Grupos, anéis e corpos e suas propriedades.

Wesley Angelino de Souza

Prof. Marco Aurélio Amaral Henriques

>> Tópicos

1. Introdução
2. Grupos e suas propriedades
3. Anéis e suas propriedades
4. Corpos e suas propriedades
5. Conclusões
6. Exercícios

1. Introdução

- Os conceitos de **grupos**, **anéis** e **corpos** são parte de um ramo da matemática chamada **álgebra abstrata ou moderna**.

- Na **álgebra abstrata** a preocupação é em relação a conjuntos nas quais podemos operar algebricamente aos elementos pertencentes a eles. Assim podemos **combinar dois elementos** a fim de ter um **terceiro elemento** com características dos **dois primeiros**.

- Nestas operações, são aplicadas **regras** que determinam a natureza do conjunto.

1. Introdução

- As **regras** incluem **operações aritméticas** mas não estão limitadas somente a estas operações. São regras que ditam as propriedades algébricas de cada conjunto de elementos.

- Serão vistas a seguir propriedades e regras para elementos algébricos chamados de **Grupos, Anéis e Corpos e suas respectivas propriedades**.

2. Grupos e suas propriedades

- É dado um **grupo G**, denotado por **{G,•},** no qual permite operações binárias (denotada por •) entre pares ordenados de elementos de G (a,b). Para os exemplos serão utilizados o grupo **S3**:

$$\alpha = \{1,2,3\}$$
$$\rho = \{1,3,2\}$$
$$\beta = \{2,1,3\}$$
$$\gamma = \{2,3,1\}$$
$$\theta = \{3,1,2\}$$
$$\pi = \{3,2,1\}$$

$$S_3 = \{\alpha, \rho, \beta, \gamma, \theta, \pi\}$$

2. Grupos e suas propriedades

- Os seguintes axiomas são obedecidos para os grupos:

(A1) Fechamento: Se a e b pertencem a G, então a • b também está em G. Exemplo:

$$\begin{cases} \pi, \rho \in S_3 \\ \pi = \{3,2,1\} \\ \rho = \{1,3,2\} \end{cases}$$

Considerando que • seja a permutação dos elementos de ρ de acordo com a permutação π:

$$\pi \bullet \rho = \{3,2,1\} \bullet \{1,3,2\} = \{2,3,1\}$$

2. Grupos e suas propriedades

(A2) Associativo: a • (b • c) = (a • b) • c

Exemplo:

$$\begin{cases} \pi, \rho, \beta \ \in \ S_3 \\ \pi = \{3,2,1\} \\ \rho = \{1,3,2\} \\ \beta = \{2,1,3\} \end{cases}$$

$$\pi \bullet (\rho \bullet \beta) = \{3,2,1\} \bullet (\{1,3,2\} \bullet \{2,1,3\}) = \{3,2,1\} \bullet \{2,3,1\} = \{1,3,2\} \qquad (I)$$

$$(\pi \bullet \rho) \bullet \beta = (\{3,2,1\} \bullet \{1,3,2\}) \bullet \{2,1,3\} = \{2,3,1\} \bullet \{2,1,3\} = \{1,3,2\} \qquad (II)$$

$$I = II$$

2. Grupos e suas propriedades

(A3) Elemento identidade: Existe um elemento e em G, de modo que a • e = e • a = a, para todo a em G. Exemplo:

$$\begin{cases} \pi \in S_3 \\ \pi = \{3,2,1\} \\ \varepsilon = \{1,2,3\} \end{cases}$$

$$\varepsilon \bullet \pi = \{1,2,3\} \bullet \{3,2,1\} = \{3,2,1\} \qquad \text{(I)}$$

$$\pi \bullet \varepsilon = \{3,2,1\} \bullet \{1,2,3\} = \{3,2,1\} \qquad \text{(II)}$$

$$I = II$$

Assim sendo, o elemento identidade é {1,2,3}

2. Grupos e suas propriedades

(A4) Elemento inverso: Para cada a em G existe um elemento a' em G, de modo que a • a' = a' • a = e

$$\begin{cases} \gamma, \gamma' \in S_3 \\ \gamma = \{2,3,1\} \\ \gamma' = \{3,1,2\} \\ \varepsilon = \{1,2,3\} \end{cases}$$

$$\gamma * \gamma' = \{2,3,1\} \bullet \{3,1,2\} = \{1,2,3\} \qquad \text{(I)}$$
$$\gamma' * \gamma = \{3,1,2\} \bullet \{2,3,1\} = \{1,2,3\} \qquad \text{(II)}$$

$$I = II = \varepsilon$$

2. Grupos e suas propriedades

Grupo finito: quando possui uma quantidade finita de elementos e a sua **ordem** corresponde ao número de elementos pertencentes ao grupo.

$$\begin{cases} G = \{1,2,3\} \\ ordem = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} H = \{1,2,3,4,5,6, \dots\} \\ \quad Grupo\ infinito \end{cases}$$

2. Grupos e suas propriedades

Grupo Abeliano: Satisfazer de (A1) a (A4) e ainda mais esta condição:

(A5) Comutativo: a • b = b • a

- O conjunto de números inteiros é abeliano sob a adição.

  (-1)+(3) = (3)+(-1) = 2

- O conjunto dos números reais sem o zero é abeliano sob a multiplicação.

  (2,31)*(0,88) = (0,88)*(2,31)=2,0328

- O conjunto S_3 é um grupo, mas não é abeliano (Exercício 1).

2. Grupos e suas propriedades

Grupo Cíclico: Conjunto formado por um gerador a, contanto que cada elemento de G for uma **potência** de a, ou seja:

$$G = \{a^0, a^1, a^2, a^3, a^4\}$$
$$a = \{3,2,1\}$$

$$G = \{\{1,2,3\}, \{3,2,1\}, \{1,2,3\}, \{3,2,1\}, \{1,2,3\}\}$$

Neste caso, $\boldsymbol{G}$ **é cíclico, finito e abeliano**.

Nota: **grupo aditivo de inteiros** é um grupo cíclico gerado pelo elemento 1, sendo cada elemento posterior incrementado por um, podendo ser ou não finito, exemplo:

$$H_n = \{1,2,3,4,5,6,7,8, \dots, n\}$$

3. Anéis e suas propriedades

- É dado um anel R, denotado por $\{R, +, \times\}$, no qual permite duas operações binárias (chamadas de adição e multiplicação) entre elementos a, b e c de R. Para este caso serão utilizados como exemplos os grupo dos números inteiros ($Z^* = Z - \{0\}$)

Axiomas obedecidos

- **(A1 – A5):** R tem que ser um grupo abeliano, ou seja, satisfazer os axiomas A1 a A5.
- **M1 - Fechamento sob multiplicação**: se a e b pertencem a Z^*, ab também está em Z^*:

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \end{cases} \rightarrow ab = -2 \ \rightarrow a, b, ab \in Z^*$$

$$\begin{cases} a = -33 \\ b = -2 \end{cases} \rightarrow ab = 66 \ \rightarrow a, b, ab \in Z^*$$

3. Anéis e suas propriedades

(M2) Associatividade da Multiplicação: a(bc)=(ab)c:

$$\begin{cases} a = 2 \\ b = -3 \\ c = 10 \end{cases}$$

$$a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$$
$$2 \times \big((-3) \times (10)\big) = \big(2 \times (-3)\big) \times 10$$
$$2 \times (-30) = (-6) \times 10$$
$$-60 = -60$$

3. Anéis e suas propriedades

(M3) Leis distributivas:

- a(b+c)=ab+ac:

$$\begin{cases} a = 2 \\ b = -3 \\ c = 10 \end{cases}$$
$$a \times (b + c) = a \times b + a \times c$$
$$2 \times (-3 + 10) = 2 \times (-3) + 2 \times 10$$
$$2 \times (7) = (-6) + 20$$
$$14 = 14$$

- (a+b)c=ac+bc:

$$\begin{cases} a = 2 \\ b = -3 \\ c = 10 \end{cases}$$
$$(a + b) \times c = a \times c + b \times c$$
$$(2 + (-3)) \times 10 = 2 \times 10 + (-3) \times 10$$
$$(-1) \times 10 = 20 - 30$$
$$-10 = -10$$

3. Anéis e suas propriedades

De forma geral, um anel é um conjunto onde se possa realizar operações aritméticas de **adição**, **subtração** [a-b=a+(-b)] e **multiplicação**.

Se o conjunto for composto de matrizes quadradas de números reais, existem propriedades de adição e multiplicação, portanto é um anel.

Um anel é comutativo se satisfazer a **comutatividade da multiplicação**:

(M4) Comutatividade da multiplicação: ab = ba

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 6 \\ 4 & 8 & 2 \\ 2 & -2 & 8 \end{bmatrix}, \mathrm{B} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow AB = BA = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 36 \\ 0 & 32 & 0 \\ 4 & 0 & 16 \end{bmatrix}$$

Neste caso, uma matriz $n\ x\ n$ é comutativa se seus elementos forem números pares(positivos, negativos) ou zero.

3. Anéis e suas propriedades

Um anel está no domínio da integridade se os axiomas forem obedecidos:

(M5) Identidade multiplicativa: existe um elemento um em R em que
a 1 = 1 a = a

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 6 \\ 4 & 8 & 2 \\ 2 & -2 & 8 \end{bmatrix}, 1 \times A = A \times 1 = A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 6 \\ 2 & 8 & 2 \\ 2 & -2 & 8 \end{bmatrix}$$

(M6) Sem divisores zero: se a,b está em R e ab = 0, então a=0 ou b=0.

Se R for o conjunto de inteiros, positivos, negativos e 0, sob operações matemáticas de adição e multiplicação, R está no domínio de integridade.

4. Corpos e suas propriedades

- É dado um corpo F, denotado por $\{F, +, \times\}$, no qual permite duas operações binárias (chamadas de adição e multiplicação) entre elementos a, b e c de F. Agrega os seguintes axiomas:
  - **A1 – M6**
  - **M7 - Inverso multiplicativo**: Para cada a em F, exceto 0, existe um elemento a^{-1} em F tal que $aa^{-1} = a^{-1}a = 1$

$$\begin{cases} a = 4 \\ a^{-1} = 1/4 \end{cases} \rightarrow aa^{-1} = a^{-1}a = 4 \times \frac{1}{4} = 1$$

$$\begin{cases} a = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 6 \\ 4 & 8 & 2 \\ 2 & -2 & 8 \end{bmatrix} \\ a^{-1} = \begin{bmatrix} -1.0625 & 0.4375 & 0.6875 \\ 0.4375 & -0.0625 & -0.3125 \\ 0.375 & -0.125 & -0.125 \end{bmatrix} \end{cases} \rightarrow aa^{-1} = a^{-1}a = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

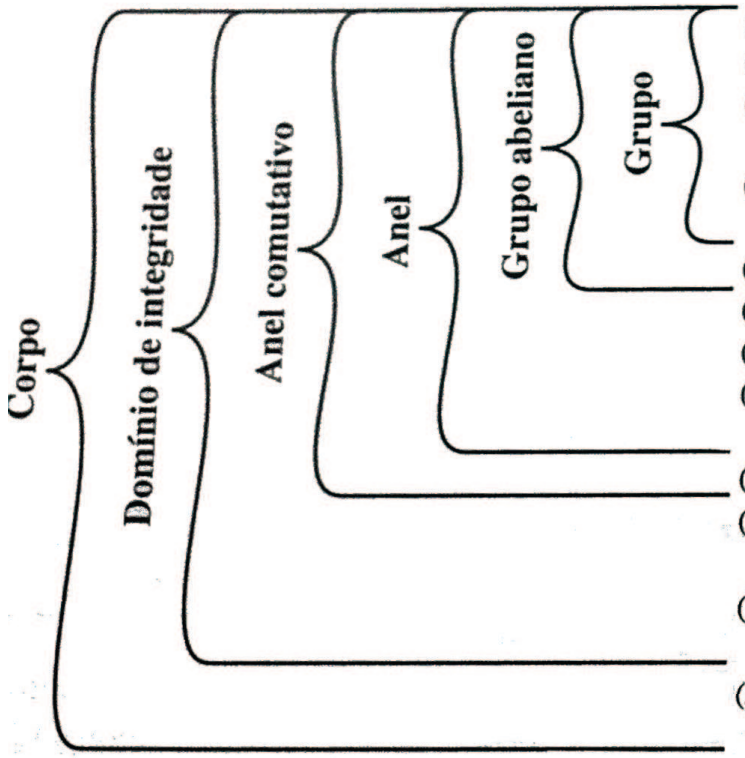
4. Corpos e suas propriedades

Portanto, o axioma **M7** garante com que o conjunto realize operações de adição, subtração, multiplicação e divisão - regra $\frac{a}{b} = a(b^{-1})$.

São exemplos de corpos os números racionais, reais e complexos. O conjunto dos inteiros não é um corpo porque, para cada inversa (exceto 1 e -1), gera-se um número racional.

5. Conclusões

Os grupos, anéis e corpos dividem-se em propriedades e permite operações matemáticas específicas que compõem parte da álgebra abstrata.



(A1) Fechamento sob adição:	Se a e b pertencem a S, então $a + b$ também está em S
(A2) Associatividade da adição:	$a + (b + c) = (a + b) + c$ para todo a, b, c em S
(A3) Identidade aditiva:	Existe um elemento 0 em R tal que $a + 0 = 0 + a = a$ para todo a em S
(A4) Inverso aditivo:	Para cada a em S existe um elemento $-a$ em S tal que $a + (-a) = (-a) + a = 0$
(A5) Comutatividade da adição:	$a + b = b + a$ para todo a, b em S
(M1) Fechamento sob multiplicação:	Se a e b pertencem a S, então ab também está em S
(M2) Associatividade da multiplicação:	$a(bc) = (ab)c$ para todo a, b, c em S
(M3) Leis distributivas:	$a(b + c) = ab + ac$ para todo a, b, c em S $(a + b)c = ac + bc$ para todo a, b, c em S
(M4) Comutatividade da multiplicação:	$ab = ba$ para todo a, b em S
(M5) Identidade multiplicativa:	Existe um elemento 1 em S tal que $a1 = 1a = a$ para todo a em S
(M6) Sem divisores zero:	Se a, b em S e $ab = 0$, tentão $a = 0$ ou $b = 0$
(M7) Inverso multiplicativo:	Se a pertence a S e $a \neq 0$, existe um elemento a^{-1} em S tal que $aa^{-1} = a^{-1}a = 1$