UNICAMP

IA 881 Otimização Linear

3-Método Simplex

Conteúdo

1-Condições de otimalidade

$$\begin{aligned} &\min \mathbf{c}'\mathbf{x} \\ &\text{sa} \quad \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ &\qquad\ \ \mathbf{x} \geq 0 \end{aligned}$$

Forma padrão

$$j = 1,\cdots,n \qquad \mathbf{c} = (c_1,\cdots,c_n)$$

$$i = 1,\cdots,m \qquad \mathbf{b} = (b_1,\cdots,b_m)$$

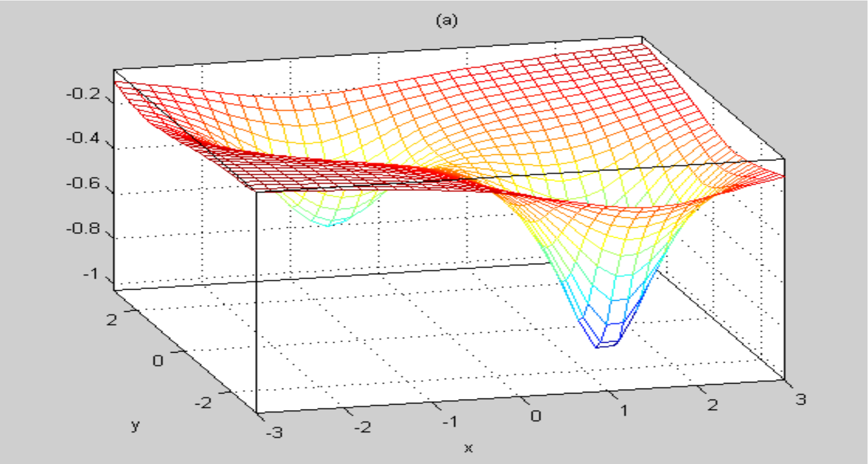
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1' \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = [\mathbf{A}_1 \quad \cdots \quad \mathbf{A}_n],\ \rho(\mathbf{A}) = m$$

$$P = \{\mathbf{x} \in \Re^n \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geq 0\}$$

Algoritmo de busca local

- vizinhança: é uma função $V : S \rightarrow 2^S$ que atribui a cada $s \in S$ um conjunto de vizinhos $V(s) \subseteq S$ chamado de vizinhança de s.

- mínimo local: de f com relação a uma vizinhança $V(s)$ é uma solução s^* tal que $f(s^*) \leq f(s)$, $\forall s \in V(s^*)$.



AlgoritmoBuscaLocal( ) **retorna** um ótimo local

entrada: um modelo de otimização

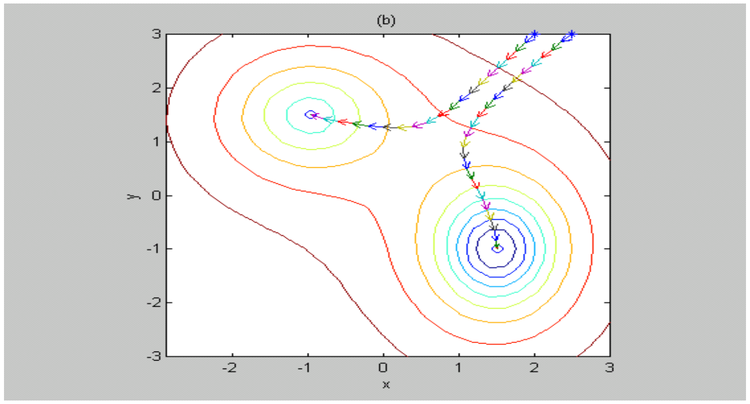
$s \leftarrow$ GerarSoluçãoFactívelInicial( )

repetir

$s \leftarrow$ Melhorar($V(s)$)

até que melhorar $f(s)$ não seja possível

retornar s



- Melhorar($V(s)$) são funções do tipo:

1. retorna a primeira solução encontrada que é melhor do que s,
2. explora $N(s)$ exaustivamente e retorna a melhor solução,
3. combinações de (1) e (2).

Programação linear

- Ótimo local é ótimo global: função convexa sobre conjunto convexo
- Busca ao longo de direções que decrescem o valor da função objetivo
- Considera vizinhanças de soluções básicas factíveis

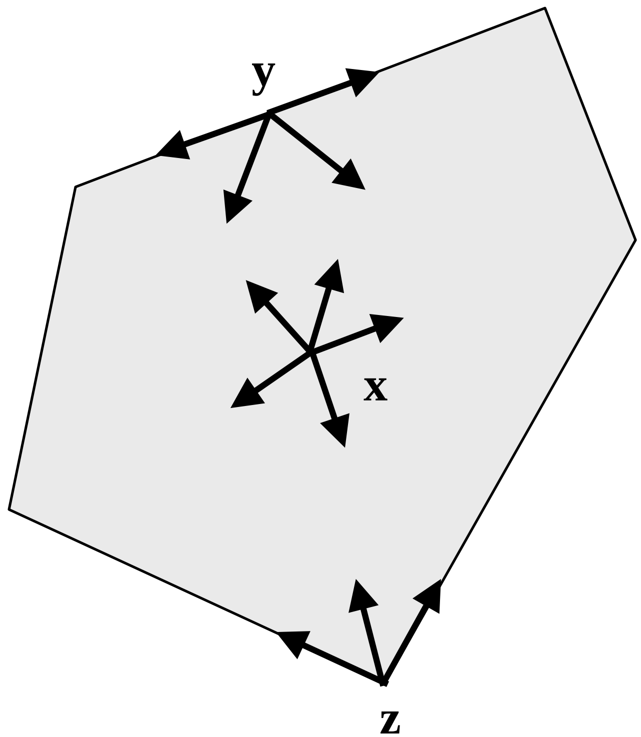
Seja

$\mathbf{x} \in P$

$\mathbf{d} \in \Re^n$

Definição 3.1 Seja $\mathbf{x}$ um elemento de um poliedro P. Um vetor $\mathbf{d} \in \Re^n$ é uma direção factível em $\mathbf{x}$ se existe um escalar positivo θ para o qual $\mathbf{x} + \theta \mathbf{d} \in P$.

Direções factíveis em diferentes pontos de um poliedro



- Considerando

$\mathbf{x}$ solução básica factível

$B(1),\ldots,B(m)$ índices das variáveis básicas

$\mathbf{B} = [\mathbf{A}_{B(1)} \cdots \mathbf{A}_{B(m)}]$ matriz básica

$\mathbf{x}_B = (x_{B(1)},\ldots,x_{B(m)})$ variáveis básicas

$x_i = 0$ para toda variável não básica

- Temos $\mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\,\mathbf{b}$

- Busca de um novo vetor $\mathbf{x} + \theta\,\mathbf{d}$

1. selecionar uma variável não básica x_j (inicialmente $x_j = 0$)
2. aumentar valor de x_j até um valor $\theta > 0$, mantndo as variáveis não básicas x_i, $i \neq j$, restantes nulas.

- Algebricamente

$d_j = 1$
$d_i = 0 \ \forall i \in N,\ \ i \neq j$ (N é o conjunto de índices das variáveis não básicas)

$\mathbf{x}_B + \theta\,\mathbf{d}_B$

$\mathbf{d}_B = (d_{B(1)}, \ldots, d_{B(m)})$

- Restrições de igualdade: $\mathbf{x} + \theta\,\mathbf{d}$ factível

$\mathbf{A}(\mathbf{x} + \theta\,\mathbf{d}) = \mathbf{b}$

$\mathbf{x}$ é factível $\Rightarrow \mathbf{Ax} = \mathbf{b}$

$\theta > 0 \Rightarrow \mathbf{Ad} = 0$

como $d_j = 1$ e $d_i = 0 \ \forall i \in N,\ \ i \neq j$

j-ésima direção básica
ou
direção simplex

$$0 = \mathbf{Ad} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{A}_i d_i = \sum_{i=1}^{m} \mathbf{A}_{B(i)} d_{B(i)} + \mathbf{A}_j = \mathbf{Bd}_B + \mathbf{A}_j \Rightarrow \boxed{\mathbf{d}_B = -\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_j}$$

- Restrições de não negatividade de variáveis não básicas

$x_j \rightarrow \theta > 0$
$x_i = 0 \ \forall i \in N, \ \ i \neq j$

$\therefore$ variáveis não básicas OK

- Restrições de não negatividade de variáveis básicas: dois casos

1. $\mathbf{x}$ não é solução básica factível degenerada

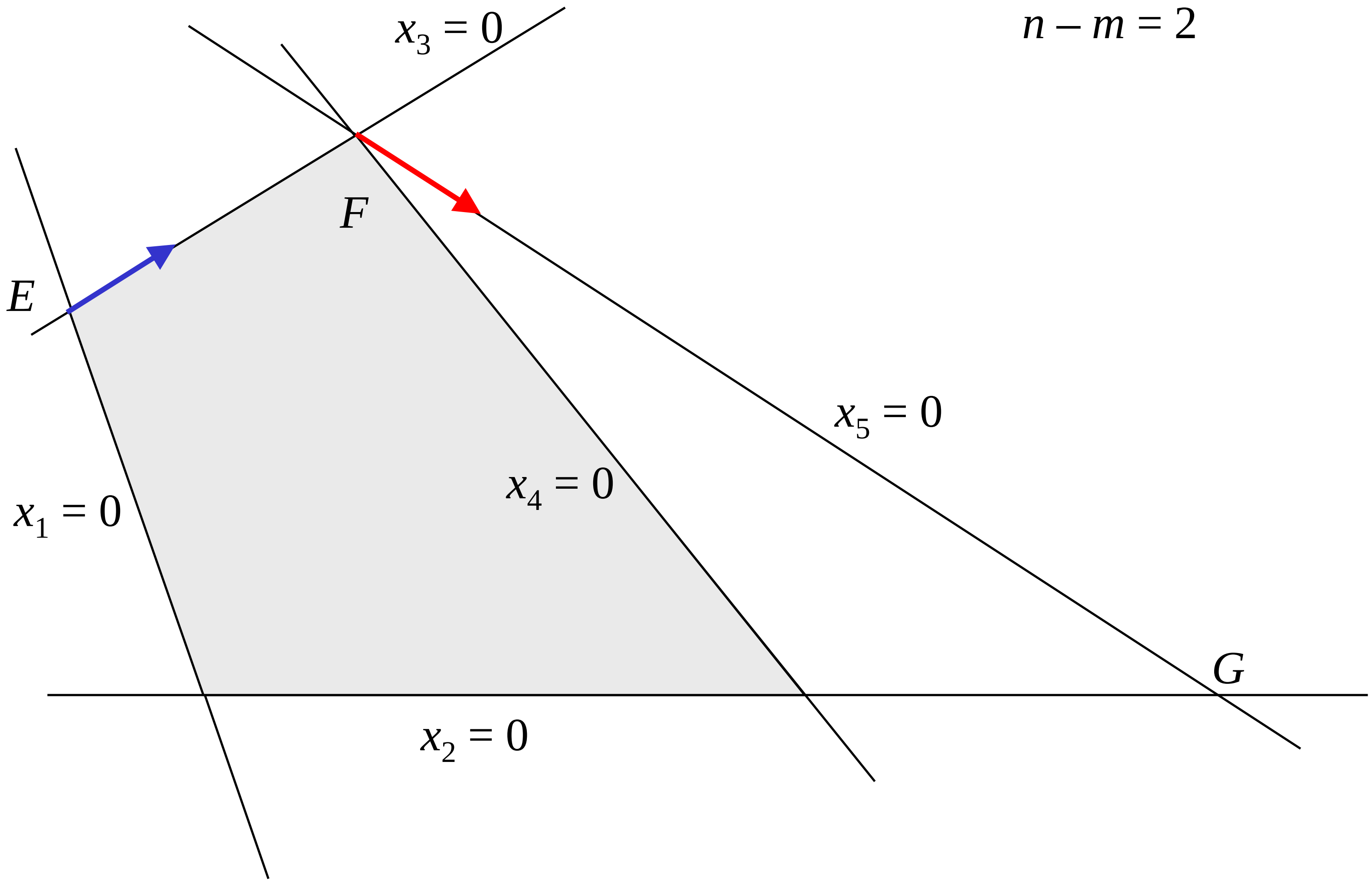
$\mathbf{x}_B > 0 \Rightarrow \mathbf{x}_B + \theta\,\mathbf{d}_B > 0$ para θ suficientemente pequeno $\mathbf{d}$ é uma direção factível

2. $\mathbf{x}$ **é** solução básica factível degenerada

$\mathbf{d}$ nem sempre é uma direção factível

$x_{B(i)} = 0$ e $\mathbf{d}_B = -\,\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_j < 0$

$n = 5$
$n - m = 2$



- Efeito da busca na direção básica sobre função objetivo

$\mathbf{d} \rightarrow$ j-ésima direção básica

$\mathbf{c}'\mathbf{d} \rightarrow$ variação do valor da função objetivo ao longo de $\mathbf{d}$

$\mathbf{c}'\mathbf{d} = \mathbf{c}'_B\,\mathbf{d}_B + c_j = c_j - \mathbf{c}'_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_j$ $\qquad$ $\mathbf{c}_B = (c_{B(1)}, \ldots, c_{B(m)})$

$$\bar{c}_j = c_j - \mathbf{c}'_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_j$$

Definição 3.2 Seja $\mathbf{x}$ uma solução básica, $\mathbf{B}$ uma matriz básica associada e $\mathbf{c}_B$ o vetor de coeficientes associado às variáveis básicas. Para cada j, definimos o custo reduzido $\bar{c}_j$ da variável x_j pela fórmula

$$\bar{c}_j = c_j - \mathbf{c}'_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_j$$

Exemplo

$$\begin{aligned} \min \quad & c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + c_4x_4 \\ \text{sa} \quad & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2 \\ & 2x_1 + 3x_3 + 4x_4 = 2 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

$\mathbf{A}_1 = (1, 2)$ $\mathbf{A}_2 = (1, 0)$ são LI $\Rightarrow$ x_1 e x_2 são variáveis básicas

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$ matriz básica correspondente às variáveis básicas x_1 e x_2

fazendo $x_3 = x_4 = 0 \Rightarrow x_1 = 1$ e $x_2 = 1$

direção $\mathbf{d}$ correspondente à variável não básica x_3 possui $d_3 = 1$ e $d_4 = 0$

$$\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{B(1)} \\ d_{B(2)} \end{bmatrix} = \mathbf{d}_B = -\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_3 = -\begin{bmatrix} 0 & 1/2 \\ 1 & -1/2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

- Custo reduzido das variáveis básicas

$\mathbf{B} = [\mathbf{A}_{B(1)},\ldots,\mathbf{A}_{B(m)}]$

$\mathbf{B}^{-1}[\mathbf{A}_{B(1)},\ldots,\mathbf{A}_{B(m)}] = \mathbf{I}, \quad \mathbf{I}\ (m \times m)$

$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_{B(i)} = \mathbf{e}_i$

portanto, para toda variável básica $x_{B(i)}$

$$\bar{c}_{B(i)} = c_{B(i)} - \mathbf{c}'_B \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}_{B(i)} = c_{B(i)} - \mathbf{c}'_B \mathbf{e}_i = c_{B(i)} - c_{B(i)} = 0$$

Teorema 3.1 Considere uma solução básica factível $\mathbf{x}$ associada com a matriz básica $\mathbf{B}$, e seja $\underline{\mathbf{c}}$ o vetor de custo reduzido correspondente.

(a) Se $\underline{\mathbf{c}} \geq 0$, então $\mathbf{x}$ uma é solução ótima.
(b) Se $\mathbf{x}$ é solução ótima não degenerada, então $\underline{\mathbf{c}} \geq 0$.

Prova:

(a) Seja $\bar{\mathbf{c}} \geq 0$ e $\mathbf{y}$ uma solução factível arbitrária. Definir $\mathbf{d} = \mathbf{y} - \mathbf{x}$.

Factibilidade $\Rightarrow$ $\mathbf{Ax} = \mathbf{Ay} = \mathbf{b}$. Logo $\mathbf{Ad} = 0$.

$$\mathbf{Ad} = \mathbf{Bd}_B + \sum_{i \in N} \mathbf{A}_i d_i = 0$$

$$\mathbf{d}_B = -\mathbf{B}^{-1} \sum_{i \in N} \mathbf{A}_i d_i = \sum_{i \in N} \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}_i d_i$$

$$\mathbf{c}'\mathbf{d} = \mathbf{c}'_B \mathbf{d}_B + \sum_{i \in N} c_i d_i = \sum_{i \in N} (c_i - \mathbf{c}'_B \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}_i) d_i = \sum_{i \in N} \bar{c}_i d_i$$

$x_i = 0\ \forall i \in N$, $\mathbf{y}$ factível $\Rightarrow$ $y_i \geq 0$. Logo $d_i \geq 0$ e $\bar{c}_i d_i \geq 0\ \forall i \in N$.

Concluimos que $\mathbf{c}'(\mathbf{y} - \mathbf{x}) = \mathbf{c}'\mathbf{d} \geq 0$ e como $\mathbf{y}$ é arbitrário, $\mathbf{x}$ é ótimo.

(b) Supor que $\mathbf{x}$ é uma solução básica factível não degenerada e $\underline{c}_j < 0$ para algum j. Como o custo reduzido de uma variável básica é nulo, x_j é não básica, e $\underline{c}_j$ é a variação do valor da função objetivo ao longo da j-ésima direção básica.

$\mathbf{x}$ não degenerada $\rightarrow$ j-ésima direção básica é factível e valor da função objetivo melhora ao longo desta direção

Movendo nesta direção obtemos soluções factíveis que são melhores que $\mathbf{x}$; portanto, $\mathbf{x}$ não pode ser solução ótima. ■

Definição 3.3 Uma matriz básica $\mathbf{B}$ é ótima se

(a) $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \geq 0$
(b) $\overline{\mathbf{c}}' = \mathbf{c}' - \mathbf{c}'_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A} \geq 0'$

2-Desenvolvimento do método simplex

AlgoritmoSimplexBásico( ) **retorna** uma solução ótima

entrada: um modelo linear de otimização

$\mathbf{x} \leftarrow$ GerarSoluçãoFactívelInicial( )

$\mathbf{c} \leftarrow$ CalcularCustoReduzido($\mathbf{c}$, $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$)

se $\underline{c}_j \geq 0\ \forall j \in \{1,\ldots,n\}$ **então retornar x**

senão

    repetir

        $d_j = 1,\ d_i = 0\ \forall i,j \neq \{B(1),\ldots,B(m)\},\ j \neq i$

        $\mathbf{d}_B = -\,\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_j$

        $\mathbf{x} \leftarrow \mathbf{x} + \theta\,\mathbf{d}$

    até que $\underline{c}_j \geq 0\ \forall j \in \{1,\ldots,n\}$

retornar x

Obs: supondo (a) minimização, (b) ∃ solução ótima, (c) toda solução básica factível é não degenerada

- Busca ao longo da direção $\mathbf{d}$: $\mathbf{x} + \theta\,\mathbf{d}$

  valor da função objetivo melhora ao longo da direção $\mathbf{d}$

  desejável mover (dar o maior passo) o máximo possível

$$\theta^* = \max\{\theta \geq 0 \mid \mathbf{x} + \theta\mathbf{d} \in P\}$$

- Variação da função objetivo

$$\theta^* \mathbf{c}'\mathbf{d} = \theta^* \bar{c}_j$$

- Obtenção de θ^*

$$\mathbf{Ad} = 0 \;\rightarrow\; \mathbf{A}(\mathbf{x} + \theta\mathbf{d}) = \mathbf{Ax} = \mathbf{b}\,,\ \forall\theta$$ restrições de igualdade nunca violadas

$\mathbf{x} + \theta\,\mathbf{d}$ infactível somente se uma de suas componentes torna-se negativa

- Dois casos a serem considerados

1. Se $\mathbf{d} \geq 0$, então $\mathbf{x} + \theta \mathbf{d} \geq 0 \;\; \forall \theta$: escolhemos $\theta^* = \infty$

2. Se $d_i < 0$ para algum i, então restrição $x_i + \theta d_i \geq 0$ torna-se $\theta \leq - x_i/d_i$

   como esta restrição tem que ser satisfeita para todo i com $d_i < 0$

   o maior valor de θ é:

$$\theta^* = \min_{\{i|d_i<0\}} \left(-\frac{x_i}{d_i} \right)$$

se x_i é uma variável não básica, então ou $d_i = 1$ ou $d_i = 0$

portanto, precisamos somente considerar as variáveis básicas

$$\theta^* = \min_{\{i=1,\dots,m|d_{B(i)}<0\}} \left(-\frac{x_{B(i)}}{d_{B(i)}} \right) \qquad (3.2)$$

$\theta^* > 0$, pois $x_{B(i)} > 0$ (não degenerada)

Exemplo

$$
\begin{array}{ll}
\min & c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + c_4x_4 \\
\text{sa} & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2 \\
 & 2x_1 \qquad + 3x_3 + 4x_4 = 2 \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0
\end{array}
$$

solução básica factível $\mathbf{x} = (1,1,0,0)$

custo reduzido para não básica x_3 : $\bar{c}_3 = c_3 - \mathbf{c}'_B \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}_3 = -3c_1/2 \_ c_2/2 + c_3$

supondo $\mathbf{c} = (2,0,0,0)$, $\bar{c}_3 = -3$

como $\bar{c}_3 < 0$, direção básica correspondente a x_3 : $\mathbf{d} = (-3/2, 1/2, 1, 0)$

componente que diminui é x_1 $(d_1 < 0)$

$$\theta^* = -\frac{x_1}{d_1} = \frac{2}{3}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{x} + \theta^* \mathbf{d} = \mathbf{x} + 2\mathbf{d}/3 = (0, 4/3, 2/3, 0)$$

Exemplo (cont.)

- colunas correspondentes às variáveis não nulas: $\mathbf{A}_2 = (1, 0)$, $\mathbf{A}_3 = (1, 3)$

  $\mathbf{A}_2$ e $\mathbf{A}_3$ são LI $\Rightarrow$ formam uma base

  $\mathbf{y}$ é a (nova) solução básica factível

- $x_1 = 0$ (sai da base)

  $x_3 = 2/3$ (entra na base)

- Uma vez escolhido θ^*, se este for finito movemos para $\mathbf{y} + \theta^*\mathbf{d}$

$x_j = 0$ e $d_j = 1 \;\Rightarrow\; y_j = \theta^* > 0$

- Seja l o índice minimizador em (3.2), isto é

$$\theta^* = \min_{\{i=1,\ldots,m \mid d_{B(i)}<0\}} \left(-\frac{x_{B(i)}}{d_{B(i)}} \right) = -\frac{x_{B(l)}}{d_{B(l)}}$$

- Em particular, temos que

$d_{B(l)} < 0$

$x_{B(l)} + \theta^* d_{B(l)} = 0$

- Observar que ocorre mudança de base pois

$x_j = 0 \;\rightarrow\; x_j > 0 \;\rightarrow\; x_j$ entra na base

$x_{B(l)} > 0 \rightarrow x_{B(l)} = 0 \rightarrow x_{B(l)}$ sai base da base

- Mudança de base

$$\overline{\mathbf{B}} = \lfloor \mathbf{A}_{B(1)} \quad \cdots \quad \mathbf{A}_{B(l-1)} \quad \mathbf{A}_j \quad \mathbf{A}_{B(l+1)} \quad \cdots \quad \mathbf{A}_{B(m)} \rfloor$$

$$\{B(1),\ldots,B(m)\} \rightarrow \{\overline{B}(1),\ldots,\overline{B}(m)\}$$

$$\overline{B}(i) = \begin{cases} B(i) & i \neq l \\ j & i = l \end{cases}$$

Teorema 3.2

(a) As colunas $\mathbf{A}_{B(i)}$, $i \neq l$, e $\mathbf{A}_j$ são LI e $\underline{\mathbf{B}}$ é uma matriz básica.
(b) O vetor $\mathbf{y} = \mathbf{x} + \theta^*\mathbf{d}$ é uma solução básica factível associada à $\underline{\mathbf{B}}$.

Prova:

(a) Se $\mathbf{A}_{\overline{B}(i)}, i = 1,\ldots,m,$ são LD, então $\exists \lambda_i$, não todos nulos, tal que

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \mathbf{A}_{\overline{B}(i)} = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_{\overline{B}(i)} = 0 \rightarrow \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_{\overline{B}(i)} \text{ também são LD.}$$

Contudo este não é o caso pois $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_{B(i)}, i \neq l$, e $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_j$ são LI.

$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{B} = \mathbf{I} \rightarrow \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_{B(i)} = \mathbf{e}_i, i \neq l$, exceto o $l-$ésimo vetor unitário.

$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_{B(i)}$ são LI e suas $l-$ésimas componentes são nulas.

$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_j = -\mathbf{d}_B$ e $d_{B(l)} \neq 0$ (definição de l).

Logo $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_j$ é LI dos vetores $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_{B(i)}, i \neq l$.

(b) Temos $\mathbf{y} \geq 0, \mathbf{A}\mathbf{y} = \mathbf{b}$ e $y_i = 0$ para $i \neq \overline{B}(1), \ldots, \overline{B}(m)$. $\mathbf{A}_{\overline{B}(1)}, \ldots, \mathbf{A}_{\overline{B}(m)}$ são LI. Logo $\mathbf{y}$ é solução básica factível associada à matriz básica $\overline{\mathbf{B}}$. ■

- Detalhes de uma iteração do método simplex

por conveniência (dos autores), seja $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_m)$

$\mathbf{u} \;=\; -\,\mathbf{d}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_j$

$\mathbf{A}_j$ = coluna de $\mathbf{A}$ que entra na base

$u_{\mathrm{i}} = -\,d_{B(i)}$

Uma iteração do método simplex

1. Iniciar com uma solução factível e a base $\mathbf{A}_{B(1)},\ldots,\mathbf{A}_{B(m)}$ associada.

2. Calcular o custo reduzido $\underline{c}_j = c_j - \mathbf{c'}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_j$, $\forall j \in N$
   se $\underline{c}_j \geq 0,\ \forall j \in N$, então a solução básica factível é ótima; fim.
   senão escolher algum j para o qual $\underline{c}_j < 0$.

3. Calcular $\mathbf{u} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_j$. Se $u_i \leq 0,\ i = 1,\ldots,m,$ então $\theta^* = \propto$ e o valor função da função objetivo é $-\propto$; fim.

4. Se alguma componente de $\mathbf{u}$ é positiva, fazer

$$\theta^* = \min_{\{i=1,\ldots,m \mid u_i > 0\}} \left(\frac{x_{B(i)}}{u_i} \right) = -\frac{x_{B(l)}}{d_{B(l)}}$$

5. Seja l tal que $\theta^* = x_{B(l)}/u_l$. Formar nova base trocando $\mathbf{A}_{B(l)}$ por $\mathbf{A}_j$
   Se $\mathbf{y}$ é a nova solução básica factível, então os valores das novas variáveis básicas são $y_j = \theta^*$ e $y_{B(i)} = x_{B(i)} - \theta^* u_i,\ i \neq l.$

Teorema 3.3 Suponha que o conjunto de soluções factíveis é não vazio e que toda solução factível básica é não degenerada. Então o método simplex termina depois de um número finito de iterações. No término existem as seguintes possibilidades:

(a) Temos uma base ótima $\mathbf{B}$ e uma solução básica factível que é ótima.
(b) Encontramos $\mathbf{d} \geq 0$ tal que $\mathbf{Ad} = 0$, $\mathbf{c}'\mathbf{d} < 0$, valor da função objetivo $-\infty$.

Prova: Se o algoritmo pára no passo 2, então Teor. 3.1 é satisfeito. **B** é uma base ótima e a solução básica factível corrente é ótima.

Se o algoritmo termina no passo 3, então θ é arbitrariamente grande e valor da função objetivo é $-\infty$.

A cada iteração o algoritmo move de uma quantidade $\theta^* > 0$ ao longo de uma direção $\mathbf{d}$ tal que $\mathbf{c}'\mathbf{d} < 0$. Logo o valor da função objetivo em cada solução básica diminui a cada iteração. Nenhuma solução básica factível é visitada mais do que uma vez. Como o número de soluções básicas factíveis é finito, o algoritmo para. ■

Método simplex para problemas degenerados

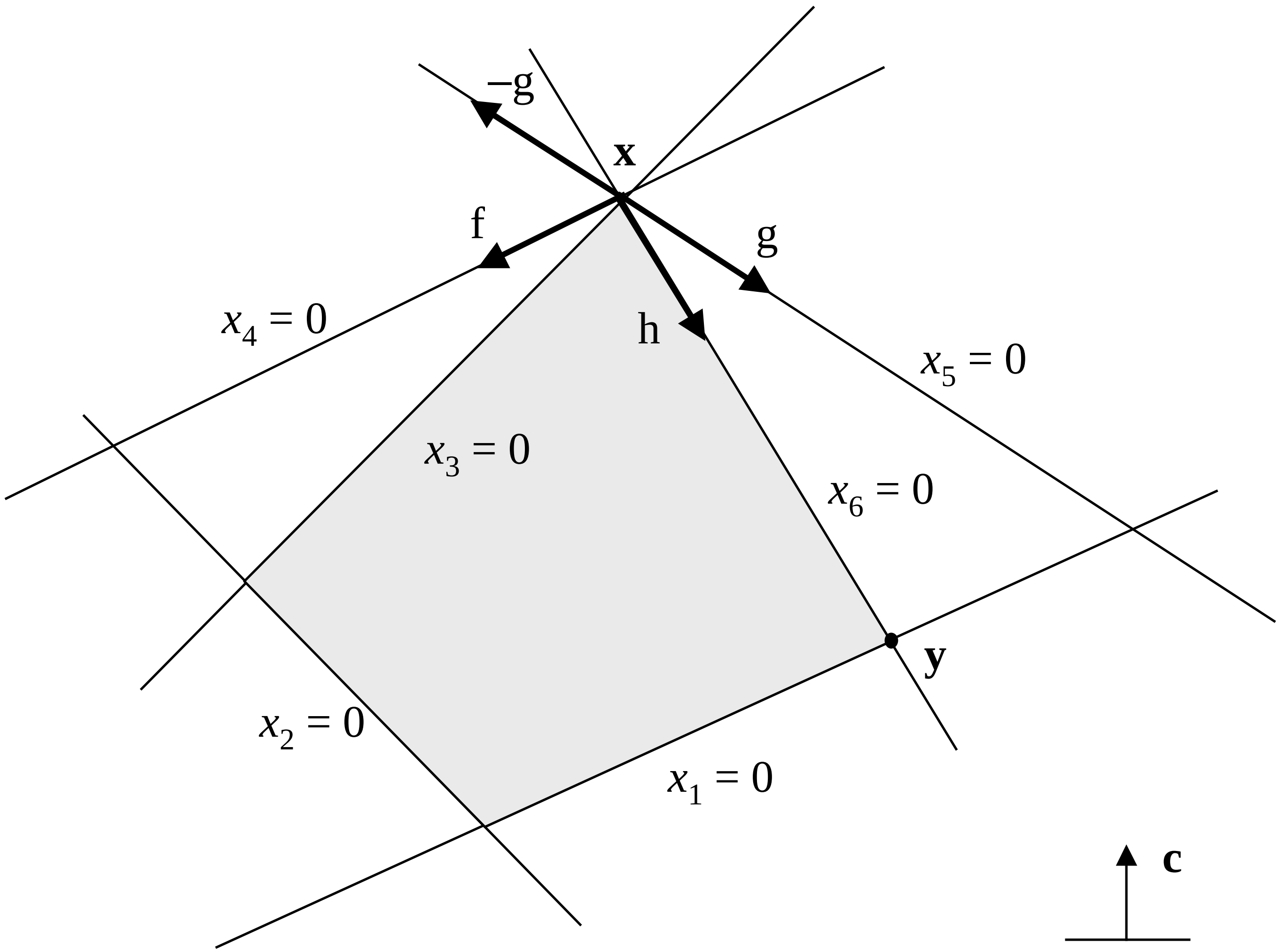
- Simplex para problemas degenerados: dois casos

1. Se solução básica factível corrente $\mathbf{x}$ é degenerada, então $\theta^* = 0$ e a nova solução factível básica $\mathbf{y}$ = $\mathbf{x}$ porque $x_{B(l)} = 0$ e $d_{B(l)} < 0$. Trocar $\mathbf{A}_{B(l)}$ por $\mathbf{A}_j$ para criar nova base $\underline{\mathbf{B}}$ e Teor. 3.2 permanece válido.

2. Mesmo se $\theta^* > 0$ é possível que mais de uma solução básica factível original sejam nulas no novo ponto $\mathbf{x} + \theta^*\mathbf{d}$. Como só uma delas sai da base, as outras permanecem nulas e a nova solução também é degenerada.

- Troca de bases com permanência da mesma solução básica factível pode causar ciclagem

$n = 6$
$n\!-\!m = 2$



Seleção do pivô

- Selecionar pivô: escolha de j e θ^* nos passos 2 e 5 do algoritmo.

1. Escolher a coluna $\mathbf{A}_j$ cujo custo reduzido é o mais negativo.
2. Escolher a coluna com custo reduzido negativo e o maior valor de $\theta^* |\bar{c}_j|$.
3. Escolher a coluna com custo reduzido negativo e menor j (*smallest subscript rule*).

3-Implementações do método simplex

- Ponto chave do algoritmo: conhecendo $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_j$ determinamos

  1. custos reduzidos
  2. direção de busca
  3. passo na direção

- Diferenças de implementação estão

  1. na forma de calcular $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_j$
  2. informação que é passada de uma iteração à outra

- Resolver $\mathbf{Bx} = \mathbf{b}$: $O(m^3)$
- Computar $\mathbf{Bb}$: $O(m^2)$
- Calcular $\mathbf{p'b}$: $O(m)$

Implementação ingênua

- Nenhuma informação de iteração para iteração

1. índices das variáveis básicas $B(1),\ldots,B(m)$
2. formação da matriz básica
3. cálculo de $\mathbf{p}' = \mathbf{c}'_B\mathbf{B}^{-1}$ resolvendo $\mathbf{p}'\mathbf{B} = \mathbf{c}'_B$ (multiplicadores simplex)
4. cálculo dos custos reduzidos $\underline{c}_j = c_j - \mathbf{c}'_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_j = c_j - \mathbf{p}'\mathbf{A}_j$
5. seleção do pivô
6. coluna $\mathbf{A}_j$ é selecionada equação $\mathbf{Bu} = \mathbf{A}_j$ resolvida para determinar $\mathbf{u}$
7. determinar θ^*, a variável que sai da base e nova solução básica factível

- Complexidade

1. $\mathrm{p}'\mathbf{B} = \mathbf{c}'_B$ $\quad O(m^3)$
2. $\mathbf{Bu} = \mathbf{A}_j$ $\quad O(m^3)$
3. $\mathbf{p}'\mathbf{A}_j$ $\quad O(mn)$ $\quad$ (c_j para cada j)

Total: $O(m^3 + mn)$ $\quad \rightarrow$ ineficiente

Simplex revisado

- Utiliza informação de uma iteração para a próxima
- Método ingênuo requer solução de dois sistemas de equações
- Implementação alternativa: $\mathbf{B}^{-1}$ disponível no início de cada iteração
- Cálculo de $\mathbf{c}'_B\mathbf{B}^{-1}$ e $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_j$: vetor $\times$ matriz $\rightarrow O(m^2)$
- Necessário método eficiente de atualizar a matriz $\mathbf{B}^{-1}$

- Matriz básica de uma iteração para a próxima

$$\mathbf{B} = [\mathbf{A}_{B(1)} \ldots \mathbf{A}_{B(l-1)} \; \boxed{\mathbf{A}_{B(l)}} \; \mathbf{A}_{B(l+1)} \ldots \mathbf{A}_{B(m)}]$$ no início de uma iteração

$$\underline{\mathbf{B}} = [\mathbf{A}_{B(1)} \ldots \mathbf{A}_{B(l-1)} \; \boxed{\mathbf{A}_j} \; \mathbf{A}_{B(l+1)} \ldots \mathbf{A}_{B(m)}]$$ início da próxima iteração

Definição 3.4 Dada uma matriz, não necessariamente quadrada, a operação de adicionar uma constante vezes uma linha à mesma ou outra linha é chamada de operação elementar com linhas.

Exemplo

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \mathbf{QC} = \begin{bmatrix} 11 & 14 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$$

Multiplica a 3ª linha de $\mathbf{C}$ por 2 e soma à primeira linha

Em geral

$$\mathbf{Q} = \mathbf{I} + \mathbf{D}_{ij} \qquad d_{ij} = \begin{cases} \beta & i \neq j \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \qquad \det(\mathbf{Q}) = 1$$

multiplica j-ésima linha por β e soma com a i-ésima linha

- Seqüência de K operações elementares

$Q_K \mathbf{Q}_{K\text{-}1} \ldots \mathbf{Q}_2 \mathbf{Q}_1 \equiv$ pré-multiplicação por uma matriz inversível

$$\mathbf{B}\mathbf{B}^{-1} = \mathbf{I} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_i = \mathbf{e}_i$$

$$\mathbf{B}^{-1}\overline{\mathbf{B}} = [\mathbf{e}_1 \cdots \mathbf{e}_{l-1}\ \mathbf{u}\ \mathbf{e}_{l+1} \cdots \mathbf{e}_m] = \begin{bmatrix} 1 & & u_1 & & \\ & \ddots & \vdots & & \\ & & u_l & & \\ & & \vdots & \ddots & \\ & & u_m & & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{u} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_j$$

- Seqüência de operações elementares para transformar $\mathbf{B}\mathbf{B}^{-1}$ em identidade ?

- Considerar a seguinte seqüência de operações elementares

(a) Para cada $i \neq j$, somar l-ésima linha vezes $-u_i/u_l$ à i-ésima linha ($u_l > 0$); troca u_i por zero.

(b) Dividir a l-ésima linha por u_l; troca u_i por um.

- Esta seqüência é equivalente a multiplicar $\mathbf{B}\mathbf{B}^{-1}$ à esquerda por $\mathbf{Q}$

$$\mathbf{Q}\mathbf{B}^{-1}\overline{\mathbf{B}} = \mathbf{I} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{Q}\mathbf{B}^{-1} = \overline{\mathbf{B}}^{-1}$$

- Para obter $\underline{\mathbf{B}}^{-1}$, tomamos $\mathbf{B}^{-1}$ e aplicamos a seqüência de operações (a) e (b).

Exemplo

$$\mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & -3 & -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$l = 3 \Rightarrow \mathbf{u} = \mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\overline{\mathbf{B}}^{-1} = \begin{bmatrix} 9 & -4 & -1 \\ -6 & 6 & 3 \\ 2 & -1.5 & -1 \end{bmatrix}$$

Uma iteração do método simplex revisado

1. Iniciar com uma solução factível $\mathbf{x}$, a base $\mathbf{A}_{B(1)},\ldots,\mathbf{A}_{B(m)}$ e $\mathbf{B}^{-1}$ associada

2. Calcular $\mathbf{p}' = \mathbf{c}'_B\,\mathbf{B}^{-1}$ e o custo reduzido $\underline{c}_j = c_j - \mathbf{p}'\mathbf{A}_j$, $\forall j \in N$
   se $\underline{c}_j \geq 0$, $\forall j \in N$, então a solução básica factível é ótima; fim
   senão escolher algum j para o qual $\underline{c}_j < 0$

3. Calcular $\mathbf{u} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_j$. Se $u_\mathrm{i} \leq 0$, $i = 1,\ldots,m$, então $\theta^* = \propto$ e o valor função da função objetivo é $-\propto$; fim

4. Se alguma componente de $\mathbf{u}$ é positiva, fazer

$$\theta^* = \min_{\{i=1,\ldots,m|u_i>0\}} \left(\frac{x_{B(i)}}{u_i} \right) = -\frac{x_{B(l)}}{d_{B(l)}}$$

5. Seja l tal que $\theta^* = x_{B(l)}/u_l$. Formar nova base trocando $\mathbf{A}_{B(l)}$ por $\mathbf{A}_j$
   Se $\mathbf{y}$ é a nova solução básica factível, então os valores das novas variáveis básicas são $y_j = \theta^*$ e $y_{B(i)} = x_{B(i)} - \theta^* u_i$, $i \neq l$.

6. Formar a matriz $m\times(m+1)$ $[\mathbf{B}^{-1}|\ \mathbf{u}]$. Efetuar operações elementares para fazer $\mathbf{u} = \mathbf{e}_l$. As primeiras m colunas da matriz é $\underline{\mathbf{B}}^{-1}$

Tableau simplex

- Ao invés de manter e atualizar $\mathbf{B}^{-1}$, mantém e atualiza a matriz $m \times (n+1)$

$$\mathbf{B}^{-1}[\mathbf{b} \mid \mathbf{A}] = \left[\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \quad \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_1 \quad \cdots \quad \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_n\right] \longrightarrow$$

$-\mathbf{c}_B'\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$	$\mathbf{c}' - \mathbf{c}_B'\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$
$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$	$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}$

	coluna zero			coluna pivô		
linha zero	$-\mathbf{c}_B'\mathbf{x}_B$	$\bar{c}_1$	$\cdots$	$\bar{c}_j$	$\cdots$	$\bar{c}_m$
	$x_{B(1)}$					
	$\vdots$					
linha pivô	$x_{B(l)}$	$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_1$	$\cdots$	$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_j$	$\cdots$	$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_n$
	$\vdots$					
	$x_{B(m)}$					

Exemplo

$$
\begin{aligned}
\min \quad & -10x_1 - 12x_2 - 12x_3 \\
\text{sa} \quad & x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 20 \\
& 2x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 20 \\
& 2x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 20 \\
& x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\min \quad & -10x_1 - 12x_2 - 12x_3 \\
\text{sa} \quad & x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 20 \\
& 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_5 = 20 \\
& 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_6 = 20 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0
\end{aligned}
$$

$\mathbf{x} = (0, 0, 0, 20, 20, 20)$ solução básica factível inicial

$B(1) = 4$, $B(2) = 5$, $B(3) = 6$

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
	0	–10	–12	–12	0	0	0
$x_4 =$	20	1	2	2	1	0	0
$x_5 =$	20	2*	1	2	0	1	0
$x_6 =$	20	2	2	1	0	0	1

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
	100	0	–7	–2	0	5	0
$x_4 =$	10	0	1.5	1*	1	–0.5	0
$x_1 =$	10	1	0.5	1	0	0.5	0
$x_6 =$	0	0	1	–1	0	–1	1

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
	120	0	–4	0	0	0	0
$x_3 =$	10	0	1.5	1	1	–0.5	0
$x_1 =$	0	1	–1	0	–1	1	0
$x_6 =$	10	0	2.5*	0	1	–1.5	1

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
	136	0	0	0	3.6	1.6	1.6
$x_3 =$	4	0	0	1	0.4	0.4	–0.6
$x_1 =$	4	1	0	0	–0.6	0.4	0.4
$x_2 =$	4	0	1	0	0.4	–0.6	0.4

Simplex revisado × tableau

- Tableau: cálculos dependem do tamanho do tableau $O(mn)$
- Simplex revisado:
  - cálculos similares ao tableau para computar $\mathbf{B}^{-1}$ e $\mathbf{c'}_B\mathbf{B}^{-1}$ $O(m^2)$
  - cálculo dos custos reduzidos $\mathbf{p'A}_j$ para todo j $O(mn)$
  - total: $O(m^2 + mn)$
  - em geral $m < n$ $\Rightarrow$ $O(mn)$

	Tableau	Simplex revisado
Memória	$O(mn)$	$O(m^2)$
Tempo (pior caso)	$O(mn)$	$O(mn)$
Tempo (melhor caso)	$O(mn)$	$O(m^2)$

Aumento de desempenho (prática)

- Re-inversão
- Mecanismo para representar matriz básica
  - armazena $\mathbf{Q}$, matriz tal que $\mathbf{Q}\mathbf{B}^{-1} = \underline{\mathbf{B}}^{-1}$
- Não representar $\mathbf{B}^{-1}$ explicitamente: utilizar decomposição LU

4-Anticiclagem: regras lexicográfica e de Bland

Definição 3.5 Um vetor $\mathbf{u} \in \Re^n$ é lexicograficamente maior (menor) que outro vetor $\mathbf{v} \in \Re^n$ se $\mathbf{u} \neq \mathbf{v}$ e a primeira componente não nula de $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ é positiva (negativa). Simbolicamente:

$\mathbf{u} >^L \mathbf{v}$ ou $\mathbf{u} <^L \mathbf{v}$.

Exemplo

$(0, 2, 3, 0) >^L (0, 2, 1, 4)$

$(0, 4, 5, 0) <^L (1, 2, 1, 2)$

Regra lexicográfica

- Escolher coluna $\mathbf{A}_j$ que entra na base arbitrariamente, com $c_j < 0$.
  Seja $\mathbf{u} = \mathbf{QB}^{-1}$ a j-ésima coluna do tableau

- Para cada i com $u_i > 0$, dividir a i-ésima linha do tableau por u_i e escolher a linha lexicograficamente menor. Se esta linha é a i-ésima , então a variável básica $x_{B(l)}$ sai da base.

$j = 3$

1	0	5	3	...
2	4	6	–1	...
3	0	7	9	...

$x_{B(1)}/\, u_1 = 1/3$

$x_{B(3)}/\, u_3 = 1/3$

$\rightarrow$

1/3	0	5/3	1	...
*	*	*	*	...
1/3	0	7/9	1	...

$7/9 < 5/3 \Rightarrow x_{B(3)}$ sai da base

Teorema 3.4 Suponha que o algoritmo simplex inicie com todas as linhas do tableau, exceto a primeira, lexicograficamente positiva. Suponha que a regra lexicográfica é utilizada. Então:

(a) Toda linha do tableau, exceto a primeira, permanece lexicograficamente positiva.
(b) A linha zero aumenta lexicograficamente a cada iteração, estritamente.
(c) O método simplex termina depois de um número finito de iterações.

Prova: página 110 do livro texto

Regra de Bland

- *Smallest subscript rule*
  - Encontrar o menor j para o qual $c_j < 0$ e $\mathbf{A}_j$ que entra na base.
  - Entre todas as variáveis x_i que estiverem empatadas no teste para escolher a que sai da base, selecionar aquela com menor i.

5-Solução básica factível inicial

$$\begin{aligned} \min\ & \mathbf{c}'\mathbf{x} \\ \text{sa}\quad & \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq 0 \end{aligned}$$

- Assumir, sem perda de generalidade, $\mathbf{b} \geq 0$
- Introduzir variáveis artificiais $\mathbf{y} \in \Re^m$
- Criar problema auxiliar

$$\begin{aligned} \min\ & y_1 + y_2 + \cdots + y_m \\ \text{sa}\quad & \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq 0 \\ & \mathbf{y} \geq 0 \end{aligned}$$

modelo artificial

Inicialização: $\mathbf{x} = 0$, $\mathbf{y} = \mathbf{b}$, $\mathbf{B} = \mathbf{I}$

Problema auxiliar

- Existe solução factível ótima e $\mathbf{y} = 0$ (função objetivo é nula): $\mathbf{x}$ é factível
- Valor da função objetivo na solução ótima $\neq 0$: modelo é infactível
- Variável artificial que terminar na base: deve ser colocada fora da base
  - se $\rho(\mathbf{A}) = m$ e a l-ésima variável básica é artificial, então examinar linha l, encontrar j tal que l-ésimo elemento de $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_j \neq 0$, trazer $\mathbf{A}_j$ para base.
  - se a l-ésima linha de $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}$ é nula, a restrição é redundante, eliminar l-ésima linha

Exemplo

$$
\begin{aligned}
\min \quad & x_1 + x_2 + x_3 \\
\text{sa} \quad & x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 3 \\
& -x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 2 \\
& 4x_2 + 9x_3 = 5 \\
& 3x_3 + x_4 = 1 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\min \quad & x_5 + x_6 + x_7 + x_8 \\
\text{sa} \quad & x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_5 = 3 \\
& -x_1 + 2x_2 + 6x_3 + x_6 = 2 \\
& 4x_2 + 9x_3 + x_7 = 5 \\
& 3x_3 + x_4 + x_8 = 1 \\
& x_1, \cdots, x_8 \geq 0
\end{aligned}
$$

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
	–11	0	–8	–21	–1	0	0	0	0
$x_5 =$	3	1	2	3	0	1	0	0	0
$x_6 =$	2	–1	2	6	0	0	1	0	0
$x_7 =$	5	0	4	9	0	0	0	1	0
$x_8 =$	1	0	0	3	1*	0	0	0	1

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
	–10	0	–8	–18	0	0	0	0	1
$x_5 =$	3	1	2	3	0	1	0	0	0
$x_6 =$	2	–1	2	6	0	0	1	0	0
$x_7 =$	5	0	4	9	0	0	0	1	0
$x_4 =$	1	0	0	3*	1	0	0	0	1

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
	–4	0	–8	0	6	0	0	0	7
$x_5 =$	2	1	2	0	–1	1	0	0	–1
$x_6 =$	0	–1	2*	0	–2	0	1	0	–2
$x_7 =$	2	0	4	0	–3	0	0	1	–3
$x_3 =$	1/3	0	0	1	1/3	0	0	0	1/3

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
	–4	–4	0	0	–2	0	4	0	–1
$x_5 =$	2	2*	0	0	1	1	–1	0	1
$x_2 =$	0	–1/2	1	0	–1	0	1/2	0	–1
$x_7 =$	2	2	0	0	1	0	–2	1	1
$x_3 =$	1/3	0	0	1	1/3	0	0	0	1/3

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
	0	0	0	0	0	2	2	0	1
$x_1 =$	1	1	0	0	1/2	1/2	–1/2	0	1/2
$x_2 =$	1/2	0	1	0	–3/4	1/4	1/4	0	–3/4
$x_7 =$	0	0	0	0	0	–1	–1	1	0
$x_3 =$	1/3	0	0	1	1/3	0	0	0	1/3

		x_1	x_2	x_3	x_4
	*	*	*	*	*
$x_1 =$	1	1	0	0	1/2
$x_2 =$	1/2	0	1	0	–3/4
$x_3 =$	1/3	0	0	1	1/3

Método simplex de duas fases

Fase I

1. Iniciar com $\mathbf{b} \geq 0$

2. Introduzir variáveis artificiais $y_1,....,y_m$ e aplicar método simplex com objetivo $\Sigma\, y_\mathrm{i}$

3. Se valor ótimo da função objetivo é positivo, então problema original infactível; fim

4. Se o valor ótimo da função objetivo é nulo, então uma solução factível para o problema original encontrado. Se não tem variáveis artificiais na base, eliminar as variáveis artificiais e colunas correspondentes; solução factível disponível.

5. Se a l-ésima variável básica é artificial, examinar a l-ésima posição das colunas $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_j$, $j = 1, ...,n$. Se todos estes valores forem nulos, então restrição correspondente à l-ésima coluna é redundante e eliminar.Senão, mudar base (com a l-ésima como pivô). Repetir esta operação ate eliminar variáveis artificiais da base.

Fase II

1. Considerar a base final da fase I e o tableau como inicialização da fase II.

2. Computar custos reduzidos para todas variáveis da base inicial.

3. Aplicar o método simplex ao problema original.

Fase I

detecta infactibilidade do modelo

detecta e elimina restrições de igualdade redundantes

Fase II

detecta modelos ilimitados.

obtém solução ótima

Método big-M

- Utiliza função objetivo na forma

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j + M \sum_{i=1}^{m} y_i$$

- M é um valor suficientemente grande
- y_i variáveis artificiais como na Fase I
- Explicita-se custos reduzidos em função de M
- Combina duas fases em uma única.
- Se problema original é factível e valor função objetivo é finito

  então $\mathbf{y} \rightarrow 0$ e solução obtida $\mathbf{x}$ é ótima para problema original

6-Geometria de colunas do método simplex

- Alternativa de visualizar o simplex
- Considera o problema

$$\begin{aligned} &\min \mathbf{c}'\mathbf{x} \\ &\text{sa} \quad \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ &\qquad \mathbf{e}'\mathbf{x} = 1 \\ &\qquad \mathbf{x} \geq 0 \end{aligned}$$

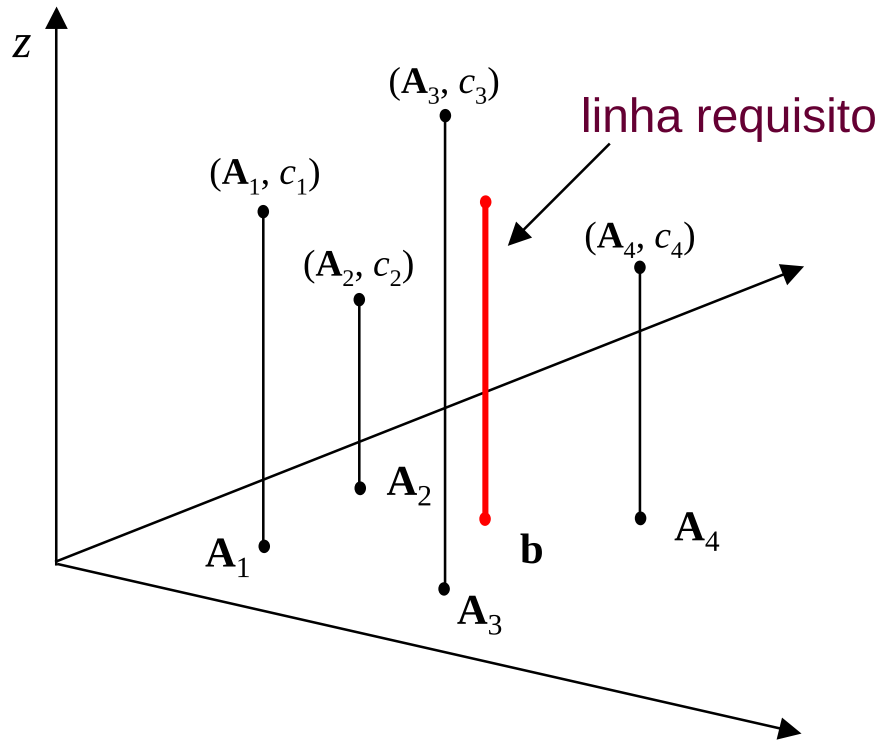
$\mathbf{e} = (1, 1, ...,1) \in \Re^n$

$\mathbf{e}'\mathbf{x} = 1$ restrição de convexidade

- Problema: minimizar z sujeito à $\mathbf{x} \geq 0$, restrição de convexidade, e a restrição

$$x_1 \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 \\ c_1 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} \mathbf{A}_2 \\ c_2 \end{bmatrix} + \cdots + x_n \begin{bmatrix} \mathbf{A}_n \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ z \end{bmatrix}$$

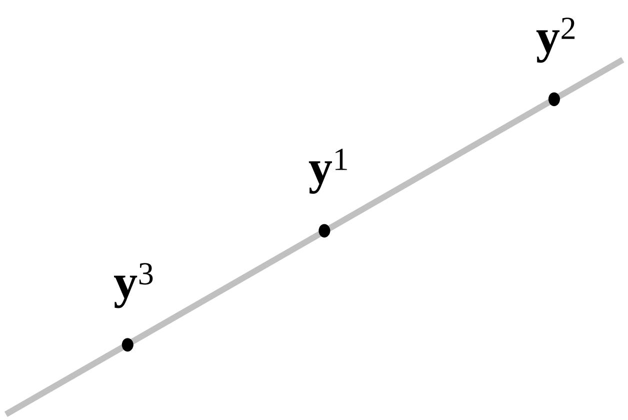
Geometria de colunas



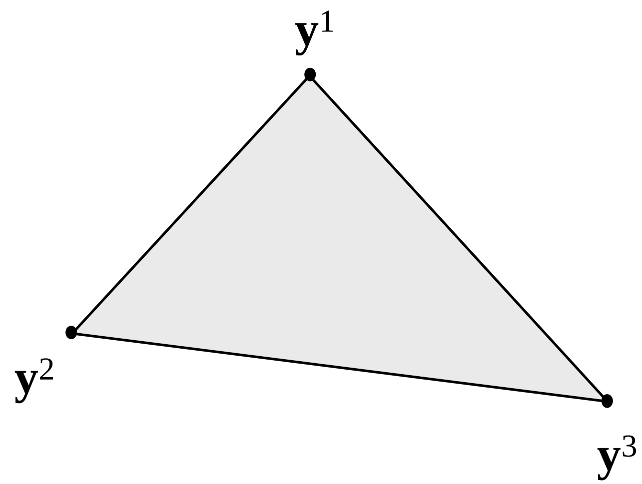
Definição 3.6

(a) Um coleção de vetores $\mathbf{y}^1,\ldots,\mathbf{y}^{k+1}$ no $\Re^n$ é afim independente se os vetores $\mathbf{y}^1-\mathbf{y}^{k+1}, \mathbf{y}^1-\mathbf{y}^{k+1},\ldots,\mathbf{y}^{\mathrm{k}}-\mathbf{y}^{k+1}$ são linearmente independentes. $(k \le n)$.

(b) A envoltória convexa de $k+1$ vetores afim independentes no $\Re^n$ é um simplex de dimensão k.



afim dependentes



afim independentes

- Solução básica factível associada com $m + 1$ restrições de igualdade
- Pontos $(\mathbf{A}_i, c_i)$ associados às $m + 1$ colunas LI $(\mathbf{A}_i, 1)$: pontos básicos
- Pontos restantes: não básicos
- $m + 1$ pontos básicos são afim independentes
  - envoltória convexa pontos básicos é um simplex de dimensão m
  - este simplex é o simplex básico
  - $(\mathbf{b}, z)$ é uma combinação convexa de pontos básicos (expresso via x_i)
- Plano que passa pelos pontos básicos é o plano dual

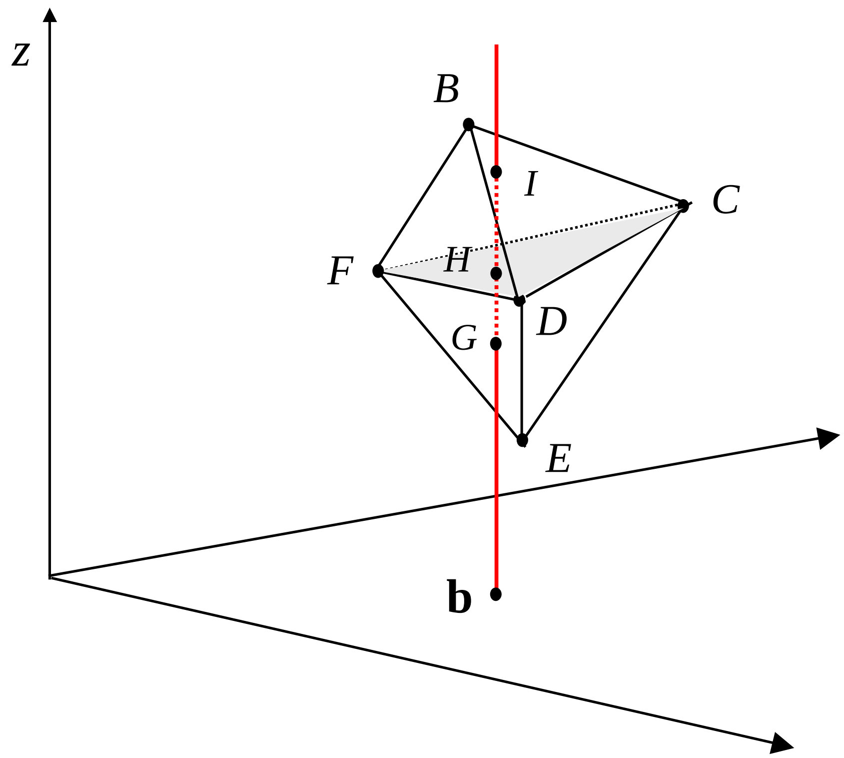
Exemplo

C, D, F são pontos básicos (ver próxima transparência)

triângulo CDF simplex básico

H é uma solução básica factível associada aos pontos básicos

Factibilidade e otimalidade na geometria de colunas



- Distância vertical do ponto ($\mathbf{A}_j$, c_j) ao plano dual é o custo reduzido (Ex. 3.30)
- Ponto básico abaixo do plano dual é candidato a entrar na base
- Novo simplex básico é onde linha requisito “sai” do simplex m-dimensional

Exemplo

C, D, F são pontos básicos (figura transparência anterior)

triangulo CDF simplex básico

$CDEF$ pirâmide associada aos pontos básicos C, D, F e candidato E

E candidato a entrar na base

DEF é o novo simplex básico (E entra na base e C sai da base)

Exemplo

$m = 1$

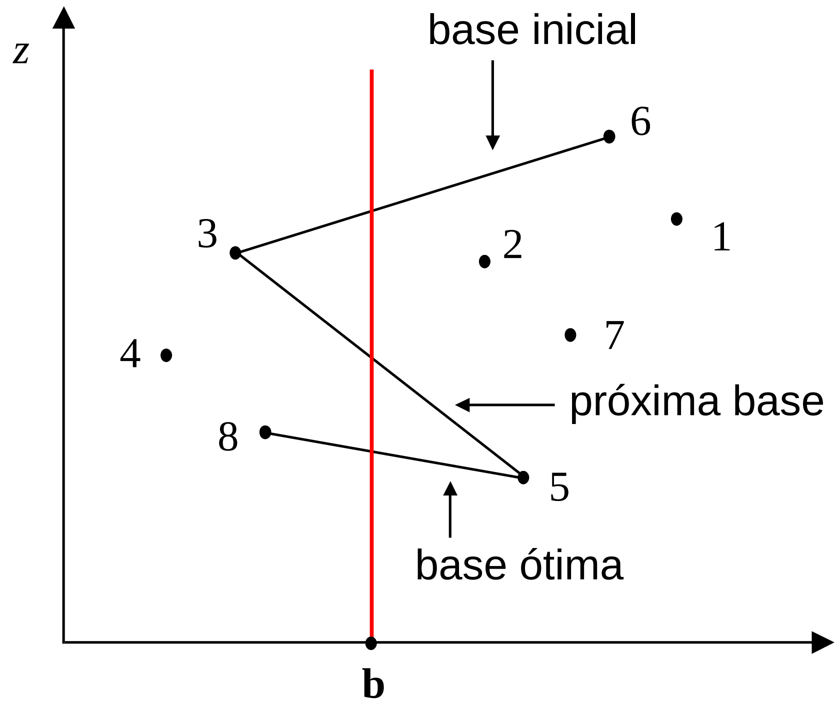
pivoteamento: ponto $(\mathbf{A}_i, c_i)$ com maior distância vertical ao plano dual

base inicial $(\mathbf{A}_3, c_3), (\mathbf{A}_6, c_6)$

próxima base $(\mathbf{A}_3, c_3), (\mathbf{A}_5, c_5)$

base ótima $(\mathbf{A}_5, c_5), (\mathbf{A}_8, c_8)$

total: 2 pivoteamentos



7-Eficiência computacional do simplex

- Eficiência computacional do simplex é determinado por
  - esfôrço computacioal por iteração (item 3)
  - número de iterações

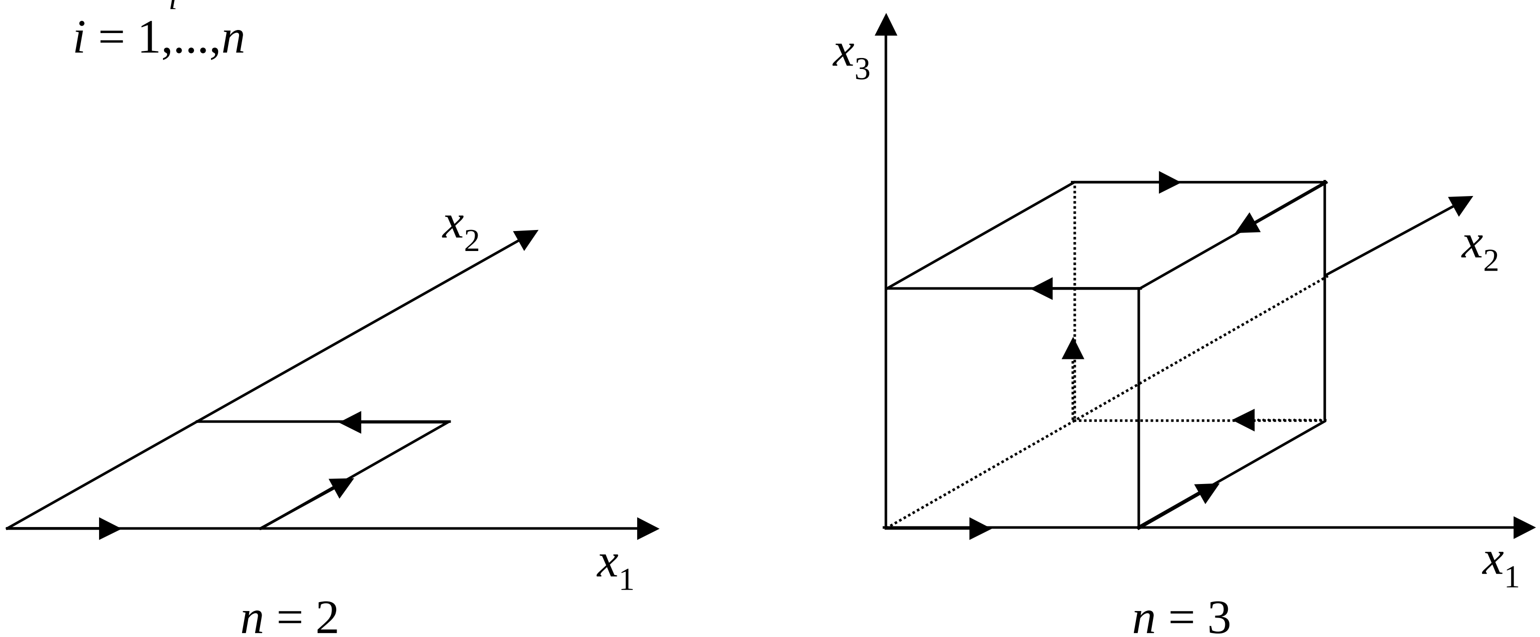
- Considerar o problema

$$
\begin{aligned}
&\min \; -x_n \\
&\text{sa} \quad \varepsilon \le x_1 \le 1 \\
&\qquad \varepsilon x_{i-1} \le x_i \le 1-\varepsilon x_{i-1} \quad i=1,\ldots,n
\end{aligned}
\qquad \text{(P)}
$$

Trajetória geradora (*spanning path*): visita cada vértice do poliedro

Exemplo hipercubo unitário

$0 \leq x_i \leq 1$
$i = 1,\ldots,n$



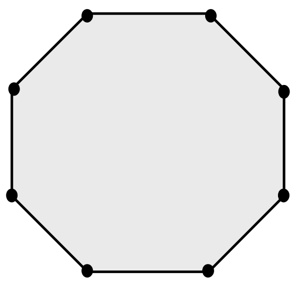
Teorema 3.5 Considere o problema de programação linear (P). Então:

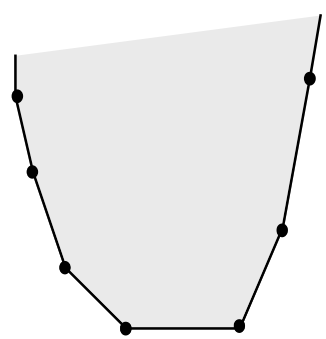
(a) O conjunto de soluções factíveis possui 2^n vértices.
(b) Os vértices podem ser ordenados tal que eles sejam adjacentes e que possuam menor valor da função objetivo que o anterior.
(c) Existe uma regra de pivoteamento sob a qual o simplex requer $2^n - 1$ mudanças de base antes de terminar.

OBS: notar que, na figura do exemplo, o primeiro e último vértices são adjacentes!

Diâmetro de um poliedro

- Distância entre vértices $d(\mathbf{x},\mathbf{y})$ = número mínimo de passos par ir de $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$ através de vértices adjacentes
- Diâmetro poliedro $D(P) = \max \{d(\mathbf{x},\mathbf{y})\}$ sobre todos pares de vértices $(\mathbf{x},\mathbf{y})$
- $\Delta(n,m)$ = máximo de $D(P)$ sobre todos poliedros limitados no $\Re^n$
- $\Delta_u(n,m)$ = máximo de $D(P)$ sobre todos poliedros, mesmo ilimitados, no $\Re^n$





$n = 2$
$m = 8$

$$\Delta(2,m) = \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor = 4$$

$$\Delta_u(2,m) = m - 2 = 6$$

- Diâmetro no pior caso
  - cresce mais lentamente do que exponencialmente
  - limite superior cresce mais rápido do que polinomialmente

$$\Delta(n,m) \leq \Delta_u(n,m) < \mathrm{m}^{1+\log_2 n} = (2n)^{log_2 m}$$

- Conjectura de Hirsch: $\Delta(n,m) \leq m - n$

- Média de Haimovich: $n/2$ iterações

Observação

Este material refere-se às notas de aula do curso IA 881 Otimização Linear da Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação da Unicamp. Não substitui o livro texto, as referências recomendadas e nem as aulas expositivas. Este material não pode ser reproduzido sem autorização prévia dos autores. Quando autorizado, seu uso é exclusivo para atividades de ensino e pesquisa em instituições sem fins lucrativos.