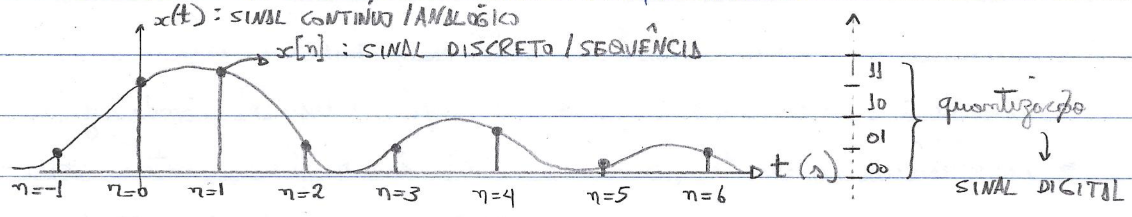
IE550 - Processamento Digital de Sinais

* Revisão: sinais e sistemas a tempo discreto



Vamos tratar essencialmente de sinais a tempo discreto, cujas amostras possuem amplitudes contínuas (i.e., com precisão ilimitada).

Alguns exemplos:

- impulso unitário: $\delta[n] = \begin{cases} 1, & n=0 \\ 0, & n\neq 0 \end{cases}$ — contraste com o delta de Dirac
- degrau unitário: $u[n] = \begin{cases} 1, & n\geq 0 \\ 0, & c.c \end{cases} \longrightarrow u[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} \delta[k]$
- exponencial complexa:

$$x[n] = e^{j\omega_0 n} \xrightarrow[\text{DE EULER}]{\text{FÓRMULA}} = \cos \omega_0 n + j \,\text{sen}\, \omega_0 n$$

PERIODICIDADE: $\exists N$ inteiro tal que $x[n] = x[n+N]$, $\forall n$.

- $e^{j\omega_0 n} = e^{j\omega_0 (N+n)} = e^{j\omega_0 N} e^{j\omega_0 n}$

$$\therefore \; e^{j\omega_0 N} = 1 \longrightarrow \omega_0 N = 2\pi k, \; \forall k \longrightarrow \underline{N = 2\pi k / \omega_0} \text{ (inteiro)}$$

A sequência exponencial complexa nem sempre será periódica com respeito a n.

- $e^{j(\omega_0 + 2\pi k)n} = e^{j\omega_0 n} \cdot \cancel{e^{j2\pi k n}}^{\,=1} = e^{j\omega_0 n}$

A sequência exponencial complexa é periódica com respeito a ω_0 com período 2π.

$$\Rightarrow \quad \omega_0 N = 2\pi k \longrightarrow \omega_0 = \frac{2\pi k}{N} \qquad k = 0, \dots, N-1$$

Como freqs. afastadas de 2π são equivalentes, o índice k percorre um conjunto de N valores diferentes apenas $\Rightarrow$ Isto quer dizer que existem somente N exponenciais complexas (ou seja, N frequências ω_0) que são distinguíveis e que possuem período N.

↳ sem perda de generalidade, podemos restringir ω_0 ao intervalo $0 \leq \omega_0 \leq 2\pi$ ou $-\pi \leq \omega_0 \leq \pi$.

⊛ SISTEMAS DISCRETOS NO TEMPO

$$x[n] \longrightarrow \boxed{T\{\cdot\}} \longrightarrow y[n] = T\{x[n]\}$$

REV 0

Exemplo: sistema atrasador $- \; y[n] = x[n-n_0]$

CARACTERIZAÇÃO:

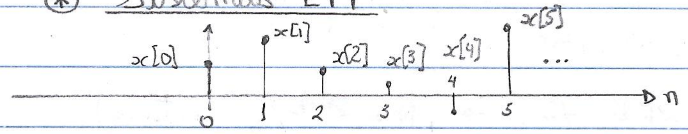
- Sem memória: a saída no instante n depende da entrada no instante n; se amostras passadas influenciarem a saída atual, o sistema possui memória.
- linear: $ax_1[n] + bx_2[n] \longleftrightarrow ay_1[n] + by_2[n]$, onde $y_1[n] = T\{x_1[n]\}$ e $y_2[n] = T\{x_2$
- invariância com o tempo: se $x[n] \longleftrightarrow y[n]$, então $x[n-n_0] = y[n-n_0]$
- causalidade: a saída em um instante n_0 depende da entrada em valores $n \leq n_0$.
- estabilidade (BIBO): toda sequência limitada em amplitude produz uma sequência limitada.

↳ $|x[n]| \leq B_x < \infty$ - para todo n, a amplitude da entrada é limitada.

Se $|y[n]| \leq B_y < \infty$ para todo n (em resposta à entrada $x[n]$), então o sistema é estável (e isto deve valer para qualquer $x[n]$).

⇒ Um caso particular de grande importância de sistema discreto está associado à classe de sistemas lineares e invariantes com o tempo.

⊛ Sistemas LIT



Qualquer sequência $x[n]$ pode ser escrita em função do impulso unitário:

$$x[n] = \dots + x[-1]\,\delta[n+1] + x[0]\,\delta[0] + x[1]\,\delta[1] + x[2]\,\delta[2] + \dots$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\,\delta[n-k]$$

Suponha um sistema discreto que produza a sequência $h[n]$ na saída ao receber $\delta[n]$ (impulso unitário) na entrada.

$$\delta[n] \longleftrightarrow h[n]$$

Se o sistema é linear, $\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\,\delta[n-k]$ produzirá $\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\,T\{\delta[n-k]\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\,h_k[n]$.

Sendo também invariante com o tempo, sabemos que $\delta[n-k] \longleftrightarrow h[n-k]$.

Assim, $h_k[n] = T\{\delta[n-k]\} = h[n-k]$ e, com isto, a saída $y[n]$ pode ser escrita como:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\,h[n-k] = x[n] * h[n]$$

- $h[n]$ é a resposta ao impulso do sistema e $*$ representa a operação de convolução.

REV 2

Isto quer dizer que o comportamento de um sistema linear e invariante com o tempo é única e perfeitamente descrito por sua resposta ao impulso $h[n]$.

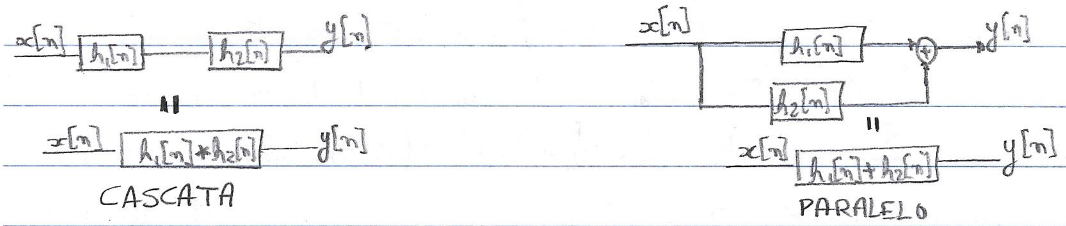
• convolução é comutativa

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\, h[n-k] = \sum_{k=\infty}^{-\infty} x[k]\, h[n-k] = \underset{m=-k}{\sum_{m=-\infty}^{\infty}} x[-m]\, h[n+m] = \underset{k=n+m}{\sum_{k=-\infty}^{\infty}} x[n-k]\, h[k]$$

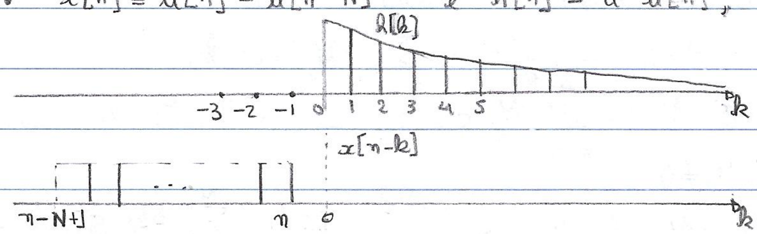
$$\downarrow$$

$$y[n] = x[n] * h[n] = h[n] * x[n]$$

• Combinação de sistemas



Exemplo: $x[n] = u[n] - u[n-N]$ e $h[n] = a^n u[n]$, $0 < a < 1$



$$y[n] = \begin{cases} 0, \quad \text{para } n < 0 & \text{REGIÃO 1} \\ \sum_{k=0}^{n} h[k], \quad \text{para } 0 \leq n \leq N-1 & \text{REGIÃO 2} \\ \sum_{n-N+1}^{n} h[k], \quad \text{para } n > N-1 & \text{REGIÃO 3} \end{cases}$$

REGIÃO 2: $$\sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{1 - a^n \cdot a}{1-a} = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$$

REGIÃO 3: $$\sum_{k=n-N+1}^{n} a^k = \frac{a^{n-N+1} - a^n \cdot a}{1-a} = \frac{a^n\left(a^{-N+1} - a\right)}{1-a} = \frac{a^n\left(a^{-N} - 1\right)}{1/a - 1} = \frac{a^n\left(1 - a^{-N}\right)}{1 - a^{-1}}$$

Para sistemas LIT, a verificação de causalidade e estabilidade é feita tendo como base a resposta ao impulso $h[n]$.

• Causalidade: $y[n] = \sum_k h[k]\, x[n-k] = \ldots + h[-1]x[n+1] + h[0]x[n] + h[1]x[n-1] + \ldots$

- como $y[n]$ só pode depender de $x[n]$ nos instantes $n' \leq n$, ou seja, em $n, n-1, n-2, \ldots$, os valores de $h[-1], h[-2], \ldots$, têm de ser nulos. Em outras palavras, $h[n] = 0$ para $n < 0$ garante causalidade.

• estabilidade

/ /

$|y[n]| = |\sum_k h[k]x[n-k]| \leqslant \sum_k |h[k]||x[n-k]|$

Se a entrada é limitada, $|x[n]| < B_x$ para $\forall n$. Então, $|x[n-k]| < B_x$

É correto, então, afirmar que $|y[n]| \leqslant \sum_k |h[k]||x[n-k]| < \sum_k |h[k]| B_x$

$B_x \sum_k |h[k]|$ será limitado (e, portanto, menor que infinito) se $\sum_k |h[k]| < \infty$

$\Rightarrow$ O sistema LIT será estável (no sentido BIBO) se houver um limitante B_h tal que $\sum_k |h[k]| \leqslant B_h < \infty$.

⊛ EQUAÇÃO DE DIFERENÇAS

• uma classe importante de sistemas LIT consiste daqueles para os quais a entrada $x[n]$ e a saída $y[n]$ satisfazem uma equação de diferenças com coeficientes constantes na forma $\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$. (∴, transformada Z racional).

• uma equação de diferenças identifica unicamente um sistema desde que informações adicionais – causalidade e condições iniciais nulas – sejam consideradas.

→ SISTEMAS FIR: $N=0$ — $y[n] = \sum_{k=0}^{M} b_k/a_0 \, x[n-k]$

A resposta ao impulso será $h[n] = \sum_{k=0}^{M} b_k/a_0 \, \delta[n-k]$ — nº finito de coeficientes

→ SISTEMAS IIR: $N \neq 0$

$y[n] = \sum_{k=0}^{M} b_k/a_0 \, x[n-k] - \sum_{k=1}^{N} a_k/a_0 \, y[n-k] \xRightarrow{p/\, x[n]=\delta[n]} h[n] = \sum_{k=0}^{M} b_k/a_0 \, \delta[n-k] - \sum_{k=1}^{N} a_k/a_0 \, h[n-k]$

Por causa da recursão em $h[n-k]$, a resposta ao impulso $h[n]$ terá comprimento infinito

⊛ REPRESENTAÇÃO NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA

• é possível derivar a expressão da representação em frequência de uma sequência $x[n]$ a partir de uma generalização da série de Fourier ou através da relação de $x[n]$ com um sinal contínuo/analógico via amostragem.

$$\mathcal{F}\{x[n]\} = X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n} \quad , \omega = \text{freq. (rad)}$$

SISTEMA LIT: $y[n] = x[n] * h[n]$

• se a entrada é $x[n] = e^{j\omega n}$, $y[n] = \sum_k h[k] e^{j\omega(n-k)} = e^{j\omega n} \sum_k h[k] e^{-j\omega k} = e^{j\omega n} H(e^{j\omega})$

• $H(e^{j\omega})$ é a resposta em frequência do sistema

PERIODICIDADE DE $X(e^{j\omega})$:

• consequência da periodicidade das exponenciais complexas $e^{j\omega n}$ (período 2π) c/ respeito a ω. Também pode ser vista como fruto da replicação espectral produzida pela amostragem.

REV ④

$$X(e^{j(\omega+2\pi k)}) = \sum_n x[n]\, e^{-j(\omega+2\pi k)n} = \sum_n x[n]\, e^{-j\omega n} \cdot \cancel{e^{-j2\pi k n}}^{\,1} = X(e^{j\omega}).$$

Por isso, basta apresentarmos o conteúdo em frequência dentro de qualquer intervalo de duração 2π (e.g., $-\pi$ a π) p/ caracterizar $X(e^{j\omega})$.

TRANSFORMADA INVERSA : $x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})\, e^{j\omega n}\, d\omega$

PROPRIEDADES IMPORTANTES :

- atraso no tempo : $x[n-n_0] \longleftrightarrow e^{-j\omega n_0} X(e^{j\omega})$
- convolução no tempo : $x[n] * y[n] \longleftrightarrow X(e^{j\omega})\, Y(e^{j\omega})$

$$\mathcal{F}\{x[n]*y[n]\} = \sum_n (x[n]*y[n])\, e^{-j\omega n} = \sum_n \left\{ \sum_k x[k]\, y[n-k] \right\} e^{-j\omega n}$$
$$= \sum_k x[k] \sum_n y[n-k]\, e^{-j\omega n}$$
$$= \sum_k x[k] \sum_m y[m]\, e^{-j\omega(m+k)} = \sum_k x[k] \left(\sum_m y[m]\, e^{-j\omega m} \right) e^{-j\omega k}$$
$$= Y(e^{j\omega}) \cdot \sum_k x[k]\, e^{-j\omega k} = \underline{Y(e^{j\omega})\, X(e^{j\omega})}$$

- produto no tempo : $x[n]\, y[n] \longleftrightarrow \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\theta})\, Y(e^{j(\omega-\theta)})\, d\theta$ convolução periódica

$$\mathcal{F}\{x[n]y[n]\} = \sum_n x[n]\, y[n]\, e^{-j\omega n} = \sum_n x[n] \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} Y(e^{j\theta})\, e^{j\theta n}\, d\theta \right) e^{-j\omega n}$$
$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} Y(e^{j\theta}) \left[\sum_n x[n]\, e^{-j(\omega-\theta)n} \right] d\theta$$
$$= \underline{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} Y(e^{j\theta})\, X(e^{j(\omega-\theta)})\, d\theta}$$

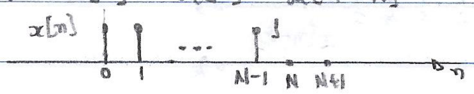
- sinal periódico

$x[n]$ pode ser representado por sua série de Fourier : $\sum a_k\, e^{j\omega_k n}$, em que os coeficientes a_k são obtidos através da expressão $a_k = \frac{1}{N} \sum_{\langle N \rangle} x[n]\, e^{-j\omega n} \Big|_{\omega = \frac{2\pi}{N}k}$

(são amostras da transf. de Fourier de um período da sequência $x[n]$ nas freqs. $\frac{2\pi}{N}k$)

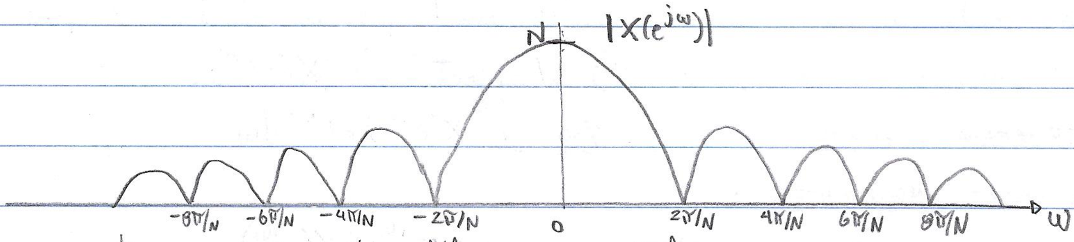
$$\mathcal{F}\{x[n]\} = \mathcal{F}\left\{ \sum_k a_k\, e^{j\omega_k n} \right\} = \sum_{r=-\infty}^{\infty} \sum_k 2\pi a_k\, \delta(\omega - \omega_k + 2\pi r) \quad //$$

Exemplo : $x[n] = u[n] - u[n-N]$



$$\mathcal{F}\{x[n]\} = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j\omega n} = \frac{1 - e^{-j\omega(N-1)} \cdot e^{-j\omega}}{1 - e^{-j\omega}} = \frac{1 - e^{-j\omega N}}{1 - e^{-j\omega}} = \frac{e^{-j\omega N/2} \left(e^{j\omega N/2} - e^{-j\omega N/2} \right)}{e^{-j\omega/2} \left(e^{j\omega/2} - e^{-j\omega/2} \right)}$$
$$= e^{-j\omega(N-1)/2} \cdot \frac{\operatorname{sen} \omega N/2}{\operatorname{sen} \omega/2}$$

Assim, $|X(e^{j\omega})| = \left|\dfrac{\text{sen}\, \omega N/2}{\text{sen}\, \omega/2}\right|$ e $\text{Arg}(X(e^{j\omega})) = \angle X(e^{j\omega}) = \underbrace{-\omega(N-1)/2}_{\text{fase linear}} + \underbrace{\text{Arg}\left\{\dfrac{\text{sen}\, \omega N/2}{\text{sen}\, \omega/2}\right\}}_{\{0,\pi\}}$



• cruzamento em zero: $\omega N/2 = \pi k \rightarrow \omega = 2\pi k/N$