/ /

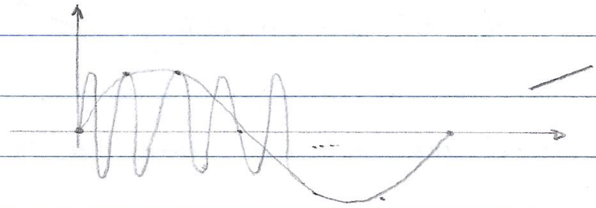
IE550 - Processamento Digital de Sinais

* Amostragem

Vamos iniciar a discussão acerca de amostragem olhando p/ a relação entre o sinal no tempo (contínuo) - uma senoide - e suas amostras.

AMOSTRAGEM PERIÓDICA : $x(n) = x_c(nT_S)$, onde $T_S = 1/f_S$ = período de amostragem

• n = inteiro = $\{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ - unidade : amostra



conhecendo as amostras somente, como podemos recuperar o sinal original (não só em nT_S, mas em $\forall$ instante de tempo)?

• $x(n)$ é indefinido para $n \notin \mathbb{Z}$ - não existe $\forall$ informação entre n e $(n+1)$.

Exemplo: $\text{sen}(2\pi f_0 t) = \text{sen}(\Omega_0 t)$

• $x(n) = \text{sen}(2\pi f_0 n T_S) = \text{sen}(\omega_0 n) \Rightarrow \underline{\omega_0 = \Omega_0 T_S}$ (freq. discreta; freq. analógica)

Sabemos que $\text{sen}(\theta) = \text{sen}(\theta + 2\pi) = \text{sen}(\theta + 4\pi) \dots \Rightarrow \text{sen}(\theta) = \text{sen}(\theta + 2\pi k)$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Então, $x(n) = \text{sen}(2\pi f_0 n T_S)$

$$= \text{sen}(2\pi f_0 n T_S + 2\pi k)$$

$$= \text{sen}\left(2\pi \left(f_0 + \frac{k}{nT_S}\right) nT_S\right)$$

$$= \text{sen}\left(2\pi \left(f_0 + \frac{k}{n} f_S\right) nT_S\right)$$

Se k for um múltiplo de n, $m = k/n \rightarrow x(n) = \text{sen}(2\pi(f_0 + m f_S) n T_S)$

Com isto, concluímos que uma sequência $x(n)$ representando uma senoide de f_0 Hz também representa infinitas outras senoides de freqs. $f_0 + m f_S$. Há, portanto, uma ambigüidade, pois freqs. separadas por $f_S = 1/T_S$ são INDISTINGUÍVEIS após a amostragem.

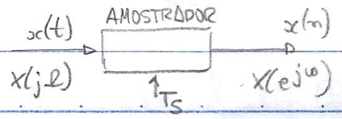
E para uma sequência $x[n]$ qualquer?

• $x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{X(e^{j\omega})}_{} e^{j\omega n} d\omega$

indica a magnitude e a fase c/ que $e^{j\omega}$ aparece na composição de $x(n)$

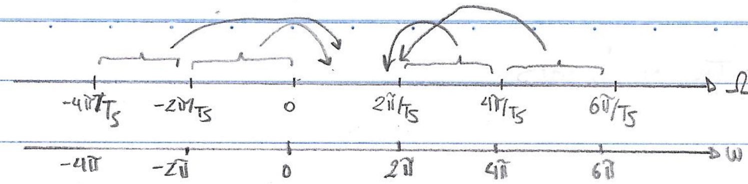
• $x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{X(j\Omega)}_{} e^{j\Omega t} d\Omega$

indica a magnitude e a fase c/ que $e^{j\Omega t}$ aparece na composição de $x(t)$



$\rightarrow \omega = \Omega T_S$ $\Rightarrow$ o que quer que apareça em ω_0 vem de $\frac{\omega_0}{T_S}, \frac{\omega_0 + 2\pi}{T_S}, \frac{\omega_0 + 4\pi}{T_S}, \dots$

$\omega_1 = \Omega_1 T_S = (\Omega_0 + 2\pi k f_S) T_S = \overbrace{\Omega_0 T_S}^{\omega_0} + 2\pi k = \omega_0 + 2\pi k$. Mas $e^{j\omega_1 n} = e^{j(\omega_0 + 2\pi k)n} = e^{j\omega_0 n}$



O conteúdo completo de frequência do sinal analógico afeta a faixa de freqs. $0 - 2\pi$ (ou, equivalentemente, $-\pi$ a π).

É de se esperar, portanto, que o valor de $X(e^{j\omega_0})$ dependa de $\sum_k X\left(j\left(\frac{\omega_0+2\pi k}{T_S}\right)\right)$, como observaremos no caso da amostragem "ideal".

Exemplo: $x_1(n) = \cos(2\pi\cdot 7/6\cdot n)$ ← cossenoide de frequência 7Hz, amostrada a 6Hz.

$x_2(n) = \cos(2\pi\cdot 1/6\, n)$ ← cossenoide de frequência 1Hz, amostrada a 6Hz.

Isto, $x_1(n) = \cos(2\pi\cdot\{1+6\}/6\cdot n) = \cos(2\pi\cdot 1/6\cdot n + 2\pi n) = \cos(2\pi\, 1/6\, n)\,\cancel{\cos(2\pi n)}^{\,1} - \text{sen}(2\pi\, 1/6\, n)\,\cancel{\text{sen}(2\pi n)}^{\,0}$

$= \cos(2\pi\cdot 1/6\, n) = x_2(n)$

➤ Frequências digitais separadas de 2π são, na verdade, como dois nomes para a mesma coisa.

Por causa da amostragem, surge uma relação entre as freqs. analógicas e digitais: $\omega = \Omega T_S$

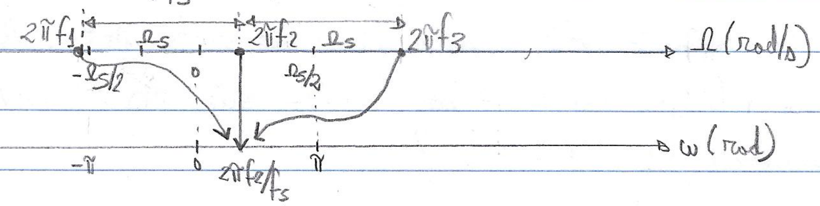
Como ω e $(\omega+2\pi k)$, $k=0,\pm1,\pm2,\ldots$, são essencialmente a mesma frequência, toda a informação de que necessitamos acerca da representação no domínio da frequência da sequência dtido está dentro de ∀ intervalo de comprimento 2π de freqs. ω.

↳ intervalos usuais: 0 a 2π ou $-\pi$ a π.

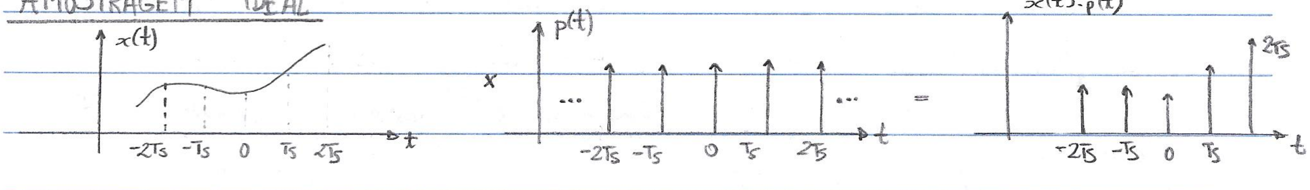
Isto tem a ver com a periodicidade de $X(e^{j\omega})$ (c/ período 2π).

Explorando um pouco mais a relação de frequências:

- $f=0 \rightarrow \omega = 2\pi f T_S = 0$
- $f=\frac{f_S}{2} \rightarrow \omega = 2\pi \frac{f_S}{2}\frac{1}{f_S} = \pi$
- $f=f_S \rightarrow \omega = 2\pi f_S \frac{1}{f_S} = 2\pi$



AMOSTRAGEM "IDEAL"



Esta forma abstrata de amostragem realiza o produto de $x(t)$ pela função pente.

Am②

(trem de impulsos), fornecendo um sinal periódico c/ impulsos cujas áreas correspondem às amplitudes de $x(t)$ nos instantes de amostragem.

$$x_a(t) = x(t) \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-kT_s) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_s)\,\delta(t-kT_s)$$

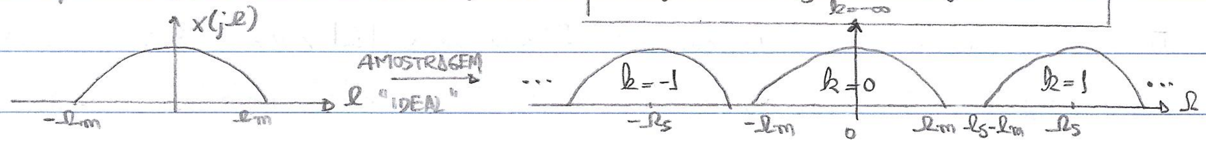
Vamos olhar p/ o espectro de $x_a(t)$:

$$X_a(j\Omega) = \frac{1}{2\pi} \cdot X(j\Omega) * \mathcal{F}\{p(t)\}$$

Isso, a representação em série de Fourier de $p(t)$ é $\frac{1}{T_s}\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{j\frac{2\pi}{T_s}kt}$. Via transf. de Fourier, temos que $P(j\Omega) = \frac{2\pi}{T_s}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - \frac{2\pi k}{T_s}) = \frac{2\pi}{T_s}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - k\Omega_s)$

Então, $X_a(j\Omega) = \frac{1}{2\pi} X(j\Omega) * \frac{2\pi}{T_s}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - k\Omega_s)$

Dado que $h(t) * \delta(t-t_0) = h(t-t_0)$, então $\boxed{X_a(j\Omega) = \frac{1}{T_s}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X(j(\Omega - k\Omega_s))}$



A partir do sinal amostrado $x_a(t)$, é possível recuperar (sem perdas) o sinal completo $x(t)$ usando um filtro passa-baixas ideal, o qual captura a componente espectral centrada em $\Omega = 0$ $(k=0)$ e elimina as demais réplicas.

A recuperação do sinal só é possível se as componentes espectrais em $X_a(j\Omega)$ não estiverem sobrepostas. O fenômeno denominado aliasing ocorre se o tempo entre amostras for muito grande, i.e., se a freq. Ω_s for pequena em comparação à velocidade de variação do sinal (i.e., em relação a Ω_m).

Para evitar aliasing, a condição é que $\Omega_s - \Omega_m > \Omega_m$

TAXA DE NYQUIST: $\Omega_s = 2\Omega_m$

$T_s = \pi/\Omega_m$

Mas não armazenamos $x_a(t)$, e sim $x(n)$.

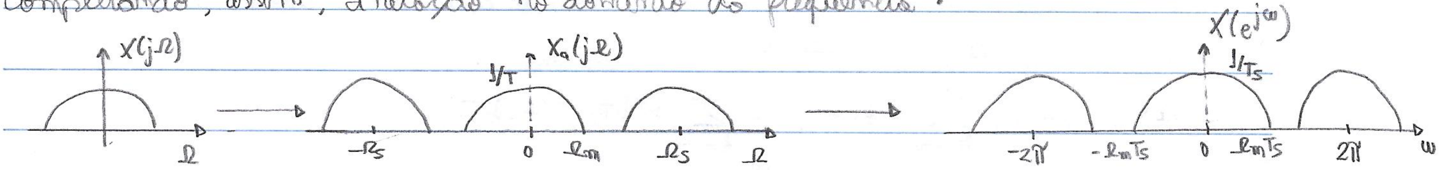
$$x_a(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_s)\,\delta(t-kT_s)$$

Aplicando Fourier: $X_a(j\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_s)\,\mathcal{F}\{\delta(t-kT_s)\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_s)\,e^{-jk\Omega T_s}$

Mudando a notação: $x(kT_s) = x(k)$, $\Omega T_s = \omega$ e $X_a(j\Omega) = X(e^{j\omega})$

Então, $X(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\,e^{-j\omega k}$ $\Rightarrow$ é a famosa expressão da transformada de Fourier para sinais discretos

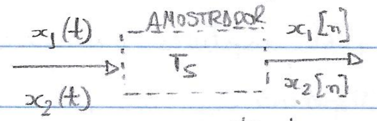
Completando, assim, a relação no domínio da frequência:



Acabamos vendo – primeiro, intuitivamente e, agora, formalmente – a relação entre os espectros analógico e digital; além disso, observamos o surgimento de réplicas espectrais via amostragem ideal, a qual leva a um espectro (digital) periódico, fato já esperado por conta da ambiguidade de frequências (separadas de Ω_s e/ou 2π).

* TEOREMA DA AMOSTRAGEM (NYQUIST-SHANNON): seja $x(t)$ um sinal a tempo contínuo e limitado em banda com $X(j\Omega) = 0$ para $|\Omega| \geq \Omega_m$. Então, $x(t)$ é única e perfeitamente representado por suas amostras $x[n] = x(nT_s)$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, caso $\Omega_s = 2\pi/T_s > 2\Omega_m$.

Por quê estritamente maior?



$\sin \pi n = 0, \forall n$

$$x_1(t) = \cos(\underbrace{2\pi f_s/2}_{\text{freq. máx}}\, t + \theta) \xrightarrow[\text{com } 2.(\pi f_s)]{\text{amostrando}} x_1[n] = \cos(2\pi f_s/2 \cdot n/f_s + \theta) = \cos(\pi n + \theta) = \cos \pi n \cos\theta$$

$$x_2(t) = \cos(2\pi f_s/2 \cdot t) \cos\theta \xrightarrow[\text{com } 2.(\pi f_s)]{\text{amostrando}} x_2[n] = \cos(2\pi f_s/2 \cdot n/f_s) \cdot \cos\theta = \cos \pi n \cos\theta$$

Ora, $x_1(t) \neq x_2(t)$, porém $x_1[n] = x_2[n]$ (teoricamente, p/ uma freq. de amostragem "segura"). Portanto, NÃO sabemos dizer qual sinal analógico – ambos com frequência $f_s/2$ – gerou o sinal digital. Isto demonstra que $f_s/2$ NÃO é bem representada na amostragem.

* RESUMO DA AMOSTRAGEM "IDEAL" E PROCESSAMENTO DIGITAL

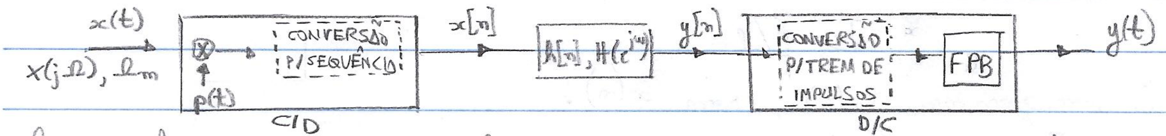
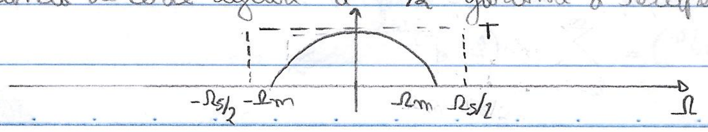


FIGURA A

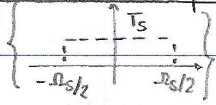
Vamos olhar com mais detalhes a reconstrução de $x(t)$ a partir de $x[n]$.

- como $\Omega_s > 2\Omega_m$, $\Omega_m < \Omega_s/2$. Por isso, um FPB ideal – supondo taxa de Nyquist – com frequência de corte igual a $\Omega_s/2$ garante a recuperação.



O que a filtragem passa-baixas faz no domínio do tempo?

$$x_r(t) = x_a(t) * h_{FPB}(t), \text{ onde } h_{FPB}(t) = \mathcal{F}^{-1}\{\ldots\}$$



Ora, $h_{FPB}(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\Omega_s/2}^{\Omega_s/2} T_s\, e^{j\Omega t}\, d\Omega$

$$= \frac{1}{2\pi} T_s \cdot \left.\frac{e^{j\Omega t}}{jt}\right|_{\Omega=-\Omega_s/2}^{\Omega=\Omega_s/2} = \frac{1}{2\pi} T_s \cdot \left[\frac{e^{j\Omega_s/2\, t}}{jt} - \frac{e^{-j\Omega_s/2\, t}}{jt}\right]$$

$$= \frac{1}{\cancel{2\pi}} \cdot \frac{\cancel{2\pi}}{\Omega_s}\, 2\, \frac{\mathrm{sen}\, \Omega_s/2\, t}{t} = \frac{\mathrm{sen}\, \Omega_s/2\, t}{\Omega_s t/2}$$

Sendo assim, $x_r(t) = x_a(t) * \left[\frac{\mathrm{sen}\, \Omega_s/2\, t}{\Omega_s/2\, t}\right]$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\, \delta(t-kT_s) * \left[\frac{\mathrm{sen}\, \Omega_s/2\, t}{\Omega_s/2\, t}\right]$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\, \frac{\mathrm{sen}\, \Omega_s/2\,(t - k\,2\pi/\Omega_s)}{\Omega_s/2\,(t-k\,2\pi/\Omega_s)}, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \Omega_s = 2\pi/T_s$$

- se $t = mT_s$, $\frac{\mathrm{sen}\, \Omega_s/2\; m\, 2\pi/\Omega_s}{\Omega_s/2 \cdot m\, 2\pi/\Omega_s} = \frac{\mathrm{sen}\, \pi m}{\pi m} = \begin{cases} = 1, & \text{caso } m = 0 \\ = 0, & \text{caso } m \neq 0 \end{cases}$

Como $x_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\, h_{FPB}(t - nT_s)$ — CONVOLUÇÃO, concluímos que nos instantes $t = mT_s$, $x_r(mT_s) = x(m)$ (as demais amostras $x(n)$ não interferem, pois $h_{FPB}(kT_s)$ é zero p/ $k \neq 0$). Ou seja, o sinal que reconstruímos conforme a fórmula de interpolação tem exatamente os mesmos valores que o sinal contínuo original nos instantes de amostragem (e isso independe do período de amostragem).

- O sistema da figura A mistura elementos de processamento/filtragem a tempo contínuo com sequências e sistemas a tempo discreto. Vamos, então, encontrar algumas relações de equivalência.

$$x[n] = x(nT_s)$$

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{T_s}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X\left(j\left(\frac{\omega}{T_s} - \frac{2\pi k}{T_s}\right)\right) = \frac{1}{T_s}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X(j(\Omega - k\Omega_s))$$

Quando $x[n]$ passa pelo filtro ($h[n]$), obtemos $y[n] \longleftrightarrow Y(e^{j\omega})$.

A saída do conversor D/C é dada pela fórmula de interpolação:

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n) \cdot h_{FPB}(t - nT_s)$$

$$\downarrow \mathcal{F} \qquad \qquad \downarrow \mathcal{F}$$

$$Y(j\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n) \cdot H_{FPB}(j\Omega) \cdot e^{-j\Omega n T_s}$$

$$= H_{FPB}(j\Omega) \cdot \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n) \cdot e^{-j\Omega n T_s}}$$

$$= H_{FPB}(j\Omega) \cdot Y(e^{j\omega})\Big|_{\omega = \Omega T_s} = \begin{cases} T_s\, Y(e^{j\Omega T_s}), & |\Omega| < \underbrace{\Omega_s/2}_{\pi/T_s} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

este ajuste do eixo de freqs. equivale a gerar o trem de impulsos a partir das amostras

⊛ Caso especial: $h[n] \longleftrightarrow H(e^{j\omega})$ é um sistema LTI

- neste caso, $Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) \cdot H(e^{j\omega})$
- combinando esta expressão c/a anterior, vemos que $Y(j\Omega) = H_{FPB}(j\Omega) \cdot H(e^{j\Omega T_s}) X(e^{j\Omega T_s})$

Substituindo a expressão de $X(e^{j\omega})$, temos

$$Y(j\Omega) = H_{FPB}(j\Omega)\, H(e^{j\Omega T_s}) \cdot \left[1/T_s \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(j(\Omega - 2\pi k/T_s)) \right]$$

- se $x(t)$ tem banda limitada, de modo que $X(j\Omega) = 0$ para $|\Omega| > \Omega_s/2$, então o filtro "ideal" de reconstrução cancela o fator $1/T_s$ e seleciona somente a componente p/ $k=0$ da equação acima. Ou seja, $Y(j\Omega) = \begin{cases} H(e^{j\Omega T_s}) X(j\Omega), & |\Omega| < \Omega_s/2 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$

Sendo assim,

$$Y(j\Omega) = H_{efetivo}(j\Omega) \cdot X(j\Omega), \text{ onde } H_{efetivo}(j\Omega) = \begin{cases} H(e^{j\Omega T_s}), & |\Omega| < \Omega_s/2 \\ 0, & \text{c.c} \end{cases}$$

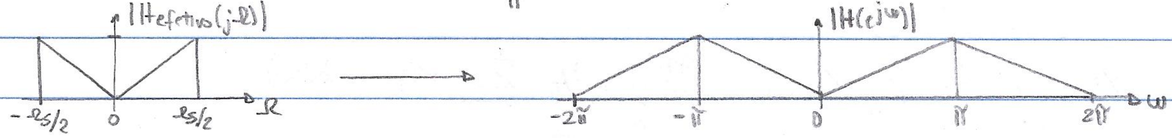
⇨ Isto significa que o sistema inteiro - que inclui uma passagem ao domínio discreto - é equivalente a um sistema LTI cuja resposta em frequência efetiva é dada acima. A importância do processo de amostragem e desta equivalência deve ser ressaltada: é possível obter sinais analógicos de interesse (e.g., a derivada de $x(t)$) por meio do processamento a tempo discreto de amostras do sinal de entrada.

EXEMPLO: SISTEMA DIFERENCIADOR - $y(t) = d/dt\, x(t)$

- Por Fourier, sabemos que $H(j\Omega) = j\Omega$.
- Supondo sinais de banda estreita, $H_{efetivo}(j\Omega) = \begin{cases} j\Omega, & |\Omega| < \Omega_s/2 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$

O sistema discreto equivalente seria

$$H(e^{j\omega}) = j\omega/T_s, \quad |\omega| < \underbrace{\frac{\Omega_s}{2} \cdot T_s}_{\pi}$$ e é periódica c/ período 2π.



A resposta ao impulso será $h[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (j\omega/T_s) \cdot e^{j\omega n}\, d\omega = \frac{\pi n \cos \pi n - \operatorname{sen} \pi n}{\pi n^2 T_s}$, $-\infty < n < \infty$, ou

$$h[n] = \begin{cases} 0, & n = 0 \\ \frac{\cos \pi n}{n T_s}, & n \neq 0 \end{cases}$$

↳ é possível estabelecer uma relação entre a resposta ao impulso do filtro analógico equivalente e aquela associada ao filtro discreto $h[n]$: $h[n] = T h(nT_s)$ Z esta invariância da resposta impulsiva dará origem a um método de projeto de filtros.

Perspectivas mais realistas de amostragem

⊛ Filtro anti-aliasing

• taxas de amostragem menores tendem a minimizar a carga de processamento computacional exigida – menos amostras têm de ser processadas.

• se a entrada não é limitada em banda (se o sinal tem duração finita no tempo, o espectro tende a ser infinito) ou a frequência de Nyquist seria muito elevada, pré-filtragem é importante.

• mesmo que o sinal seja limitado em banda, ruído aditivo de banda larga pode inserir conteúdo de alta frequência que, caso ignorado, produz aliasing. Tudo isto motiva o uso de um filtro anti-aliasing.

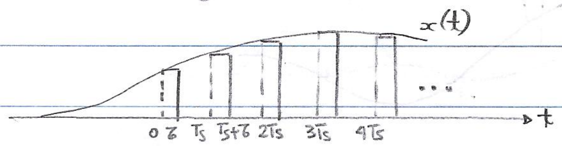
IDEAL: $H_{aa}(j\Omega) = \begin{cases} 1, & |\Omega| < \Omega_c < \Omega_s/2 \\ 0, & |\Omega| \geq \Omega_c \end{cases}$

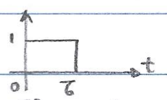
- exemplo: sinais de fala poderiam ser limitados (c/ perdas suportáveis) a 20 kHz.
- na prática, é bastante custoso preparar um filtro analógico ideal de anti-aliasing (pode ser não-causal, resposta de fase altamente não-linear) com uma transição quase instantânea entre banda de passagem e banda de rejeição.

INTERESSANTE: o projeto do filtro anti-aliasing pode ser facilitado se amostrarmos o sinal a uma taxa maior que a de Nyquist – oversampling.

- esta ideia, combinada com técnicas digitais de ajuste da taxa de amostragem (interpolação e decimação), permite que se trabalhe com o volume de dados desejado (i.e., c/ a taxa desejada) e que o filtro AA seja um pouco mais simples.

⊛ Segurador de ordem zero



Seja $h_0(t)$ 

. Podemos escrever o sinal amostrado como

$$x_{as}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_s) \cdot h_0(t-kT_s)$$

Contudo, $\sum_k h_0(t-kT_s) = h_0(t) * \sum_k \delta(t-kT_s)$. Então,

$$x_{as}(t) = h_0(t) * \underbrace{\sum_k x(kT_s)\,\delta(t-kT_s)}_{\text{amostragem ideal}} = h_0(t) * x_a(t)$$

No domínio da frequência, $X_{as}(j\Omega) = X_a(j\Omega) \cdot \mathcal{F}\{h_o(t)\} = X_a(j\Omega) \cdot \left[e^{-j\Omega\tau/2}\right] \cdot \tau Sa\left(\frac{\Omega\tau}{2}\right)$

- $X_{as}(j\Omega)$ é igual a $X_a(j\Omega)$, exceto pelo fator multiplicativo representado pelo sampling.
- $X_{as}(j\Omega)$ possui versões deslocadas de $X(j\Omega)$, mas não é periódico, pois cada componente é multiplicada por um ganho proporcional ao $Sa(\cdot)$.

Como recupero $x(t)$ a partir das amostras?

$x[n] \longrightarrow$ [SEGURADOR] $\xrightarrow{x_{as}(t)}$ [$h_{eq}(t)$] $\longrightarrow x(t)$

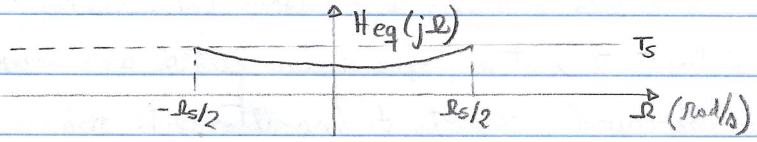
$X(j\Omega) = X_{as}(j\Omega) \cdot H_{eq}(j\Omega)$

$X(j\Omega) = \left[\frac{1}{T_s} \sum_k X(j(\Omega - k\,2\pi/T_s))\right] \cdot e^{-j\Omega\tau/2} \cdot Sa(\Omega\tau/2) \cdot H_{eq}(j\Omega)$

- devemos pegar a componente espectral centrada em $\Omega = 0$.
- porém, temos de corrigir o ganho do filtro p/ reverter o efeito do sampling.

Assim, $H_{eq}(j\Omega) = \dfrac{1}{e^{-j\Omega\tau/2}\,\tau Sa(\Omega\tau/2)} \cdot T_s \quad , |\Omega| < \Omega_s/2$

$\hookrightarrow$ poderia ser descartado, pois trata-se apenas de um atraso



Matematicamente, o conversor D/A é caracterizado por um pulso $h_p(t)$, de modo que

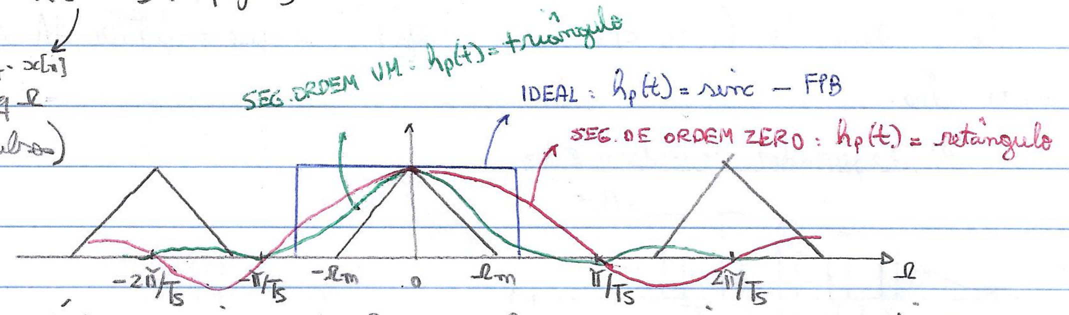
$x_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, h_p(t - nT_s)$.

$\downarrow \mathcal{F}$

$X_r(j\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \int_{-\infty}^{\infty} h_p(t - nT_s)\, e^{-j\Omega t}\, dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot e^{-j\Omega n T_s} \cdot H_p(j\Omega)$

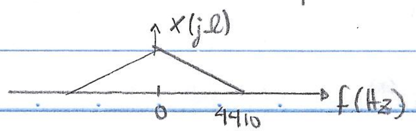
$= X(e^{j\Omega T_s}) \cdot H_p(j\Omega)$

é o espectro da seq. $x[n]$ ajustado p/ a freq. Ω (i.e., trem de impulsos)



Os pulsos práticos distorcem a faixa de freqs. de interesse e introduzem componentes de alta frequência.

(*) Voltando à questão de oversampling

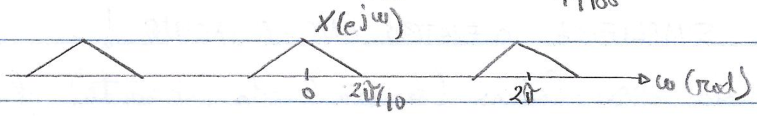


$x(t) \longrightarrow$ [A/D] $\xrightarrow{x[n]}$ [D/A] $\longrightarrow x_r(t)$

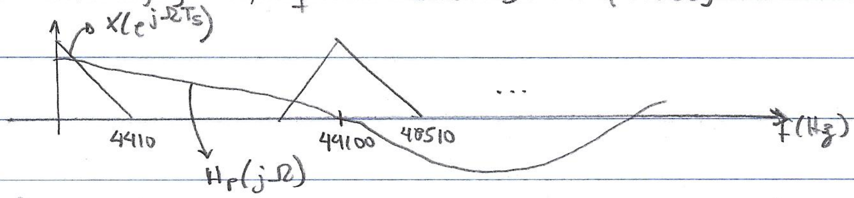
segurador de ordem zero

a) $f_s = 44100$ Hz

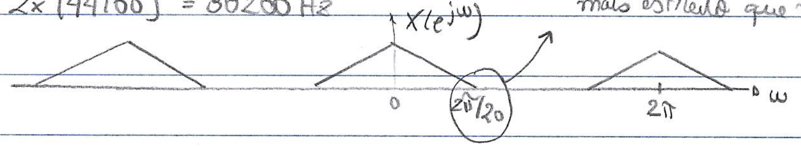
Pelo mapeamento de freqs, $\omega_{max} = \frac{4410 \cdot 2\pi}{44100} = 2\pi/10$



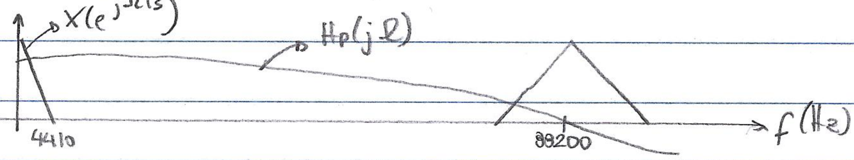
Na reconstrução, a freq. 2π vira $\Omega_s = 2\pi \cdot (44100)$.



b) $f_s = 2 \times (44100) = 88200$ Hz



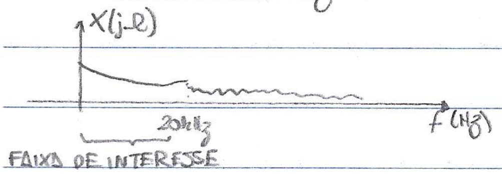
Na reconstrução, 2π vira $2\pi f_s = 88200 \cdot 2\pi$



OVERSAMPLING SIMPLIFICA A CONVERSÃO D/A!

- Menos distorções na faixa de frequências de interesse.
- Como não há conteúdo em torno de 44100 Hz, podemos usar um filtro passa-baixas mais simples após o conversor D/A.

E o anti-aliasing?

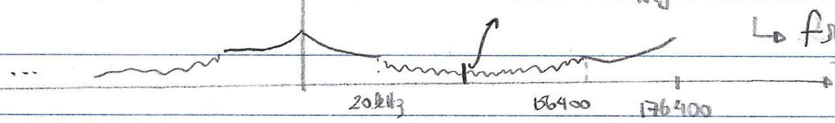


- se eu for amostrar a 40kHz, p/ não haver aliasing, o filtro anti-aliasing teria de ser IDEAL.

- se eu for amostrar a 176400 Hz

$176400 - f_{rej} = 20kHz$

↳ $f_{rej} = 156400$ Hz



P/ não acontecer aliasing na região de 20kHz, a cauda da réplica situada em 176400Hz não pode atingir 20kHz. Se usar um filtro anti-aliasing barato que deixe passar o conteúdo de $X(j\Omega)$ até 156400 Hz, ainda assim, ao efetuar a amostragem e, posteriormente, a recuperação, fica c/ a região de 0 a 20kHz intacta.

CONCLUSÃO: OVERSAMPLING SIMPLIFICA O FILTRO ANTI-ALIASING!

⇨ A amostragem de sinais passa-faixas (ou em banda passante) ficará como exercício p/ os alunos.