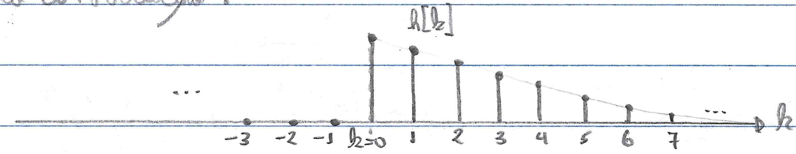
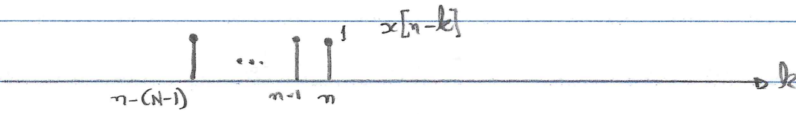
IE550 - Processamento Digital de Sinais

Calcule a saída do sistema, cuja resposta ao impulso é $h[n] = a^n u[n]$, $0<a<1$, à entrada $x[n] = u[n] - u[n-N]$.

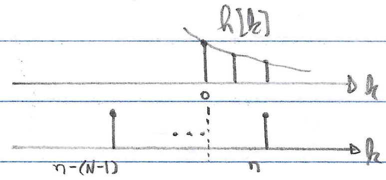
⊛ 1ª abordagem : vamos manter $h[k]$ fixo e deslocar $x[n-k]$ durante o cálculo da convolução.





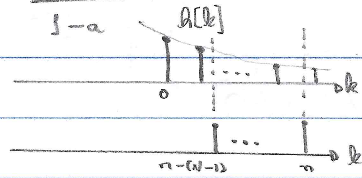
A saída $y[n]$ resulta da soma de todos os valores da sequência gerada pelo produto de $h[k]$ e $x[n-k]$.

- se $n<0$, não há interseção entre $h[k]$ e $x[n-k]$ $\Rightarrow$ $h[k]\cdot x[n-k] = 0$ e $y[n] = 0$.



- para $0 \leq n \leq N-1$,

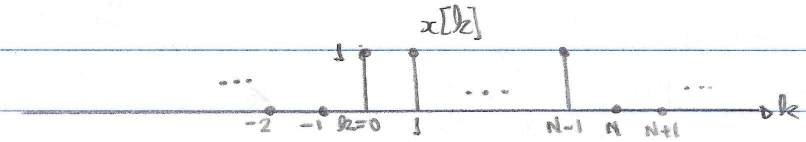
$$y[n] = \sum_{k=0}^{n} h[k].\cancel{x[n-k]}^{1} = \sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$$

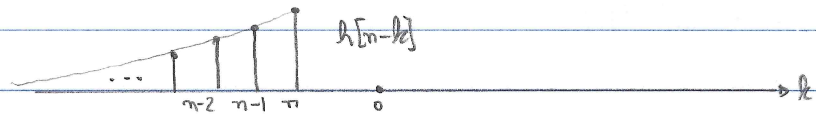


- para $n > N-1$,

$$y[n] = \sum_{k=n-(N-1)}^{n} h[k]\cancel{x[n-k]}^{1} = \sum_{k=n-(N-1)}^{n} a^k = \frac{a^{n-(N-1)} - a^n \cdot a}{1-a} = \frac{a^n\left(a^{-(N-1)} - a\right)}{1-a} = \frac{a^n\left(1-a^{-N}\right)}{1-a^{-1}}$$

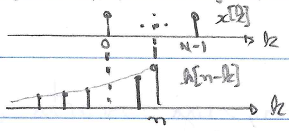
⊛ 2ª abordagem : vamos manter $x[k]$ fixo e deslocar $h[n-k]$ durante o cálculo da convolução.





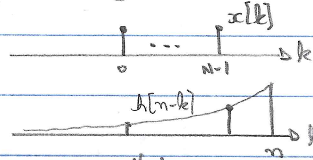
Há três casos para analisar :

- se $n<0$, não há interseção entre $x[k]$ e $h[n-k] \Rightarrow y[n]=0$
- para $0 \leq n \leq N-1$,



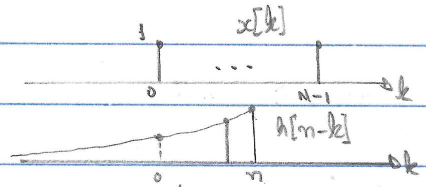
$$y[n] = \sum_{k=0}^{n} \cancel{x[k]}^{\,1}\, h[n-k] = \sum_{k=0}^{n} a^{n-k} = a^{n} \cdot \sum_{k=0}^{n} (a^{-1})^{k} = a^{n} \cdot \frac{\left(1-a^{-(n+1)}\right)}{1-a^{-1}} = \frac{a^{n}-a^{-1}}{1-a^{-1}} \cdot \frac{x(-a)}{x(-a)} = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$$

- para $n > N-1$,



$$y[n] = \sum_{k=0}^{N-1} \cancel{x[k]}^{\,1}\, h[n-k] = \sum_{k=0}^{N-1} a^{n-k} = a^{n} \cdot \sum_{k=0}^{N-1} (a^{-1})^{k} = a^{n} \cdot \frac{\left(1-a^{-(N-1)} \cdot a^{-1}\right)}{1-a^{-1}} = \frac{a^{n}\left(1-a^{-N}\right)}{1-a^{-1}}$$

Observe que chegamos aos mesmos resultados fazendo o deslocamento em $h[k]$ e em $x[k]$. Isto é consequência do fato de a convolução ser comutativa. Esta equivalência pode ser conferida da seguinte forma:



$$\sum_{k=0}^{n} h[n-k]$$

São equivalentes? $\sum_{k=0}^{n} h[n-k] = \sum_{k=n} h[n-k]$

Fazendo $m = n-k$,

$$\sum_{m=n-n}^{m=n-0} h[m] = \sum_{m=0}^{n} h[m]$$

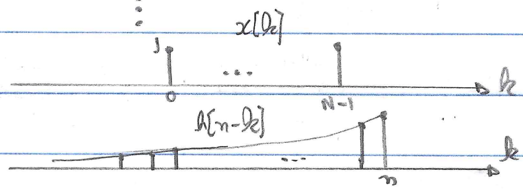
Quais são os valores de $h[k]$ que entram no somatório?

- $n=0$: $h[0]$
- $n=1$: $h[0]+h[1]$
- $n=2$: $h[2]+h[1]+h[0]$

$$\sum_{k=0}^{n} h[k]$$

Os dois caminhos são equivalentes

⋮



$$\sum_{k=0}^{N-1} h[n-k] = \sum_{k=N-1}^{k=0} h[n-k] \overset{m=n-k}{=} \sum_{m=n-(N-1)}^{n} h[m]$$

Quais são os valores de $h[k]$ que participam do somatório?

- $n=N$: $h[1]+\ldots+h[N]$
- $n=N+1$: $h[2]+\ldots+h[N+1]$
- $n=N+2$: $h[3]+\ldots+h[N+2]$

⋮

$$\sum_{k=n-(N-1)}^{n} h[k]$$

Também são equivalentes