IA 881 Otimização Linear

2-Geometria da Programação Linear

Conteúdo

1. Poliedros e conjuntos convexos
2. Pontos extremos, vértices, soluções básicas factíveis
3. Poliedros na forma padrão
4. Degeneração
5. Existência de pontos extremos
6. Otimalidade de pontos extremos
7. Representação de poliedros limitados
8. Projeções de poliedros: eliminação de Fourier-Motzkin

1-Poliedros e conjuntos convexos

Definição 2.1 Um poliedro é um conjunto que pode ser descrito por $\{\mathbf{x} \in \Re^n \mid \mathbf{Ax} \geq \mathbf{b}\}$, $\mathbf{A}$ é uma matriz $(m \times n)$, $\mathbf{b}$ um vetor do $\Re^m$.

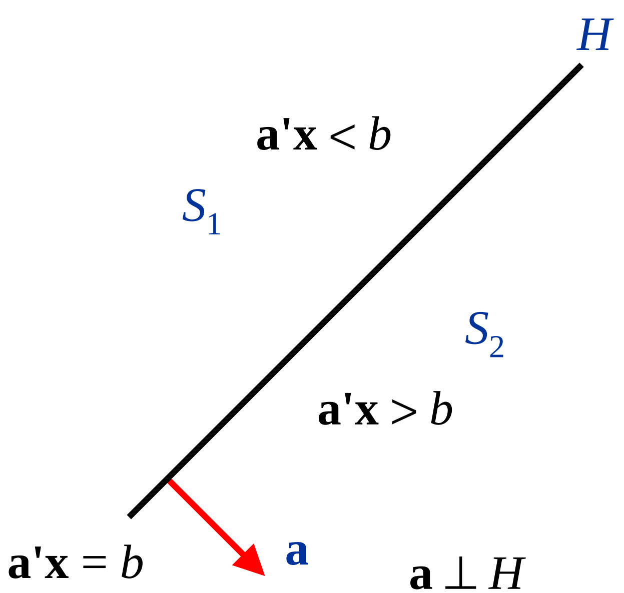
Restrições de igualdade $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, $\mathbf{x} \geq 0$ (forma padrão) é um poliedro

Definição 2.2 Um conjunto $S \subset \Re^n$ é limitado se existe uma constante K tal que o valor absoluto de toda componente de todo elemento de S é menor que ou igual a K.

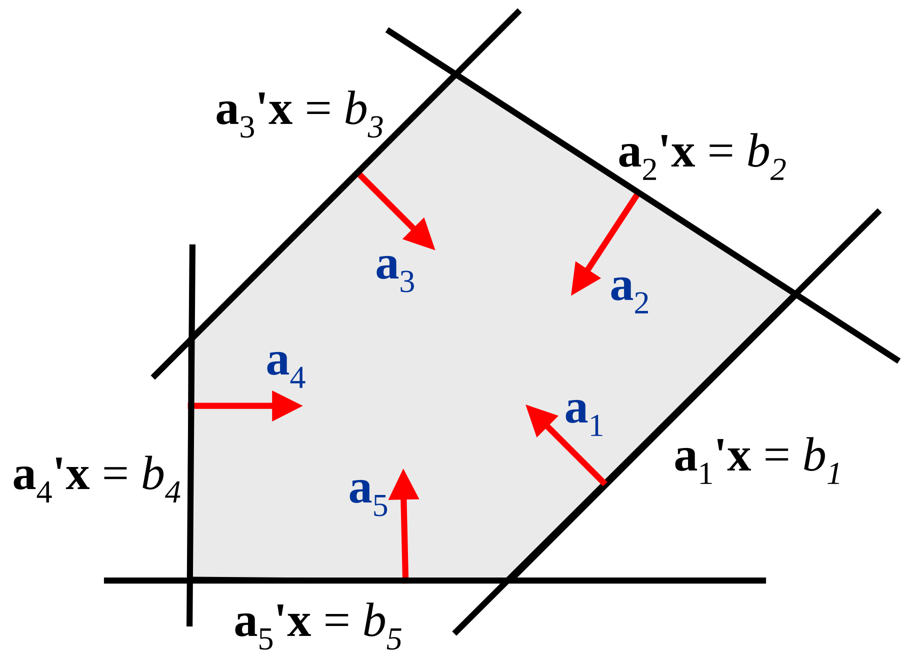
Definição 2.3 Seja $\mathbf{a}$ um vetor $\neq 0$ do $\Re^n$ | e b um escalar.

(a) O conjunto $\{\mathbf{x} \in \Re^n \mid \mathbf{a}'\mathbf{x} = b\}$ é um hiperplano.
(b) O conjunto $\{\mathbf{x} \in \Re^n \mid \mathbf{a}'\mathbf{x} \geq b\}$ é um semiespaço.

Um poliedro é a interseção de um número finito de semiespaços



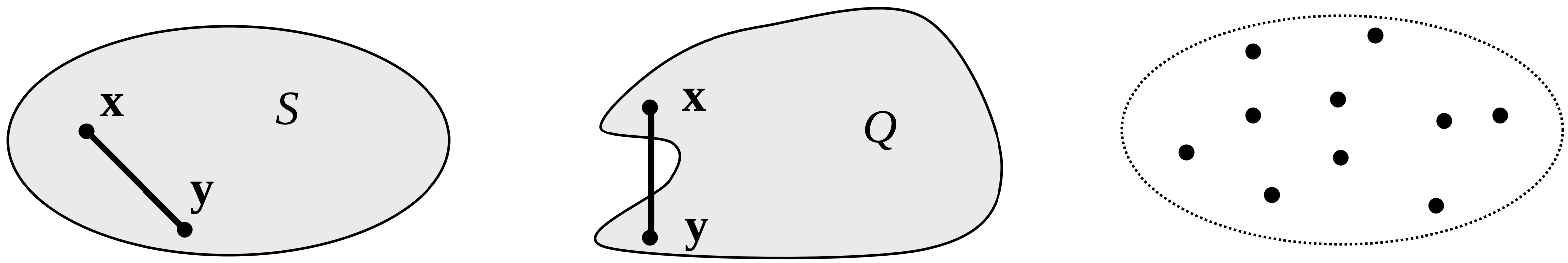
Hiperplano H e dois semiespaços S_1e S_2



Poliedro $P = \{\mathbf{x} \in \Re^2 \mid \mathbf{a}_i'\mathbf{x} \geq b_i,\ i = 1,\ldots,5\}$

$\mathbf{a}_i \perp H_i = \{\mathbf{x} \in \Re^2 \mid \mathrm{a}_i'\mathrm{x} = b_i\}$

Definição 2.4 Um conjunto $S \subset \Re^n$ é convexo se para qualquer $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in S$ e qualquer $\lambda \in [0,1]$ temos $\lambda\mathbf{x} + (1 - \lambda)\,\mathbf{y} \in S$.



convexo

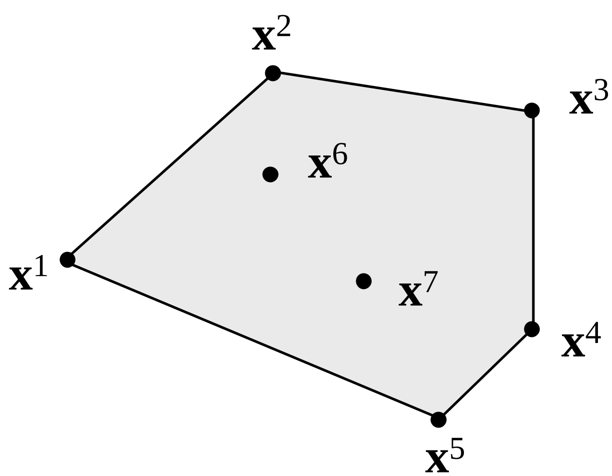
não convexo

convexo ??

Definição 2.5 Sejam $\mathbf{x}^1,\ldots,\mathbf{x}^k$ vetores em $\Re^n$ e $\lambda_1,..,\lambda_k$, escalares não negativos cuja soma é a unidade.

(a) O vetor $\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\mathbf{x}^i$ é a combinação convexa de $\mathbf{x}^1,\ldots,\mathbf{x}^k$

(b) A envoltória convexa (*convex hull*) dos vetores $\mathbf{x}^1,\ldots,\mathbf{x}^k$ é o conjunto de todas as combinações convexas destes vetores



envoltória convexa de $\mathbf{x}^1,\ldots,\mathbf{x}^k$

Teorema 2.1

(a) Interseção de conjunto convexos é convexa.
(b) Poliedros são conjuntos convexos.
(c) Combinação convexa de um número finito de elementos de um conjunto convexo pertence a este mesmo conjunto
(d) Envoltória convexa de um número finito de vetores é um conjunto convexo.

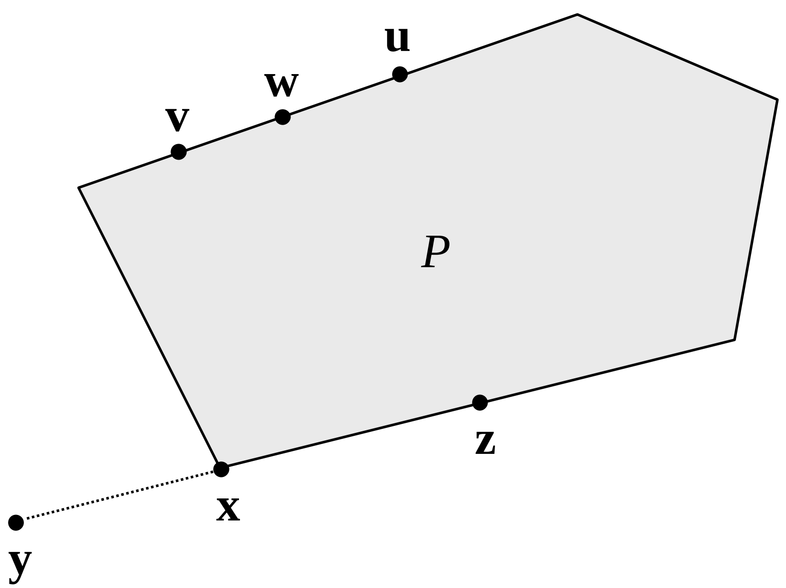
Prova:

(a) Sejam $S_i, i \in \mathrm{I}$, conjuntos convexos e suponha que $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \bigcap_{i \in \mathrm{I}} S_i$.
Seja $\lambda \in [0,1]$. Como cada S_i é convexo e contém $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$, temos
$\lambda \mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y} \in S_i$ o que mostra que este ponto também pertence
à interseção dos conjuntos S_i. Portanto $\bigcap_{i \in \mathrm{I}} S_i$ é convexo.

(b, c, d) EPC. ■

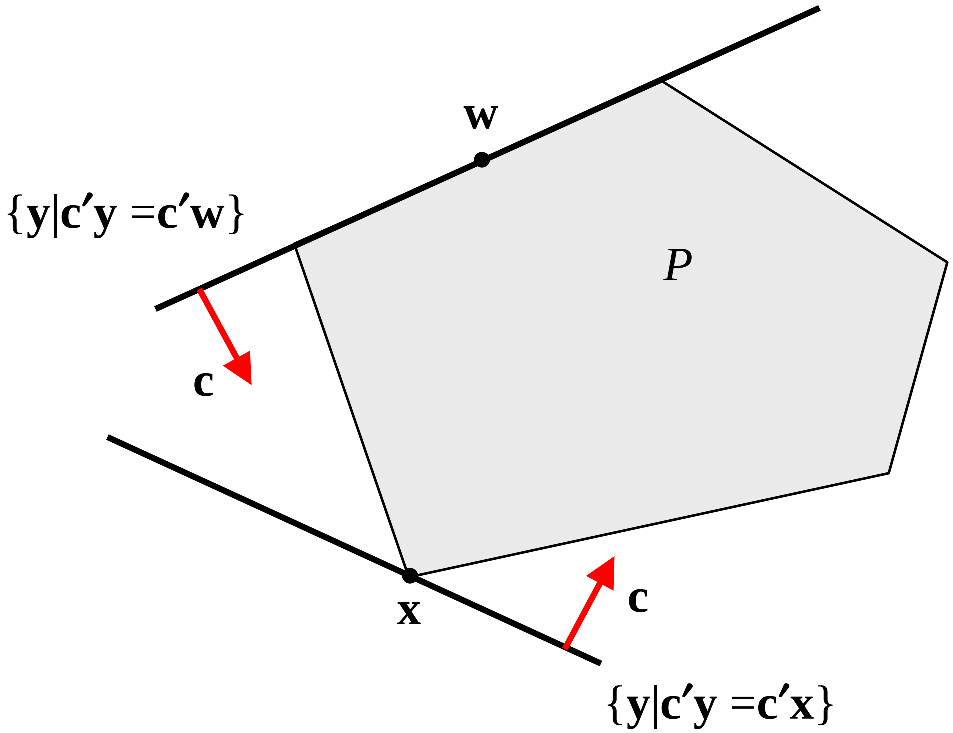
2-Pontos extremos, vértices, soluções básicas factíveis

Definição 2.6 Seja P um poliedro. Um vetor $\mathbf{x} \in P$ é um ponto extremo de P se não podemos encontrar dois vetores $\mathbf{y}$, $\mathbf{z} \in P$, diferentes de $\mathbf{x}$, e um escalar $\lambda \in [0,1]$ tal que $\mathbf{x} = \lambda \mathbf{y} + (1 - \lambda)\, \mathbf{z}$.



Definição 2.7 Seja P um poliedro. Um vetor $\mathbf{x} \in P$ é um vértice de P se existe algum $\mathbf{c}$ tal que $\mathbf{c}'\mathbf{x} < \mathbf{c}'\mathbf{y}$ para todo $\mathbf{y}$ satisfaz

$\mathbf{y} \in P$ e $\mathbf{y} \neq \mathbf{x}$.



Poliedro definido pelas seguintes restrições de desigualdade e igualdade

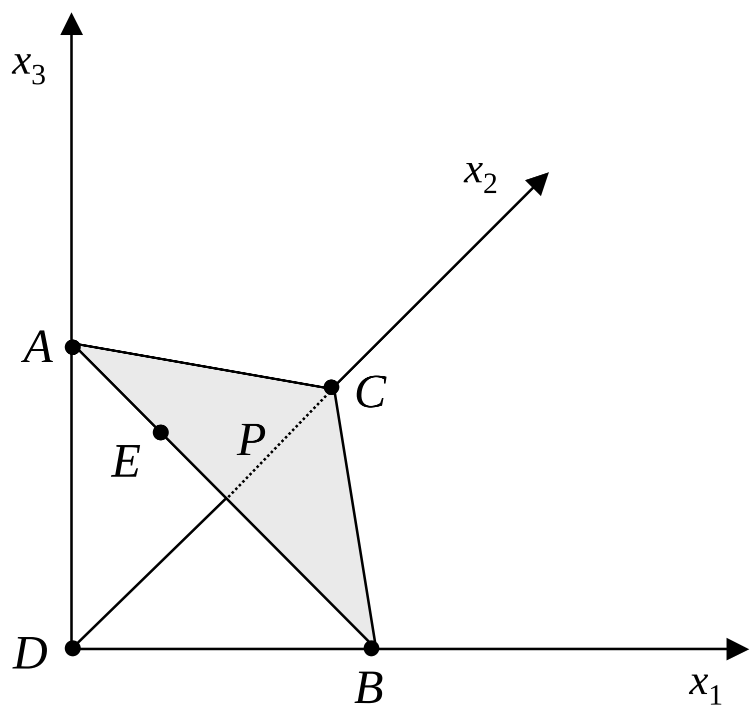
$$\mathbf{a}_i'\mathbf{x} \geq b_i\,,\ i \in M_1$$

$$\mathbf{a}_i'\mathbf{x} \leq b_i\,,\ i \in M_2$$

$$\mathbf{a}_i'\mathbf{x} = b_i\,,\ i \in M_3$$

$$\mathbf{a}_i \in \Re^n, \quad b_i \text{ escalares}$$

Definição 2.8 Se um vetor $\mathbf{x}^*$ satisfaz $a_i'\mathbf{x}^* = b_i$ para algum $i \in M_1, M_2, M_3$ então a restrição correspondente está ativa em $\mathbf{x}^*$.



Teorema 2.2 Seja $\mathbf{x}^*$ um elemento do $\Re^n$ e $\mathrm{I} = \{i \mid \mathbf{a}'_i \mathbf{x}^* = b_i\}$ o conjunto de índices das restrições ativas. As seguintes afirmações são equivalentes:

(a) Existem n vetores no conjunto $\{\mathbf{a}_i \mid i \in \mathrm{I}\}$ que são LI.

(b) O espaço gerado pelos vetores $\mathbf{a}_i$, $i \in \mathrm{I}$, é o $\Re^n$, isto é, todo elemento do $\Re^n$ pode ser expresso como uma combinação linear dos vetores $\mathbf{a}_i$, $i \in \mathrm{I}$.

(c) O sistema de equações $\mathbf{a}'_i \mathbf{x} = b_i$, $i \in \mathrm{I}$, possui solução única.

Prova :

$(\rightarrow)$ Suponha que vetores $\mathbf{a}_i, i \in \mathrm{I}$, gerem o $\Re^n$. Então, o espaço gerado por $\mathbf{a}_i, i \in \mathrm{I}$ tem dimensão n, $dim\ (span(\{a_i, i \in I\})) = n$ e n destes vetores formam uma base $\Re^n$ e são LI (Teorema 1.3).

$(\leftarrow)$ Suponha que n dos vetores $\mathbf{a}_i, i \in \mathrm{I}$ sejam LI. O subespaço gerado por estes n vetores tem $dim(span\{a_i, i \in I\}) = n$ e deve ser igual ao $\Re^n$. Logo, todo elemento do $\Re^n$ é uma combinação linear dos vetores $a_i, i \in I$. (equivalência (a) e (b)).

Equivalência entre (b, c) EPC. ■

$\mathbf{a}_i$ linearmente independentes $\rightarrow$ "restrições correspondentes são LI"

Teorema 2.2(a): temos n restrições LI ativas em $\mathbf{x}^*$.

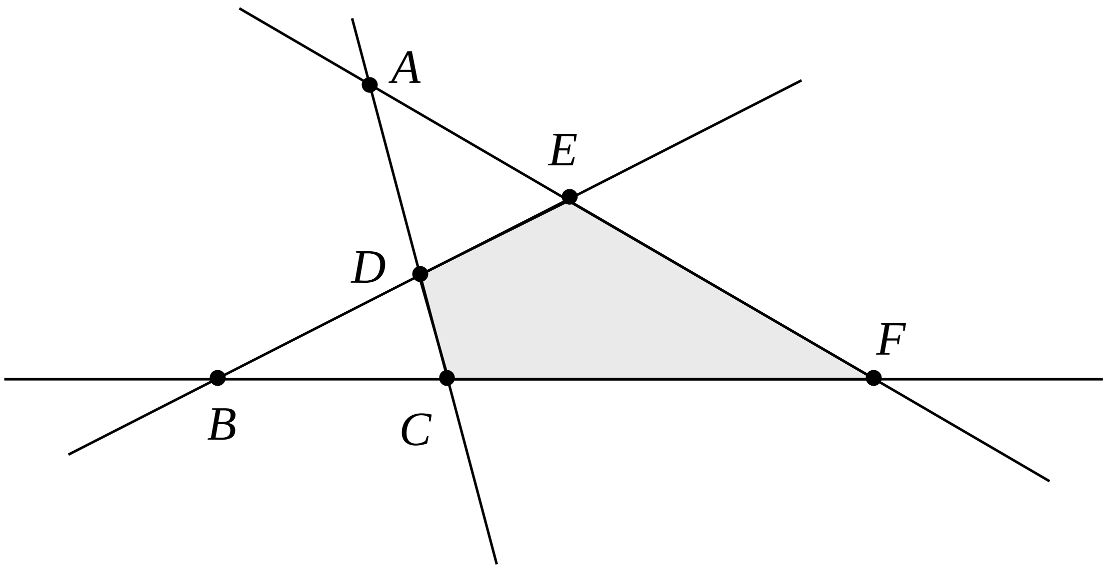
Definição 2.9 Considere um poliedro P definido por restrições de igualdade e desigualdade, e seja $\mathbf{x}^*$ um elemento de $\Re^n$.

(a) O vetor $\mathbf{x}^*$ é uma solução básica se

(i) todas as restrições de igualdade estão ativas,

(ii) entre as restrições que estão ativas em $\mathbf{x}^*$, n delas são LI,

(b) Se $\mathbf{x}^*$ é uma solução básica que satisfaz todas as restrições, então ela é uma solução básica factível.



Teorema 2.3 Seja P um poliedro não vazio e $\mathbf{x}^* \in P$. As seguintes afirmações são equivalentes:

(a) $\mathbf{x}^*$ é um vértice.
(b) $\mathbf{x}^*$ é um ponto extremo.
(c) $\mathbf{x}^*$ é uma solução básica factível.

Prova: Assume P representado por $\mathbf{a}_i'\mathbf{x} \geq b_i$ e $\mathbf{a}_i'x = b_i$.

Vértice $\Rightarrow$ Ponto extremo. Suponha que $\mathbf{x}^* \in$ P é um vértice.

Definição 2.7 $\rightarrow \exists \mathbf{c} \in \Re^n$ tal que $\mathbf{c}'\mathbf{x}^* < \mathbf{c}'\mathbf{y}, \forall \mathbf{y} \in P,\ \mathbf{y} \neq \mathbf{x}^*$.

Se $\mathbf{y} \in P, \mathbf{z} \in P, \mathbf{y} \neq \mathbf{x}^*, \mathbf{z} \neq \mathbf{x}^*\ e\ 0 \leq \lambda \leq 1,$ então $\mathbf{c}'\mathbf{x}^* < \mathbf{c}'\mathbf{y}$ e $\mathbf{c}'\mathbf{x}^* < \mathbf{c}'\mathbf{z}$ implica que $\mathbf{c}'\mathbf{x}^* < \mathbf{c}'(\lambda\mathbf{y} + (1-\lambda)\mathbf{z})$. Portanto $\mathbf{x}^* \neq \lambda\mathbf{y} + (1-\lambda)\mathbf{z}$ e não pode ser representado por uma combinação convexa de dois outros elementos de P. Logo, $\mathbf{x}^*$ é ponto extremo.

Ponto extremo $\Rightarrow$ solução básica factível EPC

Solução básica factível $\Rightarrow$ vértice EPC ■

Corolário 2.1 Dado um número finito de restrições desigualdade lineares, existe somente um número finito de soluções básicas ou soluções básicas factíveis.

Prova :

Considerar m restrições lineares de desigualdade impostas a $\mathbf{x} \in \Re^n$.

Existem n restrições ativas *linearmente indepentes* em todas as soluções básicas.

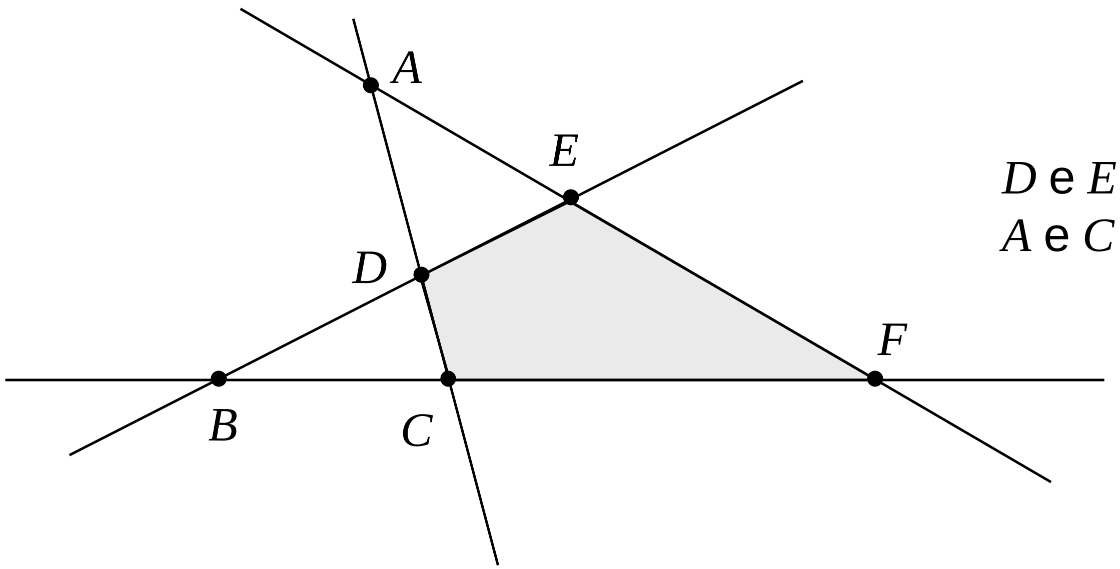
n restrições ativas *linearmente indepentes* $\rightarrow$ definem um único ponto.

Logo, soluções básicas distintas correspondem a conjuntos de n restrições de igualdade linearmente independentes distintos $\rightarrow$ número de soluções básicas tem um limite superior que é o número de combinações que podemos escolher n restriçoes no total de m. ■

OBS: número finito, mas pode ser muito grande! Exemplo: cubo unitário

$\{\mathbf{x} \in \Re^n \mid 0 \leq x_i \leq 1,\ i = 1, \ldots, n\} \rightarrow 2n$ restrições $\rightarrow 2^n$ soluções básicas factíveis.

soluções básicas adjacentes: duas soluções básicas distintas de um conjunto de restrições lineares no $\Re^n$ são adjacentes se podemos encontrar $n - 1$ restrições linearmente independentes que estão ativas em ambas.



D e E são adjacentes a B
A e C são adjacentes a D

Se duas soluções básicas adjacentes também são factíveis, então o segmento de reta que as conecta e chamado de uma aresta do conjunto de soluções factíveis. Exemplo: DE, DC, etc.

3-Poliedros na forma padrão

Poliedro $\{\mathbf{x} \in \Re^n \mid \mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq 0\}$, $\mathbf{A}$ matriz $(m \times n)$, $\mathbf{b}$ vetor do $\Re^m$.

Hipótese: m linhas de $\mathbf{A}$ são LI $\Rightarrow m \leq n$ (LD $\Rightarrow$ redundância)

Soluções básicas $\Rightarrow n$ restrições ativas LI em todas elas

Soluções básicas satisfazem $\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \Rightarrow m$ restrições ativas

Para obter n restrições ativas LI $\rightarrow$ $(n - m)$ das variáveis $x_i = 0$ ($x_i \geq 0$ ativas)

Escolha das $(n - m)$ variáveis não pode ser arbitrária

Teorema 2.4 Considere as restrições $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ e $\mathbf{x} \geq 0$, e assuma que a matriz $\mathbf{A}$ $(m \times n)$ tem linhas linearmente independentes. Um vetor $\mathbf{x} \in \Re^n$ é uma solução básica se e somente se $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ e existem índices $B(1),\ldots,B(m)$ tais que

(a) As colunas $\mathbf{A}_{B(1)}, \ldots, \mathbf{A}_{B(m)}$ são linearmente independentes
(b) Se $i \neq B(1),\ldots,B(m)$ então $x_i = 0$.

Prova :

$(\rightarrow)$ Considere $\mathbf{x} \in \Re^n$ e suponha que existem indices $B(1),\ldots,B(m)$ que satisfaçam (a) e (b). as restrições ativas $\mathbf{x}_i = 0$ e $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ implicam que

$$\sum_{i=1}^{m} \mathbf{A}_{B(i)} x_{B(i)} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{A}_i x_i = \mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

Como as colunas $\mathbf{A}_{B(i)}$, $i = 1,\ldots,n$ são LI, $x_{B(1)},\ldots,x_{B(m)}$ são únicamente determinados. Logo, o sistema de equações formado pelas restrições ativas possui solução única. Pelo Teorema 2.2, existem n restrições ativas LI e isso significa que $\mathbf{x}$ é uma solução básica.

$(\leftarrow)$ EPC $\blacksquare$

Procedimento para construção de soluções básicas

1. Escolher m colunas LI $\mathbf{A}_{B(1)},\ldots,\mathbf{A}_{B(m)}$.
2. Seja $x_i = 0$ para todo $i \neq B(1),\ldots.B(m)$.
3. Resolver o sistema de m equações $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$

   cujas incógnitas são $x_{B(1)},\ldots,x_{B(m)}$.

solução é não negativa $\Rightarrow$ solução básica factível

solução básica e factível $\Rightarrow$ pode ser obtida pelo procedimento

(a) Se $\mathbf{x}$ é uma solução básica $\rightarrow$ $x_{B(1)},\ldots,x_{B(m)}$ variáveis básicas.

variáveis restantes: variáveis não básicas

(b) $\mathbf{A}_{B(1)},\ldots,\mathbf{A}_{B(m)}$ colunas básicas $\rightarrow$ base para o $\Re^m$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{B(1)} & \mathbf{A}_{B(2)} & \cdots & \mathbf{A}_{B(m)} \end{bmatrix}, \; \mathbf{x}_B = \begin{bmatrix} x_{B(1)} \\ \vdots \\ x_{B(m)} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$$

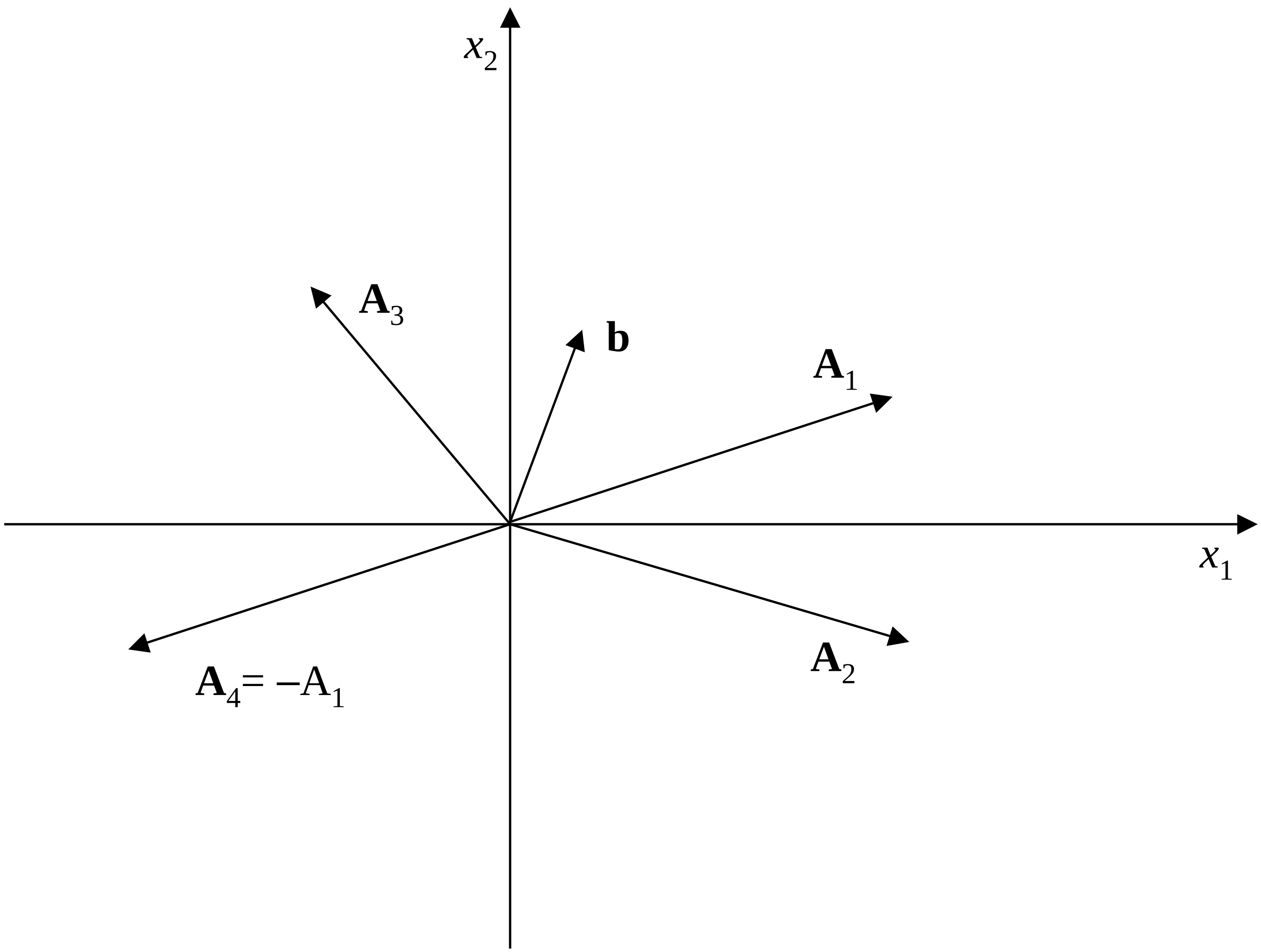
$\mathbf{B} =$ matriz básica $(m \times m)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 8 \\ 12 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{A}_4, \mathbf{A}_5, \mathbf{A}_6, \mathbf{A}_7$ básicas: $\mathbf{x} = (0,0,0,8,12,4,6)$ básica factível

$\mathbf{A}_3, \mathbf{A}_5, \mathbf{A}_6, \mathbf{A}_7$ básicas: $\mathbf{x} = (0,0,4,8,-12,4,6)$ básica não factível

Interpretação geométrica



1. soluções básicas diferentes correspondem a bases diferentes

2. bases diferentes $\Rightarrow$ podem prover a mesma solução básica

Exemplos: **b** = 0 e soluções degeneradas

3. Soluções básicas adjacentes $\Leftrightarrow$ bases adjacentes

Forma padrão: matrizes básicas possuem as mesmas colunas, exceto uma

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 8 \\ 12 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_4, \mathbf{A}_5, \mathbf{A}_6, \mathbf{A}_7 : \mathbf{x} = (0,0,0,8,12,4,6) \quad e \quad \mathbf{A}_3, \mathbf{A}_5, \mathbf{A}_6, \mathbf{A}_7 : \mathbf{x} = (0,0,4,8,-12,4,6)$$

$n = 7,$ seis restições LI ativas em comum

Hipótese ρ (**A**) posto pleno (**A** *full rank*)

Teorema 2.5 Seja um poliedro $P = \{\mathbf{x} \in \Re^n \mid \mathbf{Ax} = \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geq 0\}$ não vazio, e $\mathbf{A}$ uma matriz $(m \times n)$ cujas linhas são $\mathbf{a}'_1, ..,\mathbf{a}'_m$. Suponha que $\rho(\mathbf{A}) = k < m$ e que as linhas $\mathbf{a}'_{i_1}, \ldots, \mathbf{a}'_{i_k}$ sejam linearmente independentes. Considere o poliedro

$$Q = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{a}'_{i_1}\mathbf{x} = b_{i_1}, \ldots, \mathbf{a}'_{i_k}\mathbf{x} = b_{i_k}, \mathbf{x} \geq 0\}$$

Então $Q = P$.

Prova:

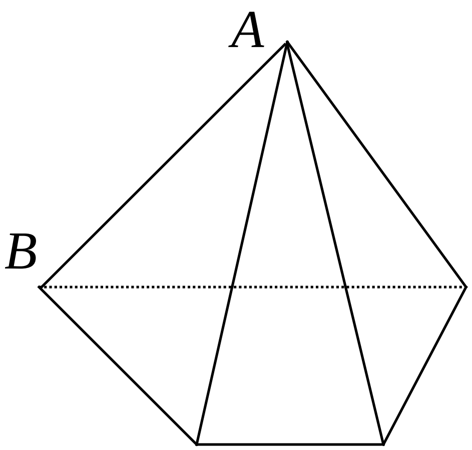
(a) $P \subset Q$ pois qualquer elemento de P satisfaz as restrições que definem Q.

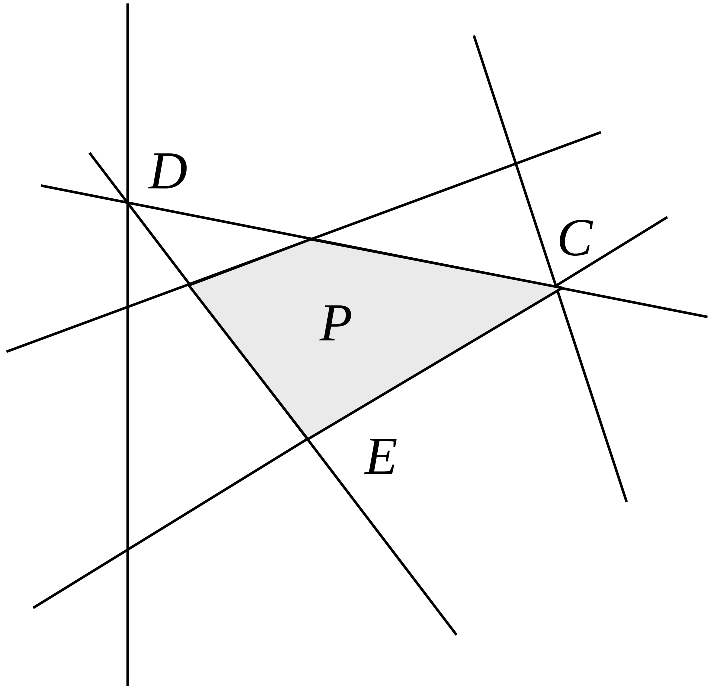
(b) $Q \subset P$ EPC

■

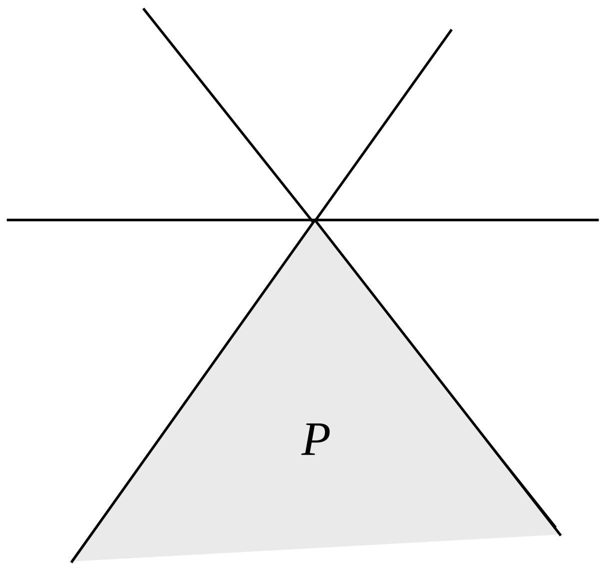
Soluções degeneradas

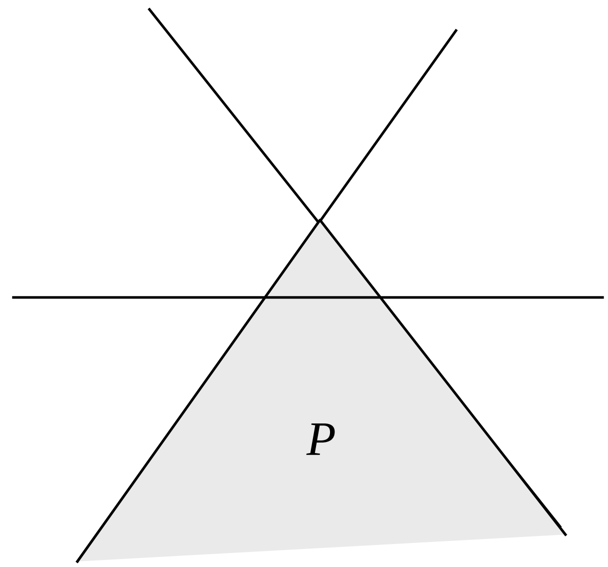
Definição 2.10 Uma solução básica $\mathbf{x} \in \Re^n$ é degenerada se o número de restrições ativas em $\mathbf{x}$ é maior do que n.





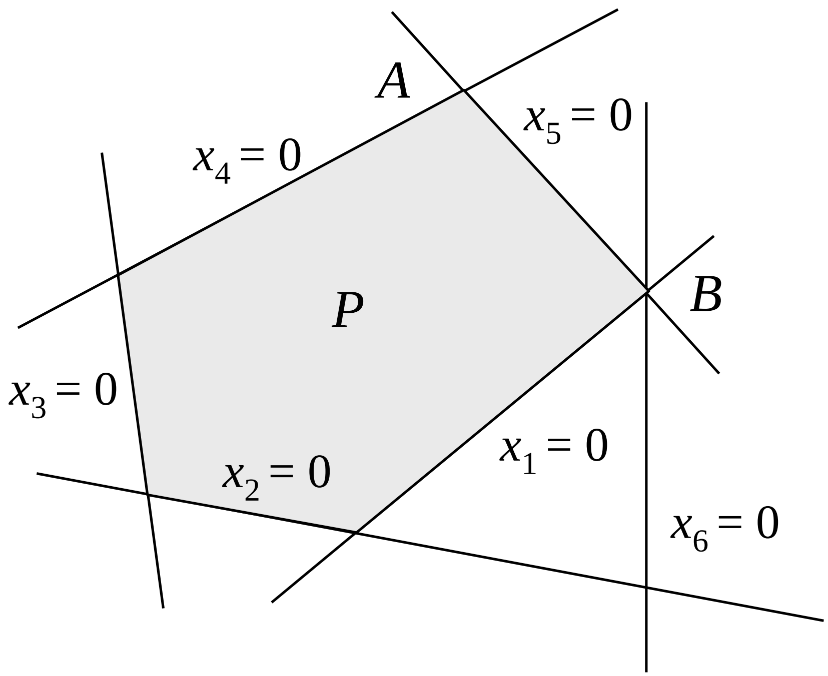
Pequenas mudanças nas restrições de desigualdade podem evitar soluções degeneradas





Soluções degeneradas na forma padrão

Definição 2.11 Considere um poliedro na forma padrão $P = \{\mathbf{x} \in \Re^n \mid \mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq 0\}$ e seja $\mathbf{x}$ uma solução básica. Seja m o número de linhas de $\mathbf{A}$. O vetor $\mathbf{x}$ é uma solução básica degenerada se o número de componentes nulas de $\mathbf{x}$ é maior do que $(n - m)$.

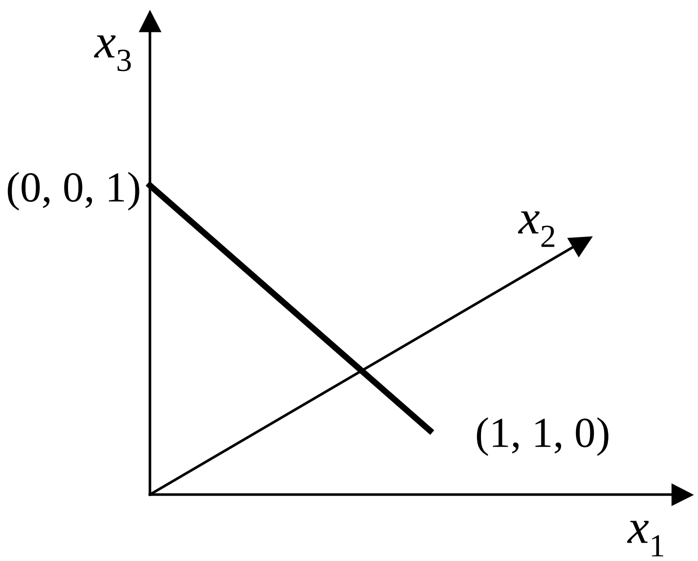


$n = 6$
$m = 4$
$(n - m) = 2$

A não degenerada

B degenerada

Degeneração não é uma propriedade geométrica, isto é, não é independente da representação



$n = 3$
$m = 2$
$(n - m) = 1$

$P = \{ (x_1, x_2, x_3) \mid x_1 - x_2 = 0, x_1 + x_2 + 2x_3 = 2, x_1, x_2, x_3 > 0\}$

P na forma padrão

(1, 1, 0) não degenerada
(0, 0, 1) degenerada

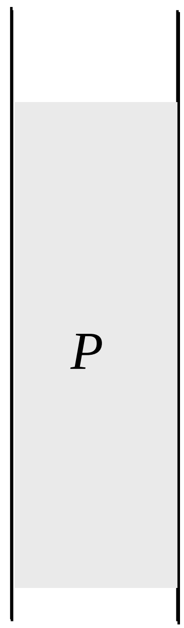
$P = \{ (x_1, x_2, x_3) \mid x_1 - x_2 = 0, x_1 + x_2 + 2x_3 = 2, x_1, x_3 > 0\}$

$P =$ forma não padrão

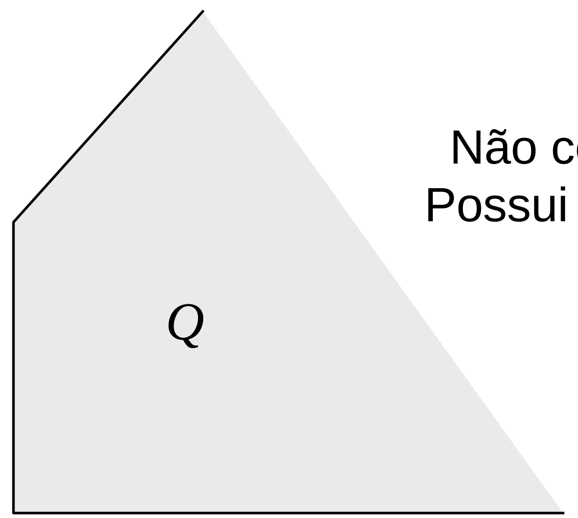
(1, 1, 0) não degenerada
(0, 0, 1) não degenerada

5-Existência de pontos extremos

Definição 2.12 Um poliedro $P \subset \Re^n$ contém uma linha (reta) se existe um vetor $\mathbf{x} \in P$ e um vetor $\mathbf{d} \in \Re^n$ tal que $\mathbf{x} + \lambda\mathbf{d} \in P$ para todo escalar λ.



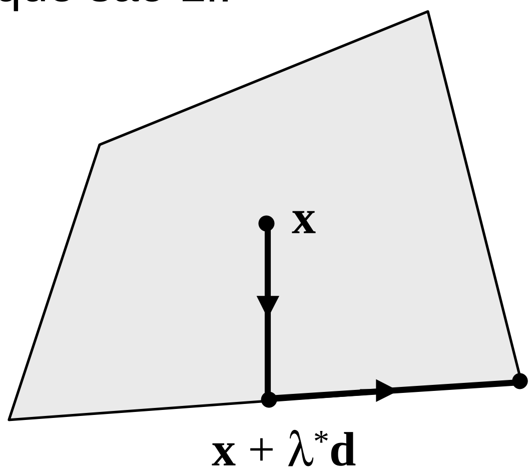
Contém uma reta
Não possui pontos extremos



Não contém uma reta
Possui pontos extremos

Teorema 2.6 Considere um poliedro $P = \{\mathbf{x} \in \Re^n \mid \mathbf{a'}_i\mathbf{x} \geq b_i,\ i = 1,\ldots,m\}$ não vazio.
As seguintes afirmações são equivalentes:

(a) O poliedro P possui no mínimo um ponto extremo
(b) O poliedro P não contém uma linha reta
(c) Entre os m vetores $a_1,\ldots,a_m$ existem n deles que são LI.



Prova:

(a) $\Rightarrow$ (b)

$\mathbf{x} \in P,\ I = \{i \mid \mathbf{a}_i'\mathbf{x} = b_i\}$

Se $\mathbf{a}_i$ LI $\rightarrow$ $\mathbf{x}$ é solução factível básica

por definição. Senão $\mathbf{a}_i \in I$ estão em um subespaço própio do $\Re^n$

e existe um vetor $\mathbf{d} \neq 0$ tal que $\mathbf{a}_i'\mathbf{d} = 0\ \forall i \in I$. $\mathbf{y} = \mathbf{x} + \lambda\mathbf{d} \rightarrow \mathbf{a}_i'\mathbf{y} = \mathbf{a}_i'\mathbf{x} + \lambda\mathbf{a}_i'\mathbf{d} = b_i$

todas restrições ativas ao longo da reta $\mathbf{y} = \mathbf{x} + \lambda\mathbf{d}$ até $\lambda = \lambda^*$.

(b) $\Rightarrow$ (a) Se P tem um ponto extremo $\mathbf{x}$, $\mathbf{x}$ é solução factível básica (Teor. 2.3) e existem n restrições que estão ativas em $\mathbf{x}$, com os respectivos vetores $\mathbf{a}_i$ LI.

(c) $\Rightarrow$ (b) EPC ■

Corolário 2.2 Todo poliedro não vazio e limitado e todo poliedro na forma padrão possui no mínimo uma solução básica factível.

Prova:

Poliedro limitado não contém uma reta.

Foma padrão está no primeiro quadrante $\{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \geq 0\}$ e este não contém uma reta.

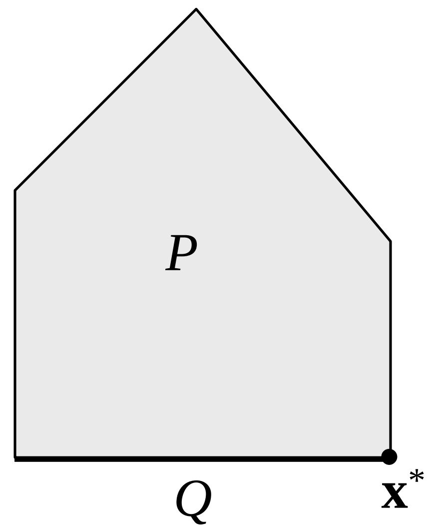
■

6-Otimalidade de pontos extremos

Teorema 2.7 Considere um problema de programação linear de minimizar $\mathbf{c}'\mathbf{x}$ sobre um poliedro P. Suponha que P tenha no mínimo um ponto extremo e que exista uma solução ótima. Então existe uma solução ótima que é um ponto extremo de P.

Prova:

Seja Q conjunto de todas as soluções ótimas.



Seja $P = \{\mathbf{x} \in \Re^n | \mathbf{Ax} \geq \mathbf{b}\}$ e v o valor ótimo de $\mathbf{c}'\mathbf{x}$.

$Q = \{\mathbf{x} \in \Re^n | \mathbf{Ax} \geq \mathbf{b}, \mathbf{c}'\mathbf{x} = v\}$ é um poliedro.

$Q \subset P$ e P não contém uma reta (Teor.2.6)
logo Q também não contém uma reta e possui
um ponto extremo.

Seja $\mathbf{x}^*$ ponto extremo de Q. Vamos mostrar que $\mathbf{x}^*$ também é ponto extremo de P

Se $\mathbf{x}^*$ não é ponto extremo de P, então $\exists \mathbf{y}, \mathbf{z} \in P,\ \mathbf{y}, \mathbf{z} \neq \mathbf{x}^*, \lambda \in [0,1] \mid \mathbf{x}^* = \lambda \mathbf{y} + (1-\lambda)\mathbf{z}$

$v = \mathbf{c}'\mathbf{x}^* = \lambda \mathbf{c}'\mathbf{y} + (1-\lambda)\mathbf{c}'\mathbf{z}$. Como v é o valor ótimo, $\mathbf{c}'\mathbf{y} \geq v$ e $\mathbf{c}'\mathbf{z} \geq v$.

Logo $\mathbf{c}'\mathbf{y} = \mathbf{c}'\mathbf{z} = v$ e $\mathbf{y} \in Q$ e $\mathbf{z} \in Q$, o que contradiz o fato de $\mathbf{x}^*$ é ponto extremo de P.

Além disso como $\mathbf{x}^* \in Q$, $\mathbf{x}^*$ é uma solução ótima.

$\blacksquare$

Teorema 2.8 Considere um problema de programação linear de minimizar $\mathbf{c}'\mathbf{x}$ sobre um poliedro P. Suponha que P tenha no mínimo um ponto extremo. Então, ou o valor da função objetivo é $-\infty$ ou existe um ponto extremo que é a solução ótima.

Prova: EPC

Corolário 2.3 Considere um problema de programação linear de minimizar $\mathbf{c}'\mathbf{x}$ sobre um poliedro não vazio. Então, ou o valor da função objetivo é $-\infty$ ou existe uma solução ótima.

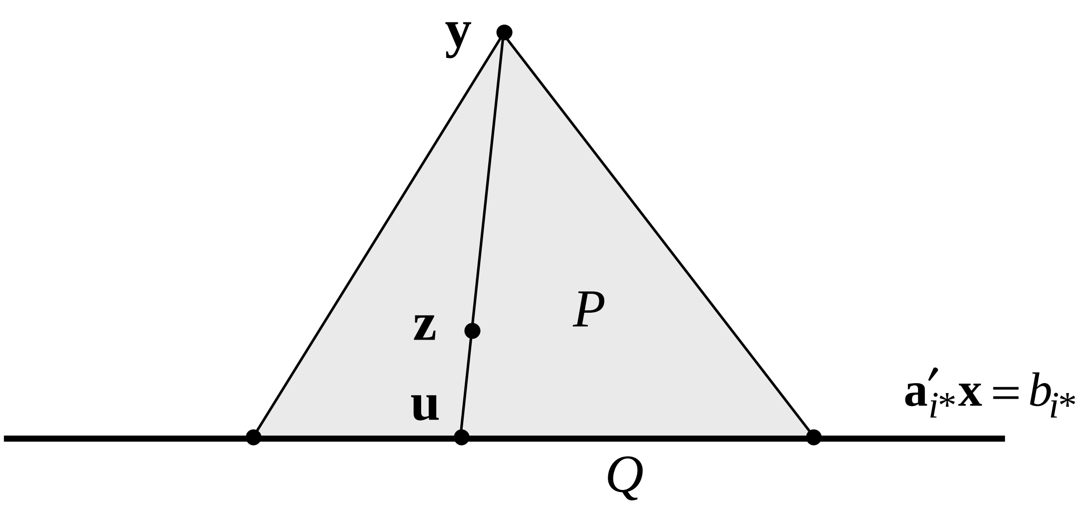
7-Representação de poliedros limitados

Poliedros: representados por desigualdades

Poliedros: envoltória convexa de seus pontos extremos

Teorema 2.9 Um poliedro não vazio e limitado é a envoltória convexa de seus pontos extremos.

Prova: EPC



8-Projeção de poliedros e eliminação F-M

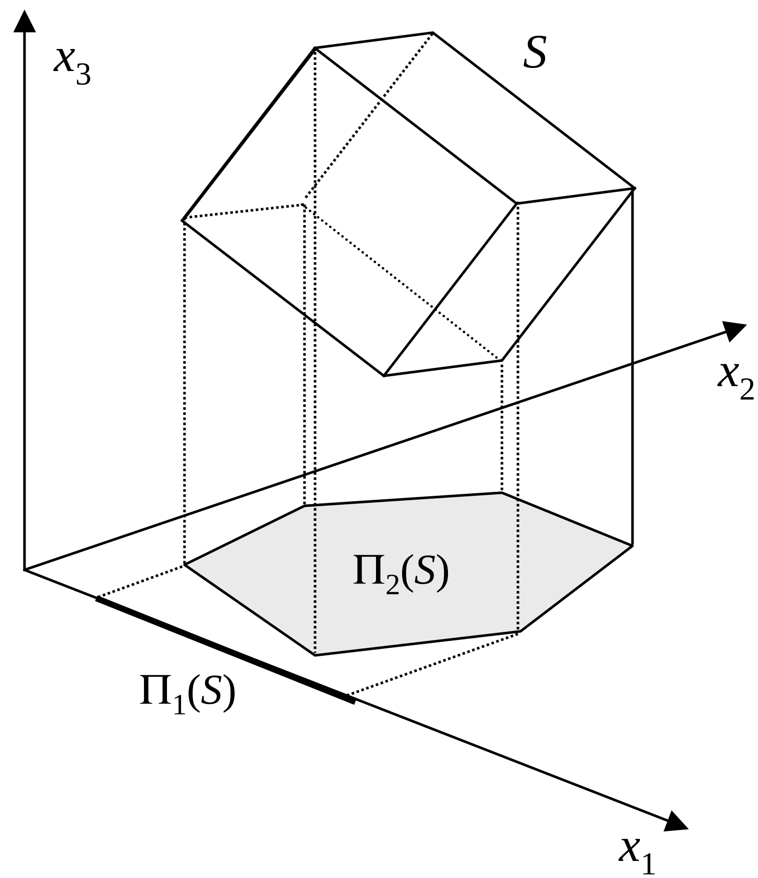
$\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \Re^n,\ k \le n$

Projeção: $\pi_k(\mathbf{x}) = \pi_k(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_k)$

$$\Pi_k(S) = \{\pi_k(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in S\}$$

$S \ne \phi \Leftrightarrow \Pi_k(S) \ne \phi$

Verificar $P \subset \Re^n \ne \phi \ \rightarrow \ \Pi_{n-1}(P), \ldots, \Pi_1(P)$



Dado $P = \{x \in \Re^n \mid \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \ge b_i, i = 1, \ldots, m\}$, eliminar x_n e construir $\Pi_{n-1}(P)$

Algoritmo de eliminação Fourier-Motzkin

1-Reescrever cada restrição $\Sigma_{j=1,\mathrm{n}}\, a_{ij}\, x_{\mathrm{j}} \geq b_j$ na forma

$$a_{in}x_n \geq -\sum_{j=1}^{n-1} a_{ij}x_j + b_i\,,\; i = 1,\ldots,m$$

se $a_{in} \neq 0$, dividir ambos lados por a_{in}. Fazendo $\underline{\mathbf{x}} = (x_1,\ldots,x_{n\text{-}1})$ obtemos uma representação de P envolvendo as seguintes restrições

$$x_n \geq d_i + \mathbf{f}_i'\overline{\mathbf{x}} \quad \text{se} \;\; a_{in} > 0$$

$$d_j + \mathbf{f}_j'\overline{\mathbf{x}} \geq x_n \quad \text{se} \;\; a_{jn} < 0$$

$$0 \geq d_k + \mathbf{f}_k'\overline{\mathbf{x}} \quad \text{se} \;\; a_{jn} = 0$$

d_{i} d_{j}, d_{k} escalares
$\mathbf{f}_i$, $\mathbf{f}_j$, $\mathbf{f}_k \in \Re^{n\text{-}1}$

2-Seja Q o poliedro no $\Re^{n\text{-}1}$definido pelas restições

$$d_j + \mathbf{f}_j'\overline{\mathbf{x}} \geq d_i + \mathbf{f}_i'\overline{\mathbf{x}} \quad \text{se} \;\; a_{in} > 0 \; e \; a_{jn} < 0$$

$$0 \geq d_k + \mathbf{f}_k'\overline{\mathbf{x}} \quad \text{se} \;\; a_{jn} = 0$$

Exemplo algoritmo de eliminação

$$
\begin{aligned}
&x_1 + x_2 \geq 1 \\
&x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 2 \\
&2x_1 + 3x_3 \geq 3 \\
&x_1 - 4x_3 \geq 4 \\
&-2x_1 + x_2 - x_3 \geq 5
\end{aligned}
$$

reescrevendo $\rightarrow$

$$
\begin{aligned}
&0 \geq 1 - x_1 - x_2 \\
&x_3 \geq 1 - (x_1/2) - (x_2/2) \\
&x_3 \geq 1 - (2x_1/3) \\
&-1 + (x_1/4) \geq x_3 \\
&-5 - 2x_1 + x_2 \geq x_3
\end{aligned}
$$

Poliedro Q em $\Re^2$

$$
\begin{aligned}
&0 \geq 1 - x_1 - x_2 \\
&-1 + (x_1/4) \geq 1 - (x_1/2) - (x_2/2) \\
&-1 + (x_1/4) \geq 1 - (2x_1/3) \\
&-5 - 2x_1 + x_2 \geq 1 - (x_1/2) - (x_2/2) \\
&-5 - 2x_1 + x_2 \geq 1 - (2x_1/3)
\end{aligned}
$$

Teorema 2.10 O poliedro Q construído pelo algoritmo de eliminação é igual à projeção $\Pi_{n\text{-}1}(P)$ de P.

Corolário 2.4 Seja $P \subset \Re^{n+k}$ um poliedro. Então, o conjunto

$$\{\mathbf{x} \in \Re^n \mid \text{existe } \mathbf{y} \in \Re^k \text{ tal que } (\mathbf{x},\mathbf{y}) \in P\}$$

também é um poliedro.

Corolário 2.5 Seja $P \subset \Re^{n+k}$ um poliedro e $\mathbf{A}$ uma matriz $(m \times n)$. Então, o conjunto $Q = \{\mathbf{Ax} \mid \mathbf{x} \in P\}$ também é um poliedro.

Corolário 2.6 A envoltória convexa de um número finito de vetores é um poliedro.

Observação

Este material refere-se às notas de aula do curso IA 881 Otimização Linear da Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação da Unicamp. Não substitui o livro texto, as referências recomendadas e nem as aulas expositivas. Este material não pode ser reproduzido sem autorização prévia dos autores. Quando autorizado, seu uso é exclusivo para atividades de ensino e pesquisa em instituições sem fins lucrativos.