e 4) para os três destinos finais (2, 3 e 4).

39



Aplicações Telecommunications



		vizinhos	
		2	4
destino	2	0.95	0.05
	3	0.49	0.51
	4	0.05	0.95

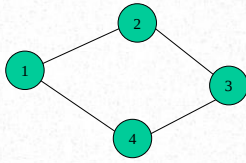
O algoritmo funciona basicamente como para o caso do TSP. A cada iteração uma formiga é colocada na rede com uma origem e um destino aleatórios.

Utilizando das tabelas de feromônio, essa formiga traça um trajeto probabilisticamente e, ao final, atualiza essas tabelas de acordo com a qualidade da solução.

40



Aplicações Telecommunications



		vizinhos	
		2	4
destino	2	0.95	0.05
	3	0.49	0.51
	4	0.05	0.95

Essa aplicação é diferente das outras abordagens pois ele nunca converge (nunca para), uma vez que a rede sofre constantes alterações.

41



Aplicações Telecommunications

Schoonderwoerd R., O. Holland, J. Bruten and L. Rothkrantz (1997). **Ant-based Load Balancing in Telecommunications Networks**. *Adaptive Behavior*, 5(2):169-207.

Schoonderwoerd R., O. Holland and J. Bruten (1997). **Ant-like Agents for Load Balancing in Telecommunications Networks**. *Proceedings of Agents'97, Marina del Rey, CA, ACM Press*, 209-216.

Di Caro G. and M. Dorigo (1997). **AntNet: A Mobile Agents Approach to Adaptive Routing**. *Tech. Rep. IRIDIA/97-12, Université Libre de Bruxelles, Belgium*.

Di Caro G. and M. Dorigo (1998). **Mobile Agents for Adaptive Routing**. *Proceedings of the 31st Hawaii International Conference on System, IEEE Computer Society Press, Los Alamitos, CA*, 74-83.

Di Caro G. & Dorigo M. (1998). **AntNet: Distributed Stigmergetic Control for Communications Networks**. *Journal of Artificial Intelligence Research (JAIR)*, 9:317-365.

Navarro Varela G. and M.C. Sinclair (1999). **Ant Colony Optimisation for Virtual-Wavelength-Path Routing and Wavelength Allocation**. *Proceedings of the Congress on Evolutionary Computation (CEC'99)*, Washington DC, USA, July 1999.

Ducetelle, F., G. Di Caro and L. M. Gambardella (2005). **Using Ant Agents to Combine Reactive and Proactive Strategies for Routing in Mobile Ad Hoc Networks**. *International Journal of Computational Intelligence and Applications (IJCAI)*, Special Issue on Nature-Inspired Approaches to Networks and Telecommunications, Volume 5, Number 2, Pages 169-184, June 2005

42

Aplicações

Quadratic Assignment Problem

Dados p pontos denominados “centros”, alocar n pontos para um centro de forma a minimizar a distância total percorrida.

Ex.: Redes de distribuição de uma fábrica.

43

Aplicações

Quadratic Assignment Problem

• A formulação desse problema é descrita a seguir:

$$\min z = d_{ij}x_{ij}$$

s.a.:

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} = 1$$

$$\sum_{j=1}^m x_{ij} = 1$$

• Esse é um problema de permutação, onde é necessário encontrar a melhor combinação de alocações (i,j) onde cada cliente “ i ” está alocado apenas a um centro “ j ”.

44

Aplicações

Quadratic Assignment Problem

• Para resolvê-lo utilizando ACO, basta fazer com que cada formiga, ao invés de traçar um caminho, escolha sequencialmente um par (i,j) até completar uma solução.

• A lista de movimentos tabu é definida como (i,j) para cada elemento i que já foi alocado e para cada centro j . Adicionalmente, a variável η_{ij} é construída utilizando algum limitante inferior (limitantes de Gilmore e Lawler) definido para este problema, servindo como indicativo da qualidade de cada pedaço da solução.

45

Aplicações

Quadratic Assignment Problem

Maniezzo V., A. Colomi and M. Dorigo (1994). **The Ant System Applied to the Quadratic Assignment Problem**. Tech. Rep. IRIDIA/94-28, Université Libre de Bruxelles, Belgium.

Maniezzo V., L. Muzio, A. Colomi and M. Dorigo (1994). **Il sistema formiche applicato al problema dell'assegnamento quadratico**. Technical Report No. 94-058, Politecnico di Milano, Italy, in Italian.

Taillard E. and L. M. Gambardella (1997). **An Ant Approach for Structured Quadratic Assignment Problems**. 2nd Metaheuristics International Conference (MIC-97), Sophia-Antipolis, France - July 21-24, 1997.

Maniezzo V. (1998). **Exact and approximate nondeterministic tree-search procedures for the quadratic assignment problem**. Research Report CSR 98-1, Scienze dell'Informazione, Università di Bologna, Sede di Cesena, Italy.

Gambardella L. M., E. Taillard and M. Dorigo (1999). **Ant Colonies for the Quadratic Assignment Problem**. Journal of the Operational Research Society, 50:167-176.

Maniezzo V. and A. Colomi (1999). **The Ant System Applied to the Quadratic Assignment Problem**. IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering, to appear.

Stützle T. and M. Dorigo (1999). **ACO Algorithms for the Quadratic Assignment Problem**. In D. Corne, M. Dorigo and F. Glover, editors, *New Ideas in Optimization*, McGraw-Hill.

46

Aplicações

P-Medians

O mesmo problema anterior mas agora também é necessário escolher a localização dos centros.

Ex.: Planejamento de instalações de novas fábricas

47

Aplicações

P-Medians

• Nesse caso, deve-se resolver dois problemas: primeiro encontrar um grupo de p centros e, em seguida, alocar todos os clientes a esses centros.

• A formulação desse problema fica:

$$\min_{X,y} f(X) = \min_{X,y} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p d_{ij} x_{ij}$$

s.a.:

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} = 1, j = 1, \dots, p$$

$$x_{ij} \leq y_j, i, j = 1, 2, \dots, n$$

$$\sum_{j=1}^p y_j = p$$

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} a_i \leq c_j, \text{ for } j \text{ such that } y_j = 1$$

Onde:

- n = número de nós em um grafo
- a_i = demanda do nó i
- c_j = capacidade da mediana j
- d_{ij} = distância entre nós i e j
- p = número de medianas a serem alocadas

48



Aplicações P-Medians

- Para aplicar o ACO a esse problema, o feromônio deixa de ser matriz e passa a ser um vetor τ_i , representando a probabilidade de um nó ser escolhido para fazer parte do conjunto de medianas.
- As formigas então escolhem sequencialmente, pela equação probabilística, se um dado nó fará parte da solução ou não, até que uma solução seja formada.
- Ao escolher as medianas, é aplicada uma heurística construtiva para resolver o problema de alocação gerado.
- A variável η_i é calculada a partir de uma fórmula de densidade definida como a razão entre o número de nós mais próximos a i que podem ser alocados sem que se desrespeite a demanda e a soma da distância total percorrida.

49



Aplicações P-Medians

De França, F. O., F. J. Von Zuben e L. N. de Castro. Definition of Capacited p-Medians by a Modified Max Min Ant System with Local Search. *ICONIP - 2004 11th International Conference on Neural Information Processing - SPECIAL SESSION ON ANT COLONY AND MULTI-AGENT SYSTEMS*, v. 3316, 2004, p.1094-110. 2004a.

De França, F. O., F. J. Von Zuben e L. N. de Castro. A Max Min Ant System Applied To The Capacitated Clustering Problem. 2004 IEEE Workshop on Machine Learning for Signal Processing, São Luiz, Brasil: Proceedings of the 2004 IEEE International Workshop on Machine Learning for Signal Processing, 2004b. 755-764 p.

De França, F. O., F. J. Von Zuben e L. N. de Castro. Max Min Ant System and Capacitated p-Medians: Extensions and Improved Solutions. *Informatica*, v.29, n.2, p.163-171. 2005.

50



Aplicações Scheduling (escalonamento)

Specification of a 5x5 Job-Shop Scheduling Problem

Job 1	M ₁ , 1	M ₂ , 3	M ₃ , 2	M ₄ , 1	M ₅ , 4
Job 2	M ₁ , 3	M ₂ , 3	M ₃ , 4	M ₄ , 2	M ₅ , 1
Job 3	M ₁ , 5	M ₂ , 1	M ₃ , 2	M ₄ , 1	M ₅ , 3
Job 4	M ₁ , 2	M ₂ , 1	M ₃ , 2	M ₄ , 3	M ₅ , 1
Job 5	M ₁ , 4	M ₂ , 3	M ₃ , 1	M ₄ , 5	M ₅ , 1

Dividir n tarefas para m máquinas de forma a obter o máximo aproveitamento ou menor tempo de processamento possível.
Ex.: Escalonamento de processos em uma CPU, divisão de projetos em uma empresa.

51



Aplicações Scheduling (escalonamento)

- Para utilizarmos o ACO nesse problema, precisamos primeiro representá-lo na forma de grafo.
- Primeiramente, deve-se definir duas matrizes, a matriz $T = \{t_{ij}\}$ onde cada elemento indica que a máquina t_{ij} deve ser utilizada pela tarefa i na j -ésima sequência. Ex.:

	M1	M2	M3
T =	M3	M1	M2
	M2	M1	M3

Na tabela T, podemos verificar que na tarefa 2 devemos usar as máquinas M3, M1 e M2, nessa sequência.

52



Aplicações Scheduling (escalonamento)

- A outra matriz é a matriz P, onde cada elemento p_{ij} determina o tempo gasto para executar a tarefa i na máquina j .
- Com essas duas matrizes, podemos montar um grafo onde cada nó representa um elemento da matriz T e o peso das arestas são os elementos da matriz P em relação ao nó destino (Ex.: Caso a aresta indique que, após alocar a tarefa 1 à máquina 1 devemos alocar a tarefa 2 à máquina 3, então o peso da aresta será p_{23}).
- A lista de movimentos tabus é definida como os elementos já escolhidos e os que não desrespeitam a precedência de alocações de máquinas de determinada tarefa.

53



Aplicações Scheduling

Colnani A., M. Dorigo, V. Maniezzo and M. Trubian (1994). *Ant system for Job-shop Scheduling*. *JORBEL - Belgian Journal of Operations Research, Statistics and Computer Science*, 34(1):39-53.

Forsyth P. and A. Wren (1997). *An Ant System for Bus Driver Scheduling*. Presented at the 7th International Workshop on Computer-Aided Scheduling of Public Transport, Boston, August 1997.

54



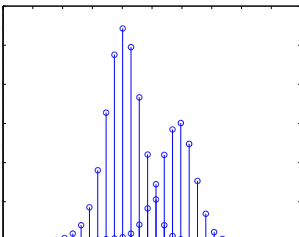
ACO para problemas contínuos

- Uma forma de utilizar os conceitos de ACO para otimização em ambientes contínuos é transformar a trilha de feromônio em uma distribuição normal de probabilidade.
- Como, na realidade, a trilha de feromônio deixada pelas formigas tem uma intensidade crescente e contínua em direção à fonte de alimento, podemos dizer que a intensidade do feromônio tende a aumentar quando caminhando em direção à variável x ótima.
- O feromônio então se torna algo parecido com:
$$\tau(x) = e^{-\frac{(x - x_{\min})^2}{2\sigma^2}}$$
- Onde $x_{\min}$ é o ponto x onde foi obtido o menor valor até o momento e σ é a variável que define a dispersão.

55



De Discreto para Contínuo



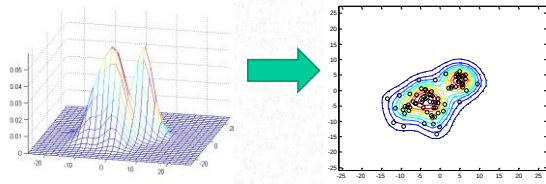
A informação discreta do feromônio é transformada em kernels Gaussianos dos quais novas soluções podem ser amostradas.

56



From Discrete to Continuous Spaces

- Para construir uma solução, cada formiga utiliza a informação dada pelo feromônio contínuo (build_solution()):

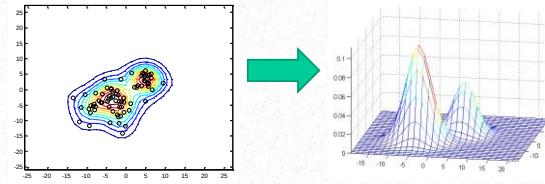


57



From Discrete to Continuous Spaces

- Depois de amostrar todas as soluções, a distribuição de feromônio é então atualizada (update_pheromone()):



58



ACO para problemas contínuos

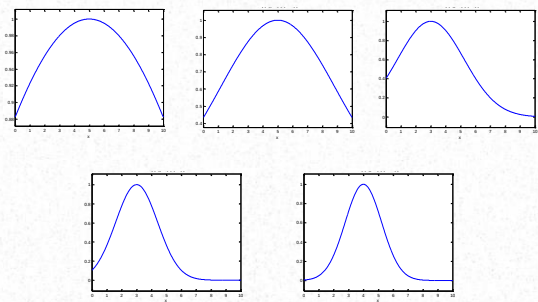
- A atualização do feromônio é feita em cima da variância σ :
$$\sigma^2 = \frac{\sum_{j=1}^k \frac{1}{f_j - f_{\min}} (x_j - x_{\min})^2}{\sum_{j=1}^k \frac{1}{f_j - f_{\min}}}$$
- Onde: f_j é o valor da função-objetivo obtido pela formiga j e $f_{\min}$ é o valor da menor solução obtida até o momento.
- Dessa forma, a cada iteração a altura da função de distribuição aumenta e sua largura diminui, convergindo para uma solução no espaço de busca.
- Na figura a seguir, pode-se observar o comportamento do nível de feromônio em torno de uma das variáveis de um problema de otimização durante cinco iterações.

59

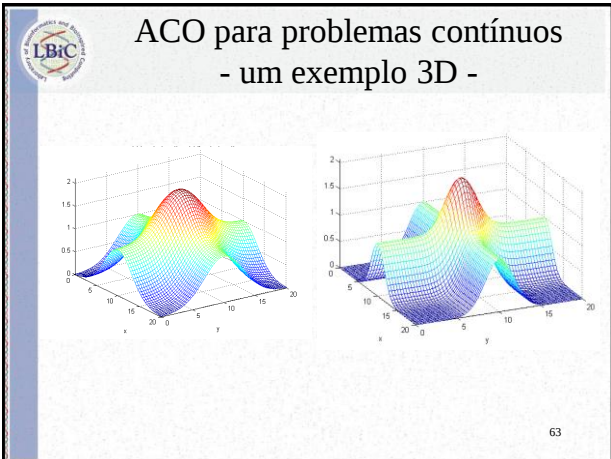
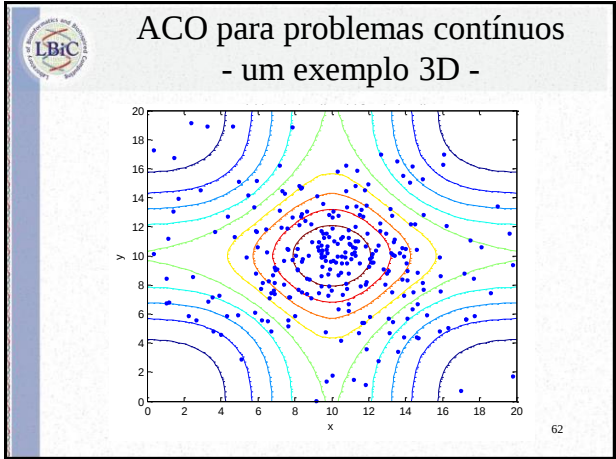
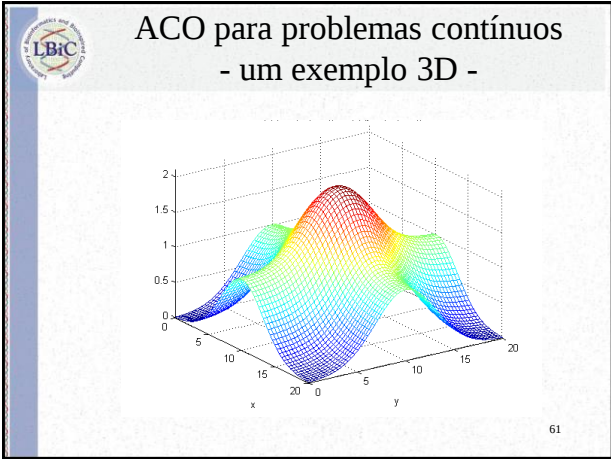


ACO para problemas contínuos

- evolução do nível de feromônio -



60



MACACO

Multivariate Ant Colony Algorithm for Continuous Optimization

- Multivariado pois a interdependência entre variáveis é levada em consideração quando calculando os novos valores de feromônio;
- O feromônio é calculado baseado nas $\zeta\%$ melhores soluções da iteração;
- Usando essa informação, a matriz de covariância da amostra é calculada;
- Fase I:
 - O centro da gaussiana multivariada é a melhor solução atual;
- Fase II:
 - O centro da gaussiana multivariada é o valor médio da matriz de feromônio.

64

