IA 881 Otimização Linear

1-Introdução

Conteúdo

1. Problemas de PL e variações
2. Exemplos de problemas de PL
3. Funções convexas lineares por partes
4. Representação gráfica e solução
5. Revisão de álgebra linear e notação
6. Complexidade de algoritmos

1-Problemas de PL e variações

$$
\begin{array}{lrcl}
\text{minimizar} & 2x_1 - x_2 + 4x_3 & & \\
\text{sujeito a} & x_1 + x_2 + \qquad + x_4 & \leq & 2 \\
 & 3x_2 - \ x_3 + x_4 & = & 5 \\
 & x_3 + x_4 & \geq & 3 \\
 & x_1 & \geq & 0 \\
 & x_3 & \leq & 0
\end{array}
$$

x_1, x_2, x_3, x_4 são variáveis escolhidas para minimizar $2x_1 - x_2 + 4x_3$ sujeitas às restrições de desigualdade e igualdade

$$\mathbf{a}'\mathbf{x} \leq b,\ \mathbf{a}'\mathbf{x} = b,\ \mathbf{a}'\mathbf{x} \geq b \qquad \mathbf{a}'\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{4} a_i x_i$$

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4),\ \mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3, a_4)$$

Modelo geral de programação linear

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \mathbf{c}'\mathbf{x} \\
\text{sa} \quad & \mathbf{a}_i'\mathbf{x} \geq b_i, i \in M_1 \\
& \mathbf{a}_i'\mathbf{x} \leq b_i, i \in M_2 \\
& \mathbf{a}_i'\mathbf{x} = b_i, i \in M_3 \\
& x_j \geq 0, j \in N_1 \\
& x_j \leq 0, j \in N_2
\end{aligned}
$$

$x_1, \cdots, x_n$	variáveis de decisão
$c_1, \cdots, c_n$	coeficientes
$\mathbf{c}'\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$	função objetivo

$\mathbf{a}_i'\mathbf{x} \leq b_i$, $\mathbf{a}_i'\mathbf{x} = b_i$, $\mathbf{a}_i'\mathbf{x} \geq b_i$	restições principais
$x_j \leq 0, x_j \geq 0$	restrições de sinal
$\mathbf{a}'\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$	produto escalar

solução factível: vetor $\mathbf{x}$ que satisfaz todas restrições

conjunto soluções factíveis: vetores $\mathbf{x}$ que satisfazem todas restrições

solução ótima: $\mathbf{x}^*$ solução factível que minimiza função objetivo
$\mathbf{c}'\mathbf{x}^* \leq \mathbf{c}\mathbf{x}$ para todo $\mathbf{x}$ factível
$\mathbf{c}'\mathbf{x}^*$ valor ótimo da função objetivo

variável livre: se $j \notin N_1$ ou N_2 então x_j livre, sem restrição de sinal

problema ilimitado: se $\forall k \in \Re$, $\exists \mathbf{x}$ factível tal que $\mathbf{c}'\mathbf{x} < k$ então valor ótimo da função objetivo é $-\infty$, isto é, ilimitado

$\mathbf{a}'_i\,\mathbf{x} \le b_i$ e $\mathbf{a}'_i\,\mathbf{x} \ge b_i \Rightarrow \mathbf{a}'_i\,\mathbf{x} = b_i$

$\mathbf{a}'_i\mathbf{x} \le b_i = (-\mathbf{a}'_i)\mathbf{x} \ge -b_i$

$x_j \ge 0$ e $x_j \le 0$: casos particulares de $\mathbf{a}'_i\,\mathbf{x} \ge b_i$ e $\mathbf{a}'_i\,\mathbf{x} \le b_i$

$\max \mathbf{c}'\mathbf{x} = \min -\mathbf{c}'\mathbf{x}$

Forma compacta

$$\begin{aligned} &\min \mathbf{c}'\mathbf{x} \\ &\text{sa} \quad \mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b} \end{aligned}$$

$$j = 1, \cdots, n \qquad \mathbf{c} = (c_1, \cdots, c_n)$$

$$i = 1, \cdots, m \qquad \mathbf{b} = (b_1, \cdots, b_m)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1' \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Exemplo

$$\begin{array}{llllllll}
\min & 2x_1 - x_2 + 4x_3 \\
\text{sa} & -x_1 & -x_2 + & & -x_4 & \geq & -2 \\
& & 3x_2 - & x_3 & & \geq & 5 \\
& & -3x_2 + & x_3 & & \geq & -5 \\
& & & x_3 + & x_4 & \geq & 3 \\
& x_1 & & & & \geq & 0 \\
& & & x_3 & & \leq & 0
\end{array}$$

$\mathbf{c} = (2, -1, 4, 0)$

$\mathbf{b} = (-2, 5, -5, 3, 0, 0)$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Forma canônica

$$\begin{aligned} &\min \mathbf{c}'\mathbf{x} \\ &\text{sa} \quad \mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b} \\ &\qquad\ \ \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

$$j = 1, \cdots, n \qquad \mathbf{c} = (c_1, \cdots, c_n)$$

$$i = 1, \cdots, m \qquad \mathbf{b} = (b_1, \cdots, b_m)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1' \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Exemplo

$$
\begin{array}{llllll}
\min & 2x_1 - x_2 + 4x_3 & & & & \\
\text{sa} & -x_1 - x_2 + & & -x_4 & \geq & -2 \\
 & 3x_2 - & x_3 & & \geq & 5 \\
 & -3x_2 + & x_3 & & \geq & -5 \\
 & & x_3 + & x_4 & \geq & 3 \\
 & x_1 & & & \geq & 0 \\
 & & x_3 & & \geq & 0
\end{array}
$$

$$\mathbf{c} = (2, -1, 4, 0)$$

$$\mathbf{b} = (-2, 5, -5, 3)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Forma padrão

$$\begin{aligned} &\min \mathbf{c}'\mathbf{x} \\ &\text{sa} \quad \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ &\qquad\quad \mathbf{x} \geq 0 \end{aligned}$$

$j = 1, \cdots, n \qquad \mathbf{c} = (c_1, \cdots, c_n)$

$i = 1, \cdots, m \qquad \mathbf{b} = (b_1, \cdots, b_m)$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}'_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}'_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \cdots & \mathbf{A}_n \end{bmatrix}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbf{A}_i x_i = \mathbf{b}$$

$\mathbf{A}_\mathrm{i}$: vetor de recursos

b: vetor de metas

x_i: quantidade i-ésimo recurso

Exemplo: problema da dieta

	alimento 1	....	alimento n
nutriente 1	a_{11}	....	$a_{1\mathrm{n}}$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
nutriente m	$a_{\mathrm{m}1}$	....	a_{mn}

Redução à forma padrão

1-Eliminação de variáveis livres: x_j variável irrestrita

$$x_j = x_j^+ - x_j^-, \qquad x_j^+ \geq 0 \quad \text{e} \quad x_j^- \geq 0$$

2-Eliminação de restrições de desigualdade:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i, \qquad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + s_i = b_i, \qquad s_i \geq 0$$

variáveis de folga

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i, \qquad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - s_i = b_i, \qquad s_i \geq 0$$

variáveis de excesso

Exemplo

$$
\begin{aligned}
\min \quad & 2x_1 + 4x_2 \\
\text{sa} \quad & x_1 + x_2 \geq 3 \\
& 3x_1 + 2x_2 = 14 \\
& x_1 \geq 0
\end{aligned}
$$

é equivalente à

$$
\begin{aligned}
\min \quad & 2x_1 + 4x_2^+ - 4x_2^- \\
\text{sa} \quad & x_1 + x_2^+ - x_2^- - x_3 = 3 \\
& 3x_1 + 2x_2^+ - 2x_2^- = 14 \\
& x_1, x_2^+, x_2^-, x_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

Principais etapas da modelagem

1. Formular problema

2. Observar sistema

3. Formular modelo matemático

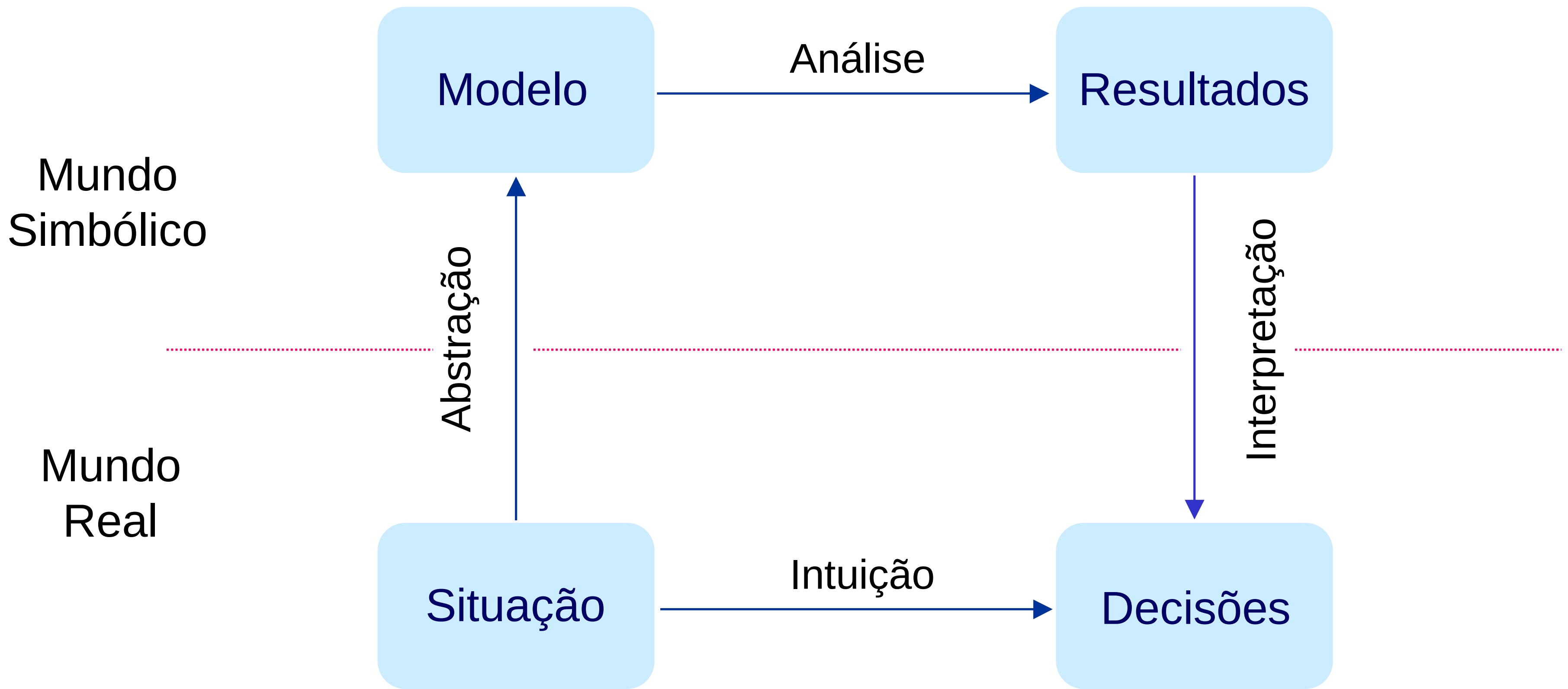
   - escolher variáveis de decisão
   - definir função objetivo
   - construir restrições

4. Verificar modelo

5. Selecionar alternativa apropriada

6. Apresentar resultados

Processo de Modelagem



Modelos são utilizados pelos seguintes motivos, entre outros:

- Forçam a explicitação dos objetivos
- Forçam a identificação dos tipos de decisões que influenciam os objetivos
- Forçam a identificação das interações e *trade-offs* entre as decisões
- Forçam raciocínio criterioso sobre variáveis e definições quantificáveis
- Forçam a consideração de dados que são pertinentes para quantificação das variáveis e a determinação de interações entre elas
- Forçam a identificação de restrições ou limitações dos valores das variáveis
- Facilitam comunicação e trabalho em grupo
- Podem ser ajustados e melhorados com a experiência e a histórica, isto é, proporcionam uma forma de aprendizagem adaptativa

1. Modelos são um meio para análises lógicas consistentes

2. Modelos proporcionam um veículo efetivo para o uso de técnicas analíticas, programas de computador e sistemas de computação no processamento e armazenagem de dados

3. Escolha de um grau de abstração adequado a ser adotado na modelagem é essencial para se obter modelos representativos da situação de decisão e computacionalmente tratáveis

2-Exemplos de problemas de PL

Programação de produção

n produtos
m matérias primas distintas
b_i quantidade de matéria prima disponível
a_{ij} quantidade de matéria prima i para produzir produto j
c_j receita por unidade do produto j

x_j quantidade do produto j a ser produzido (variável de decisão)

$$
\begin{array}{lll}
\min & c_1x_1 + \cdots + c_nx_n & \\
\text{sa} & a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n \leq b_i & i = 1,\ldots,m \\
 & x_j \geq 0 & j = 1,\ldots,n
\end{array}
$$

Expansão de capacidade produção de energia elétrica

T horizonte planejamento (anos)
d_t previsão de demanda para $t = 1,\ldots,T$
e_t capacidade das usinas de óleo existentes em t

Alternativas de usinas de geração

- carvão: custo de capital c_t (\$/MW), 20 anos de vida útil
- nuclear: custo de capital n_t (\$/MW), 15 anos de vida útil

Política e segurança: nuclear ≤ 20% da capacidade total

Deseja-se plano de expansão de capacidade de menor custo.

x_t quantidade de energia no início do ano *t* (usina carvão)
y_t quantidade de energia no início do ano *t* (usina nuclear)
w_t quantidade total de energia em *t* (usina carvão)
x_t quantidade total de energia em *t* (usina nuclear)

$$\min \quad \sum_{t=1}^{T} (c_t x_t + n_t y_t)$$

$$\text{sa} \quad w_t = \sum_{s=max(1,t-19)}^{t} x_s \quad ,t = 1,\ldots,T$$

$$z_t = \sum_{s=max(1,t-14)}^{t} y_s \quad , t = 1,\ldots,T$$

$$w_t + z_t + e_t \geq d_t \,, \;\; t = 1,\ldots,T$$

$$\frac{z_t}{w_t + z_t + e_t} \leq 0.2, t = 1,\ldots,T$$

$$x_t \,, y_t \,, w_t \,, z_t \geq 0$$

Programação de escala de trabalho

- Turno de trabalho: noturno (0:00 – 8:00), 5 dias consecutivos/semana
- d_j demanda de pessoal turno noturno no dia $j,\ j = 1,\ldots,7$

- Número mínimo de pessoas para atender a demanda de trabalho?

- y_j número de pessoas que trabalham no dia $j,\ j = 1,\ldots,7$

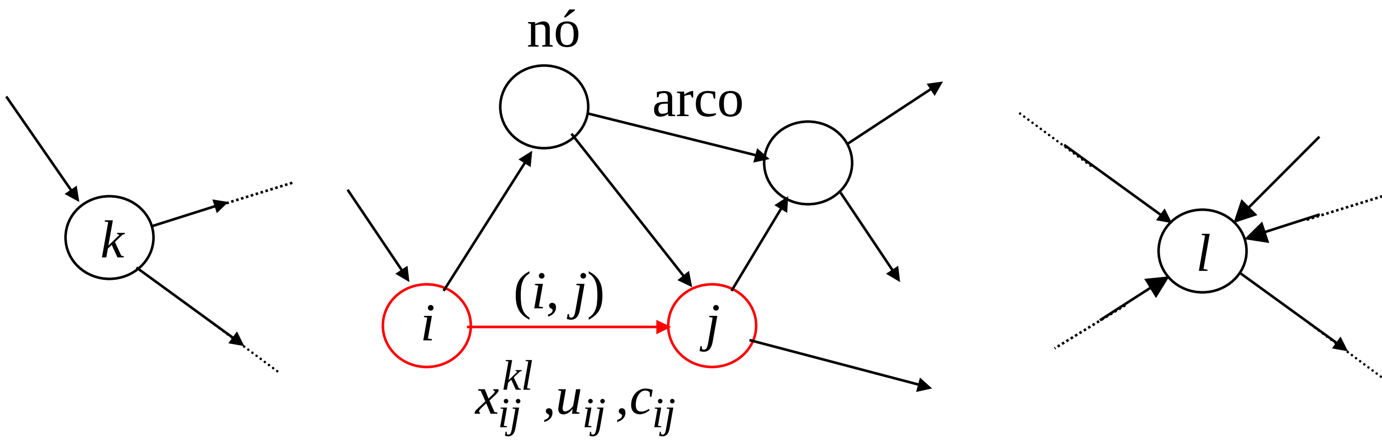
- esta escolha de variável de decisão complica modelagem da restrição de que cada pessoa deve trabalhar 5 dias consecutivos

- x_j número de pessoas iniciam trabalho no dia $j,\ j = 1,\ldots,7$ escolha mais apropriada para a variável de decisão

  Exemplo: iniciar no dia 5 $\rightarrow$ trabalha nos dias 5, 6, 7, 1, 2

$$
\begin{array}{ll}
\min & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \\
\text{sa} & x_1 + \qquad\qquad + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \geq d_1 \\
 & x_1 + x_2 + \qquad\qquad + x_5 + x_6 + x_7 \geq d_2 \\
 & x_1 + x_2 + x_3 + \qquad\qquad + x_6 + x_7 \geq d_3 \\
 & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \qquad\qquad + x_7 \geq d_4 \\
 & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \qquad\qquad \geq d_5 \\
 & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \qquad \geq d_6 \\
 & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \geq d_7 \\
 & x_j \geq 0, \quad x_j \text{ inteiro}, \quad j = 1, \ldots, 7
\end{array}
$$

Planejamento de redes de comunicação



u_{ij} capacidade do arco ij (bits/segundo)

c_{ij} custo transmissão no arco ij ($/bit)

b^{kl} dados gerados no nó k com destino ao nó l (bits/segundo)

x_{ij}^{kl} dados gerados no nó k com destino ao nó l que utilizam arco (i, j)

$$\min \sum_{(i,j)\in A} \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} c_{ij} x_{ij}^{kl}$$

$$\text{sa} \quad \sum_{\{j|(i,j)\in A\}} x_{ij}^{kl} - \sum_{\{j|(j,i)\in A\}} x_{ji}^{kl} = b_i^{kl}, \quad i,k,l = 1,\ldots,n$$

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} x_{ij}^{kl} \le u_{ij}, \qquad (i,j)\in A$$

$$x_{ij}^{kl} \ge 0, \qquad \forall (i,j)\in A, k,l = 1,\ldots,n$$

$$b_i^{kl} = \begin{cases} b^{kl} & \text{se } i = k \\ -b^{kl} & \text{se } i = l \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

fluxo dados resultante nó i

3-Funções convexas lineares por partes

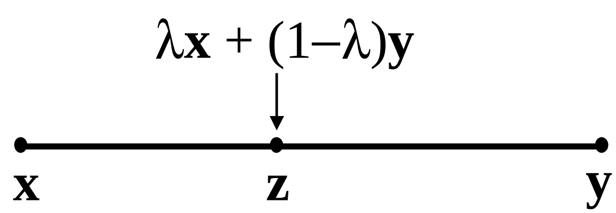
Definição 1.1

(a) função $f : \Re^n \rightarrow \Re$ é convexa se $\forall \mathbf{x},\mathbf{y} \in \Re^n$ e $\forall \lambda \in [0,1]$

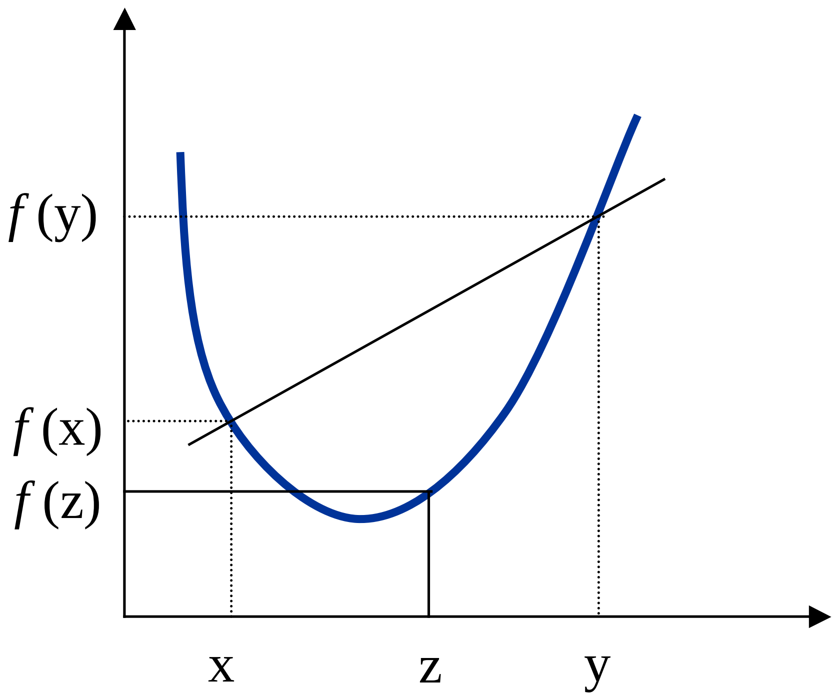
$$f(\lambda \mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y}) \leq \lambda f(\mathbf{x}) + (1-\lambda) f(\mathbf{y})$$

(b) função $f : \Re^n \rightarrow \Re$ é côncava se $\forall \mathbf{x},\mathbf{y} \in \Re^n$ e $\forall \lambda \in [0,1]$

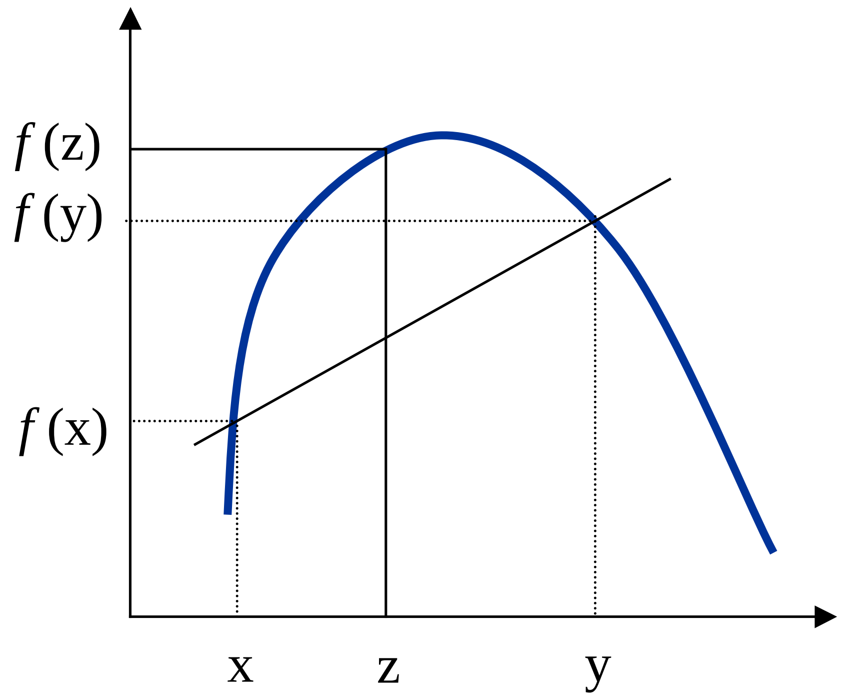
$$f(\lambda \mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y}) \geq \lambda f(\mathbf{x}) + (1-\lambda) f(\mathbf{y})$$



convexa



côncava

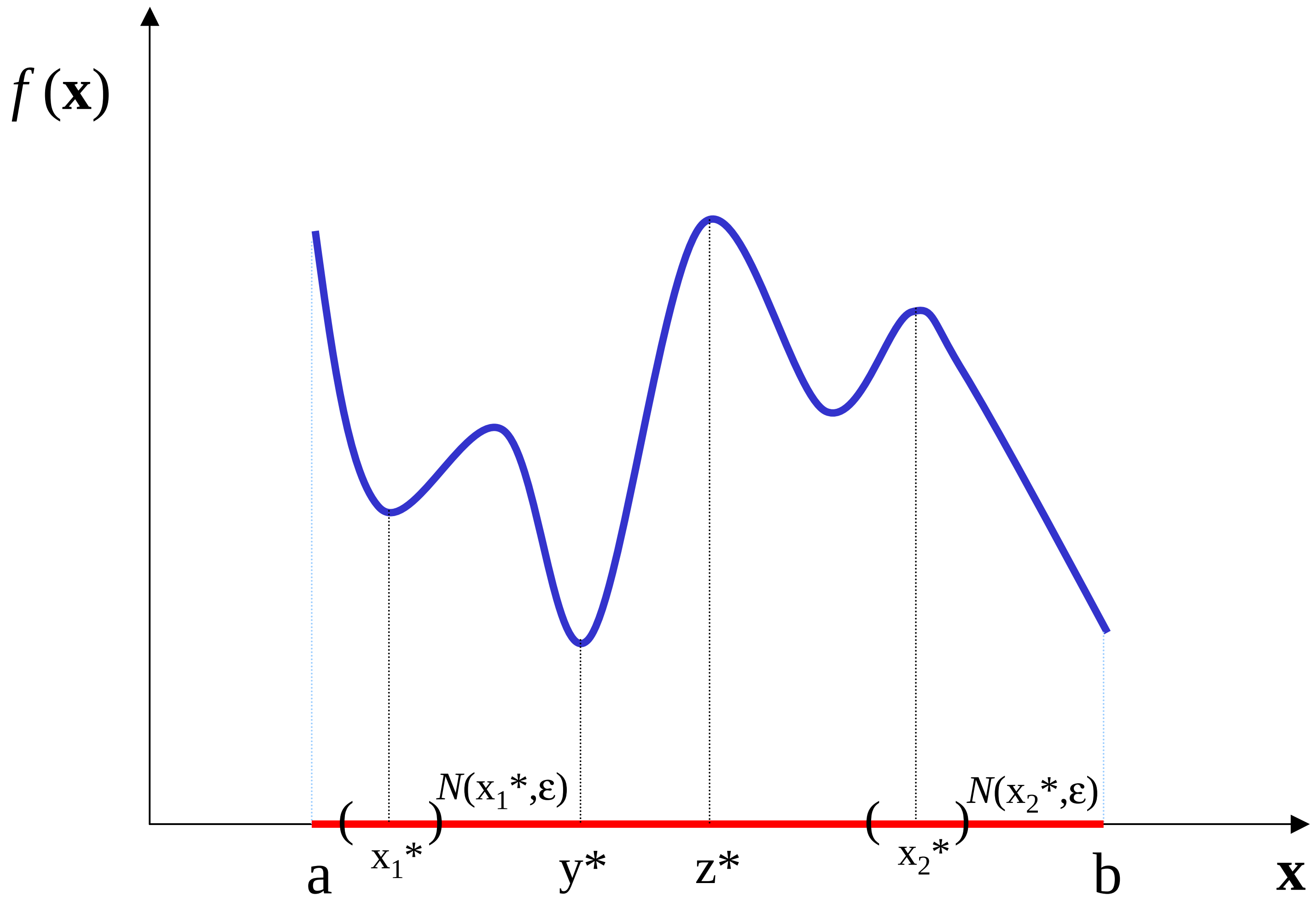


$$\min\ (\max) \quad f(\mathbf{x})$$

$$\text{sa} \qquad \mathbf{x} \in D \subseteq \Re^{n}$$

- **mínimo**
  - local: $f(\mathbf{x}^*) \leq f(\mathbf{x}) \;\; \forall \mathbf{x} \in N(\mathrm{x}^*, \varepsilon) \subset \mathrm{D}$
  - global: $f(\mathbf{x}^*) \leq f(\mathbf{x}) \;\; \forall \mathbf{x} \in D$

- **máximo**
  - local: $f(\mathbf{x}^*) \geq f(\mathbf{x}) \;\; \forall \mathbf{x} \in N(\mathrm{x}^*, \varepsilon) \subset D$
  - global: $f(\mathbf{x}^*) \geq f(\mathbf{x}) \;\; \forall \mathbf{x} \in D$



D = [a, b]

Teorema 1.1: Se $f_1,\ldots,f_m : \Re^n \to \Re$ são convexas, então a função

$f(\mathbf{x}) = \max_{i=1,\ldots,m} f_i(x)$ também é convexa.

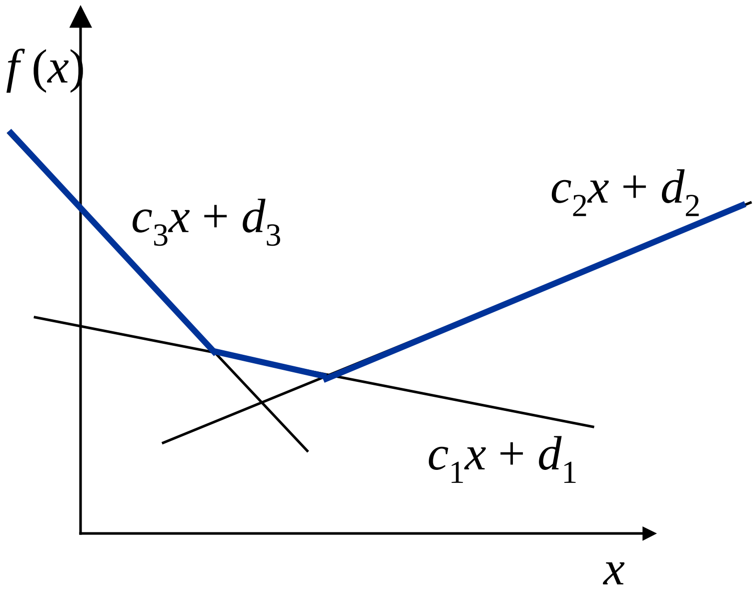
Prova: seja $x,y \in \Re^n$ e $\lambda \in [0,1]$.

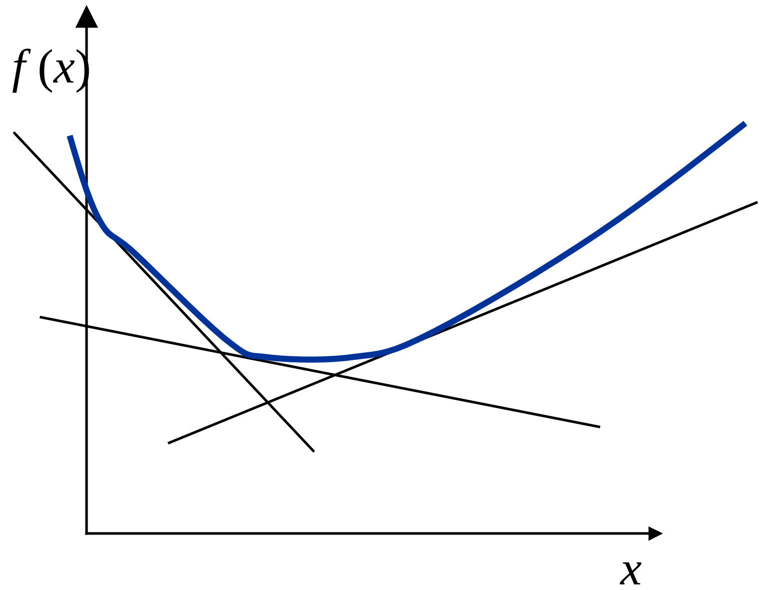
$$\begin{aligned}
f(\lambda\mathbf{x}+(1-\lambda)\mathbf{y}) &= \max_{i=1,\ldots,m} f_i(\lambda\mathbf{x}+(1-\lambda)\mathbf{y}) \\
&\le \max_{i=1,\ldots,m} (\lambda f_i(\mathbf{x})+(1-\lambda) f_i(\mathbf{y})) \\
&\le \max_{i=1,\ldots,m} \lambda f_i(\mathbf{x}) + \max_{i=1,\ldots,m} (1-\lambda) f_i(\mathbf{y}) \\
&= \lambda f(\mathbf{x})+(1-\lambda) f(\mathbf{y})
\end{aligned}$$

$\blacksquare$

Linear por partes: $f(\mathbf{x}) = \max_{\mathrm{i=1,\ldots,m}} (\mathbf{c}_i'\mathbf{x}+d_i)$

Exemplo: $f(\mathbf{x}) = |\,\mathbf{x}\,| = \max(\mathbf{x},-\mathbf{x})$





$$\min \; \max(\mathbf{c}_i'\mathbf{x} + d_i)$$
$$\text{sa} \quad \mathbf{Ax} \geq \mathbf{b}$$

$$\max_{i=1,\ldots,m} \; (\mathbf{c}_i'\mathbf{x} + d_i) \rightarrow \text{menor } z \text{ tal que } z \geq \mathbf{c}_i'\mathbf{x} + d_i, \forall i$$

$$\min \; z$$
$$\text{sa} \quad z \geq \mathbf{c}_i'\mathbf{x} + d_i, \; i = 1,\ldots,m$$
$$\mathbf{Ax} \geq \mathbf{b}$$

$$\min \sum_{i=1}^{n} c_i \, | x_i | \quad , \quad c_i \geq 0$$

$$\text{sa} \quad \mathbf{Ax} \geq \mathbf{b}$$

soma funções convexas $\rightarrow$ função convexa
(Exercício 1.2)

$| x_i |$ = menor z_i tal que $x_i \leq z_i$ e $- x_i \leq z_i$

$$\min \sum_{i=1}^{n} c_i z_i \quad , \quad c_i \geq 0$$

$$\begin{aligned} \text{sa} \quad & \mathbf{Ax} \geq \mathbf{b} \\ & x_i \leq z_i \, , \; i = 1, \ldots, n \\ & - x_i \leq z_i \, , \; i = 1, \ldots, n \end{aligned}$$

Exemplo: regressão linear

Dados: $(\mathbf{a}_i, b_i)$, $i = 1,\ldots,m$, $\mathbf{a}_i, \in \Re^n$, $b_i \in \Re$

Construir modelo para prever valor de b a partir de $\mathbf{a}$

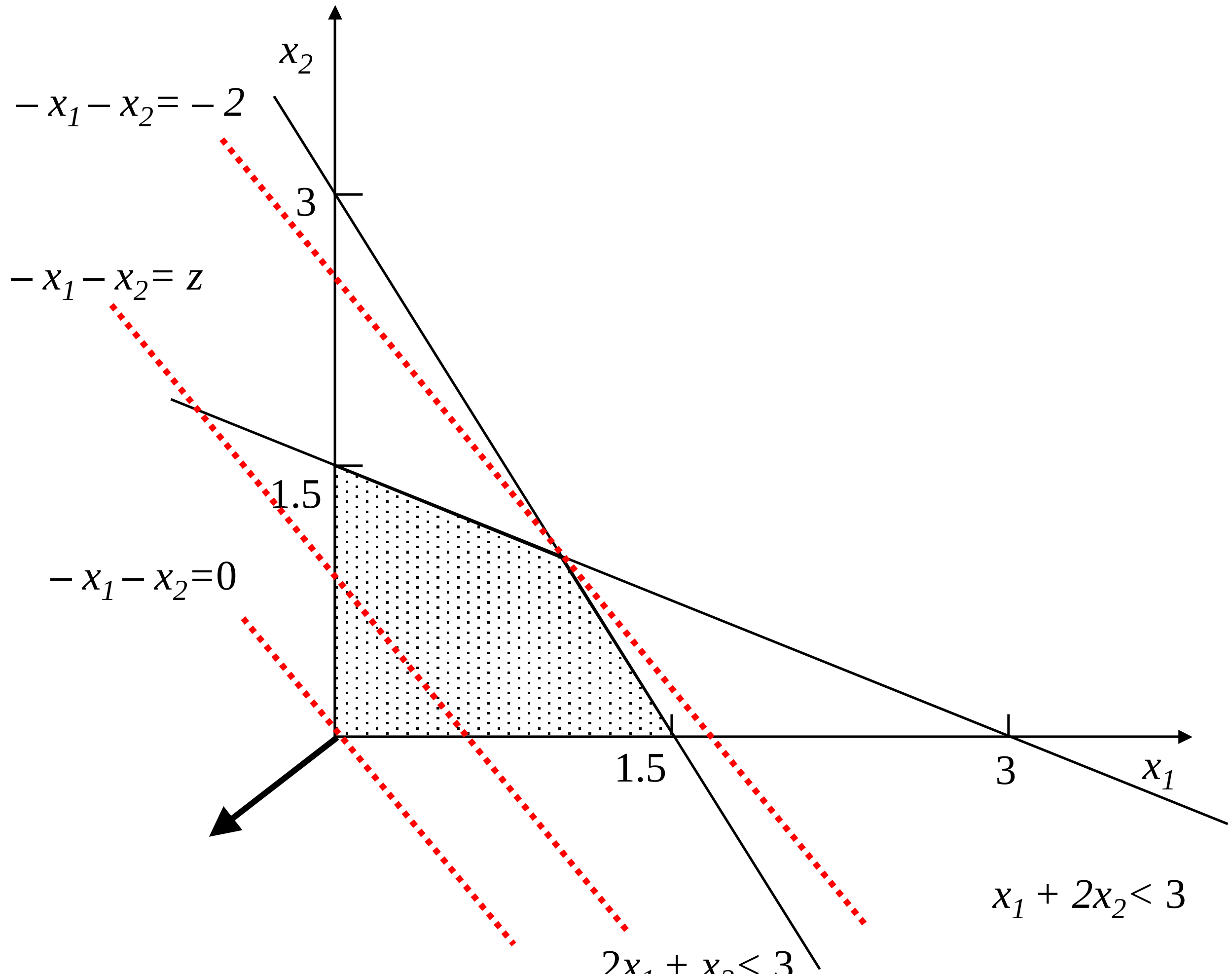
Modelo linear: $b = \mathbf{a}'\mathbf{x}$, parâmetro $\mathbf{x}$ é estimado para minimizar resíduos

Exemplo: minimizar o maior resíduo

$$\min \max_i |b_i - \mathbf{a}_i'\mathbf{x}| \longrightarrow \begin{array}{ll} \min & z \\ \text{sa} & b_i - \mathbf{a}_i'\mathbf{x} \le z,\ i = 1,\ldots,m \\ & -b_i + \mathbf{a}_i'\mathbf{x} \le z,\ i = 1,\ldots,m \end{array}$$

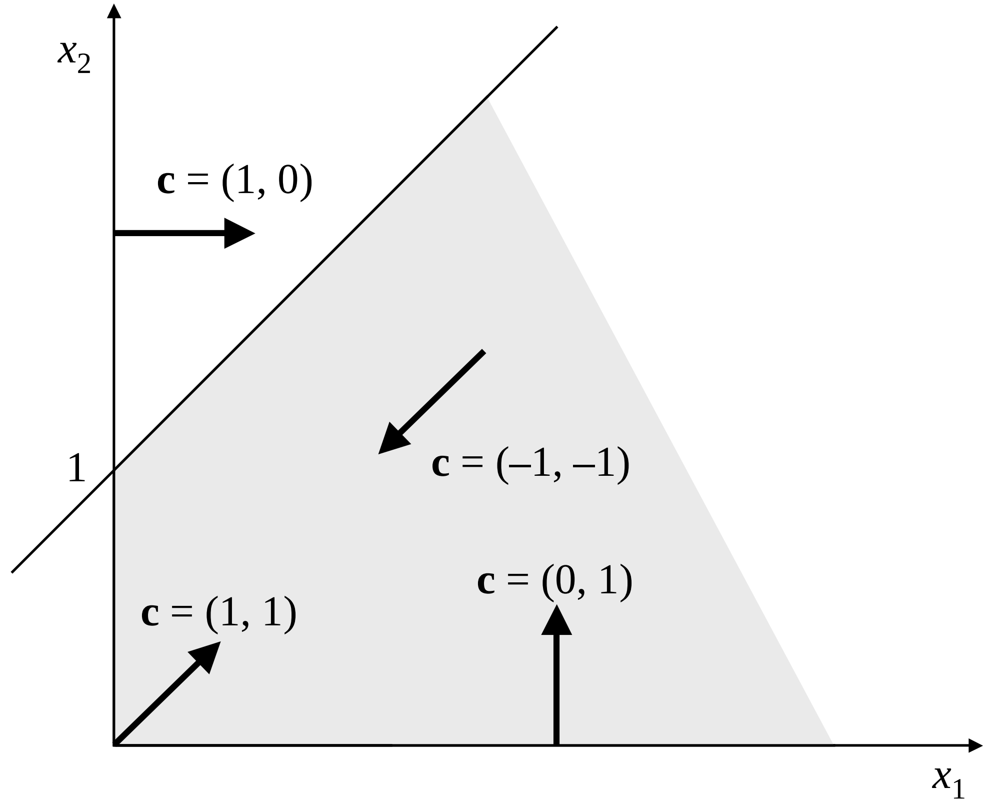
4-Representação gráfica e solução

$$\begin{aligned} \min \quad & -x_1 - x_2 \\ \text{sa} \quad & x_1 + 2x_2 \leq 3 \\ & 2x_1 + x_2 \leq 3 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$



$$-x_1 + x_2 \leq 1$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

min



(a) Existe uma solução ótima única ($\mathbf{c} = (1, 1)$)

(b) Existem múltiplas soluções ótimas, limitadas ou não ($\mathbf{c} = (1, 0)$, $\mathbf{c} = (0, 1)$)

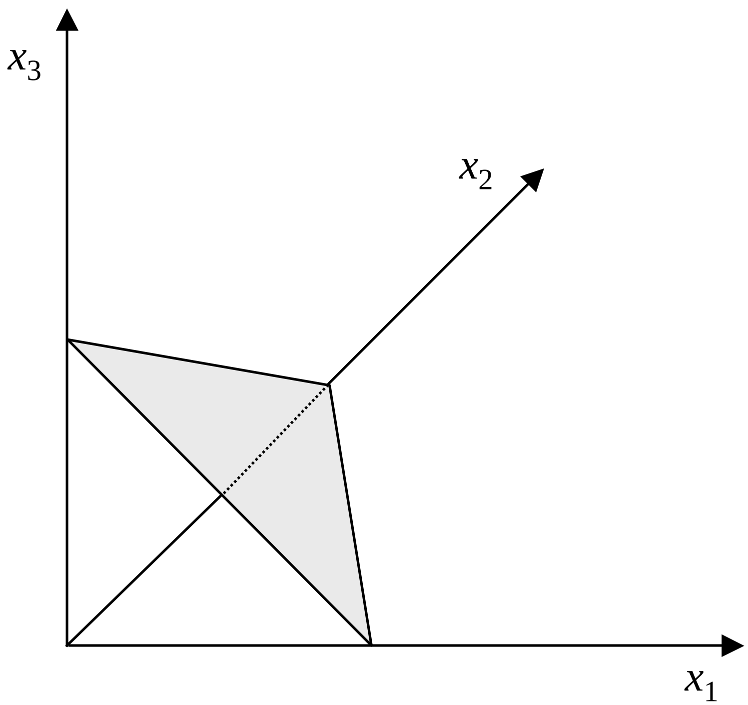
(c) Valor ótimo é $-\infty$ e nunhuma solução factível é ótima ($\mathbf{c} = (-1, -1)$)

(d) Conjunto soluções factíveis é vazio

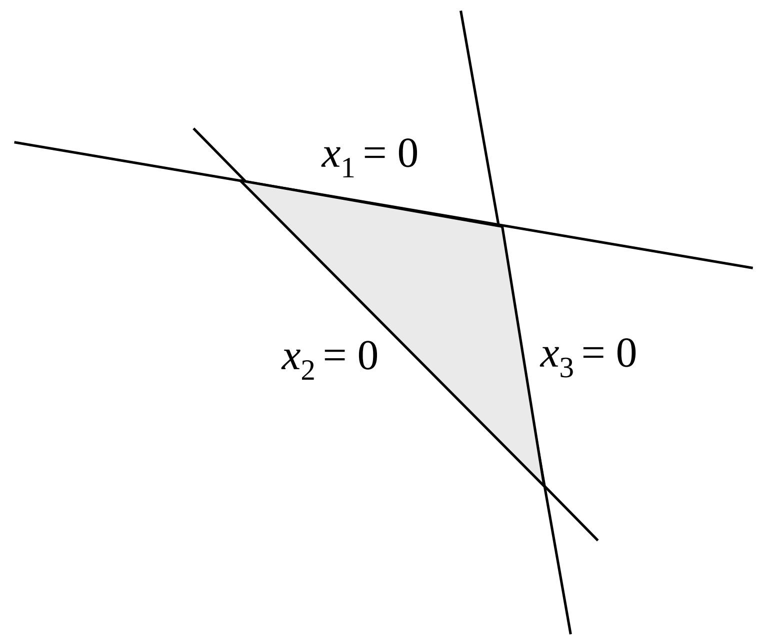
Visualização na forma padrão

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1, \quad m = 1$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0, \quad \mathbf{x} \in \Re^3, \; n = 3$$



espaço dimensão n



espaço dimensão $(n\text{–}m)$

5-Revisão de álgebra linear e notação

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \left[a_{ij}\right],\ a_{ij} \in \Re,\ \mathbf{A} \text{ matriz } m \times n$$

$$a_{ij} = [\mathbf{A}]_{ij}, \quad (i, j) - \text{ésimo elemento de } \mathbf{A}$$

$$\mathbf{x} \in \Re^n,\ x_1, x_2, \ldots, x_n \ \text{ componentes de } \mathbf{x}$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = (x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad \mathbf{e}_i = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow i - \text{ésima componente (vetor unitário)}$$

$$\mathbf{A}' = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \ \mathbf{A}' \text{ matriz } n \times m$$

$$[\mathbf{A}']_{ij} = [\mathbf{A}]_{ji}$$

$$\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Re^n, \quad \mathbf{x}'\mathbf{y} = \mathbf{y}'\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \quad \text{produto escalar de } \mathbf{x} \text{ e } \mathbf{y}$$

$$\mathbf{x}'\mathbf{y} = 0, \ \mathbf{x} \text{ e } \mathbf{y} \text{ ortogonais}, \quad \mathbf{x}'\mathbf{x} \geq 0 \ \forall \mathbf{x}$$

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\mathbf{x}'\mathbf{x}}, \quad \text{norma Euclidiana de } \mathbf{x}$$

$$|\,\mathbf{x}'\mathbf{y}\,| \leq \|\mathbf{x}\|.\|\mathbf{y}\|, \text{ desigualdade de Cauchy} - \text{Schwarz}$$

$$\mathbf{A} = [\mathbf{A}_1 \quad \mathbf{A}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{A}_n] = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1' \\ \mathbf{a}_2' \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m' \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_j = (a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{mj})$$

$$\mathbf{a}_i = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in})$$

$$\mathbf{A}(m \times n),\ \ \mathbf{B}(n \times k) \rightarrow \text{ produto } \mathbf{AB}\,(m \times k)$$

$$[\mathbf{A}, \mathbf{B}]_{ij} = \sum_{l=1}^{n} [\mathbf{A}]_{il} [\mathbf{B}_{lj}] = \mathbf{a}_i' \mathbf{B}_j$$

$$(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC}) \quad \text{associativo}$$

$$\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA} \quad \text{em geral não comutativo}$$

$$\mathbf{A}(m\times n),\ \mathbf{A}=[\mathbf{A}_1\cdots\mathbf{A}_i\cdots\mathbf{A}_n]$$

$$\mathbf{A}\mathbf{e}_i=\mathbf{A}_i$$

$$\mathbf{x}\in\Re^n\rightarrow\mathbf{x}=\sum_{i=1}^{n}x_i\mathbf{e}_i$$

$$\mathbf{A}\mathbf{x}=\mathbf{A}\sum_{i=1}^{n}x_i\mathbf{e}_i=\sum_{i=1}^{n}\mathbf{A}_i x_i$$

$$\mathbf{A}\mathbf{x}=\begin{bmatrix}\mathbf{a}_1'\mathbf{x}\\ \mathbf{a}_2'\mathbf{x}\\ \vdots\\ \mathbf{a}_m'\mathbf{x}\end{bmatrix},\ \mathbf{a}_1',\ldots,\mathbf{a}_m'\ \text{linhas de }\mathbf{A}$$

$$\mathbf{x} \geq 0\ (\mathbf{x} > 0) \rightarrow x_i \geq 0\ \ (x_i > 0)\ \forall i,\, i = 1,\ldots,n$$

$$\mathbf{A} \geq 0 (\mathbf{A} > 0) \rightarrow [\mathbf{A}]_{ij} \geq 0\ \ ([\mathbf{A}]_{ij} > 0)\ \forall (i,j),\, i = 1,\ldots,m,\ j = 1,\ldots,n$$

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \ \text{identidade}$$

$\mathbf{IA} = \mathbf{A},\ \mathbf{BI} = \mathbf{B},$ (dimensões de $\mathbf{I}$ compatíveis com $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$)

$\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{I} \rightarrow \mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1} \rightarrow$ inversa de $\mathbf{A}$ (se existir)

$(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$ (se $\mathbf{A}^{-1}$ e $\mathbf{B}^{-1}$ existirem)

$\mathbf{x}^1,\ldots,\mathbf{x}^K \in \Re^n$ são linearmente dependentes (LD) se

$$\sum_{k=1}^{K} a_k \mathbf{x}^k = 0, \quad a_1,\ldots,a_k \text{ não todos nulos}$$

caso contrário, são linearmente independentes (LI)

Teorema 1.2: Seja $\mathbf{A}$ uma matriz quadrada. As seguintes afirmações são equivalentes:

(a) $\mathbf{A}$ é inversível
(b) $\mathbf{A}'$ é inversível
(c) Determinante de $\mathbf{A}$ não é nulo
(d) Linhas de $\mathbf{A}$ são linearmente independentes
(e) Colunas de $\mathbf{A}$ são linearmente independentes
(f) Para todo vetor $\mathbf{b}$, $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ possui solução única
(g) Existe um vetor $\mathbf{b}$ que é solução única de $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$.

$\mathbf{Ax} = \mathbf{b},\ \mathbf{A}$ inversível $\rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$

$$x_j = \frac{det(\mathbf{A}^j)}{det(\mathbf{A})},\ A^j = [\mathbf{A}_1,\ldots,\mathbf{A}_{j-1},\mathbf{b},\mathbf{A}_{j+1},\ldots,\mathbf{A}_n]\ \text{(Cramer)}$$

$S \subseteq \Re^n, S \neq \phi$, é um subespaço de $\Re^n \leftrightarrow \forall \mathbf{x},\mathbf{y} \in S \rightarrow a\mathbf{x} + b\mathbf{y} \in S,\ a,b \in \Re$

$S \neq \Re^n \rightarrow$ subespaço própio; vetor nulo é um elemento de S

Espaço gerado (*span*) por um número finito de vetores $\mathbf{x}^1,\ldots,\mathbf{x}^K$ em $\Re^n$

Span $\rightarrow$ subespaço de $\Re^n \rightarrow$ coleção dos vetores $\mathbf{y} = \sum_{k=1}^{K} a_k \mathbf{x}^k,\ a_k \in \Re\ \forall k$

$\mathbf{y}$ = combinação linear de $\mathbf{x}^1,\ldots,\mathbf{x}^K$

Observação:

Combinação linear $\mathbf{y} = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \mathbf{x}^i$ é

combinação convexa se $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1,\ \lambda_i \geq 0,\ i = 1, \cdots, m$

combinação afim se $\sum_{k=1}^{m} \lambda_k = 1$

combinação conica se $\lambda_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, m$

Base de um subespaço $S \subseteq \Re^n, S \neq \{0\} \rightarrow$ conjunto de vetores LI que gera S

S subespaço própio $\Re^n \rightarrow \exists \mathbf{a} \neq 0 | \mathbf{a}'\mathbf{x} = 0 \ \forall \mathbf{x} \in S \rightarrow \mathbf{a}$ ortogonal a S

$dim(S) = m < n \rightarrow \exists (n-m)$ vetores LI ortogonais a S

Teorema 1.3: Se o espaço gerado pelos vetores $\mathbf{x}^1,\ldots,\mathbf{x}^K$ tem dimensão m, então:

(a) Existe uma base de S composta por m dos vetores $\mathbf{x}^1,\ldots,\mathbf{x}^K$
(b) Se $k \leq m$ e $\mathbf{x}^1,\ldots,\mathbf{x}^k$ são LI, podemos formar uma base para S tomando $\mathbf{x}^1,\ldots,\mathbf{x}^k$ e escolhendo $m - k$ vetores entre $\mathbf{x}^1,\ldots,\mathbf{x}^K$

Prova :

(a) caso particular de (b) para $k = 0$.

(b) se todo vetor $\mathbf{x}^{k+1},\ldots,\mathbf{x}^{K}$ pode ser expresso como combinação linear de $\mathbf{x}^{1},\ldots,\mathbf{x}^{k}$, então cada vetor do subespaço gerado por $\mathbf{x}^{1},\ldots,\mathbf{x}^{K}$ também é uma combinação linear de $\mathbf{x}^{1},\ldots,\mathbf{x}^{K}$ e estes vetores formam uma base (em particular, $m = k$);

caso contrário, pelo menos um dos vetores $\mathbf{x}^{k+1},\ldots,\mathbf{x}^{K}$ é LI de $\mathbf{x}^{1},\ldots,\mathbf{x}^{k}$, tomando este vetor, teremos $k+1$ dos vetores $\mathbf{x}^{1},\ldots,\mathbf{x}^{K}$ LI

repetindo este processo *k*-*m* vezes nós obtemos uma base para S.

Espaço coluna de $\mathbf{A}(m \times n) \rightarrow$ subespaço de $\Re^m$

Espaço linha de $\mathbf{A}(m \times n) \rightarrow$ subespaço de $\Re^n$

Dimensão espaço coluna $\mathbf{A}$ = dimensão espaço linha $\mathbf{A}$ = posto de $\mathbf{A} = \rho(\mathbf{A})$

$\rho(\mathbf{A}) \leq \min\{m, n\} \; = rank(\mathbf{A})$

$\mathbf{A}$ posto pleno $\rightarrow \rho(\mathbf{A}) = \min\{m, n\} \; = rank(\mathbf{A})$

Espaço nulo de $\mathbf{A} \rightarrow \{\mathbf{x} \in \Re^{\mathrm{n}} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = 0\}$

Dimensão espaço nulo $= n - \mathrm{rank}(\mathbf{A})$

S_0 subespaço de $\Re^n$ e $\mathbf{x}^0$ um vetor

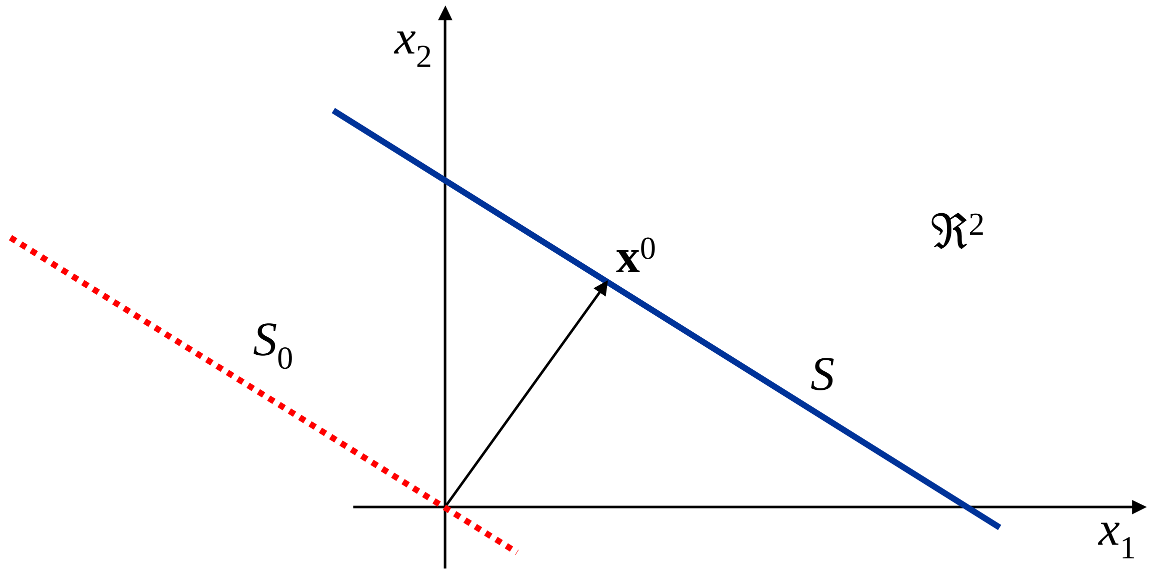
$S = S_0 + \mathbf{x}^0 = \{\mathbf{x} + \mathbf{x}^0 \mid \mathbf{x} \in S_0\}$ subespaço afim

$dim(S) = dim(S_0)$

Exemplo : $\mathbf{x}^0, \mathbf{x}^1, \ldots, \mathbf{x}^k$ vetores $\Re^n \rightarrow S = \{\mathbf{y} \in \Re^n \mid \mathbf{y} = \mathbf{x}^0 + \lambda_1 \mathbf{x}^1 + \ldots + \lambda_k \mathbf{x}^k\}$

$S_0 =$ subespaço gerado por $\mathbf{x}^1, \ldots, \mathbf{x}^k$

Se $\mathbf{x}^1, \ldots, \mathbf{x}^k$ são LI $dim(S) = dim(S_0) = k$



6-Complexidade de algoritmos

Problemas otimização (computacionais): resolvidos com algoritmos

Algoritmo: conjunto finito de instruções similares as de uma linguagem de programação (operações aritméticas, condicionais, etc.)

Tempo execução: depende eficiência programação, hardware, etc.

Análise de complexidade: interesse no desempenho do algoritmos sem entrar em detalhes de uma implementação particular

Abordagem: aproximação via contagem de operações aritméticas

Exemplo: multiplicação matrizes $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ $(n \times n) \rightarrow (2n-1)n^2$ operações

Contagem exata muito difícil $\rightarrow$ ordem de magnitude suficiente

Exemplo: multiplicação de matrizes $(n \times n) \rightarrow$ varia com n^3

Definição 1.2: Sejam $f\,,\, g : \Re^{+} \rightarrow \Re^{+}$ funções.

(a) $f(n) = O\,(g(n)\,)$ se $\exists n_o > 0$ e $c > 0$ tal que $f(n) \leq cg(n)\ \forall n \geq n_o$.

(b) $f(n) = \Omega\,(g(n)\,)$ se $\exists n_o > 0$ e $c > 0$ tal que $f(n) \geq cg(n)\ \forall n \geq n_o$.

(c) $f(n) = \Theta\,(g(n)\,)$ se $f(n) = O\,(g(n)\,)$ e $(n) = \Omega\,(g(n)\,)$.

Exemplo: $3\,n^3 + n^2 + 10 = \Theta\,(n^3)$, $\;n \log n = O\,(n^2)$, $\;n \log n = \Omega\,(n)$

Complexidade polinomial: $O\,(n^k)$

Complexidade exponencial: $\Omega\,(2^{cn})$

Observação

Este material refere-se às notas de aula do curso IA 881 Otimização Linear da Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação da Unicamp. Não substitui o livro texto, as referências recomendadas e nem as aulas expositivas. Este material não pode ser reproduzido sem autorização prévia dos autores. Quando autorizado, seu uso é exclusivo para atividades de ensino e pesquisa em instituições sem fins lucrativos.