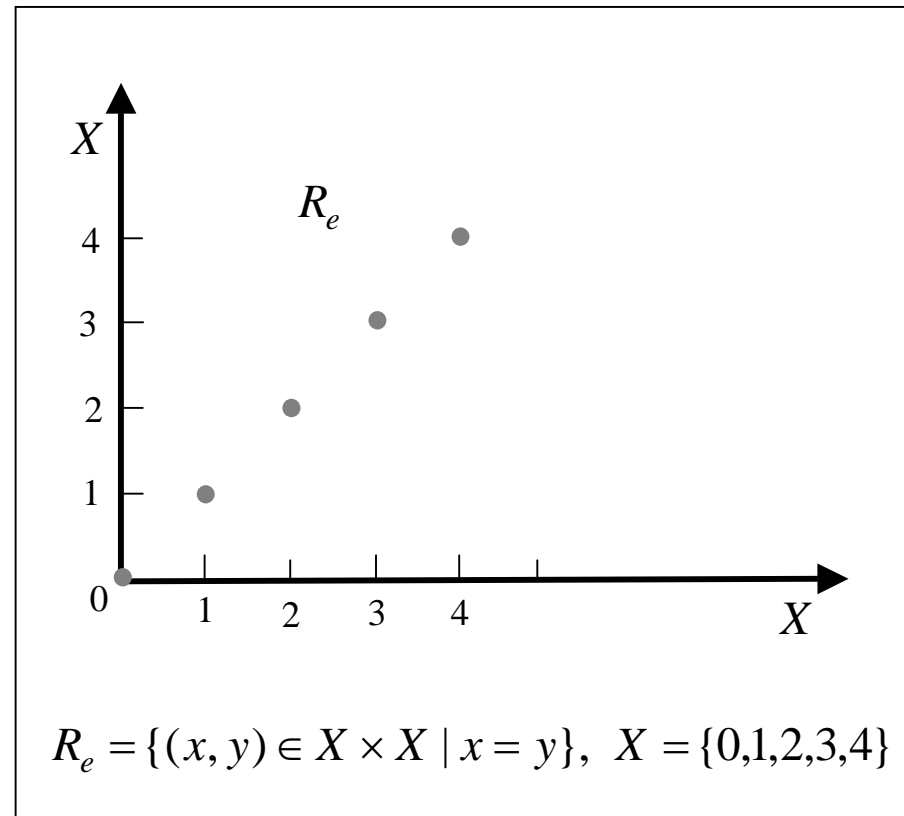
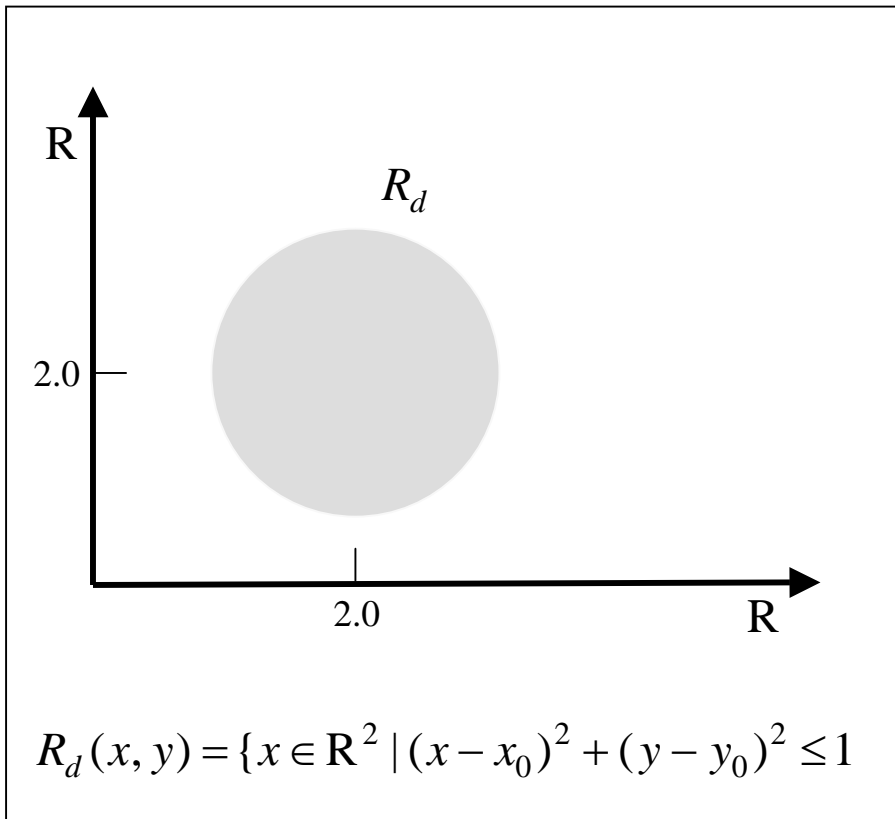


Relações Nebulosas e Cálculo Relacional

Relações

$$R: X \times Y \rightarrow \{0,1\}$$

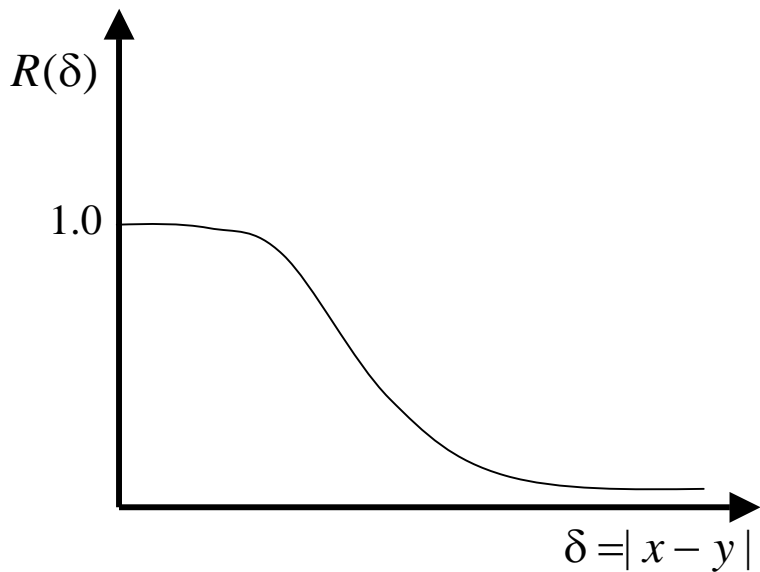
$$R(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{se } (x, y) \in R \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$



Relações Nebulosas

$$R: X \times Y \rightarrow [0,1]$$

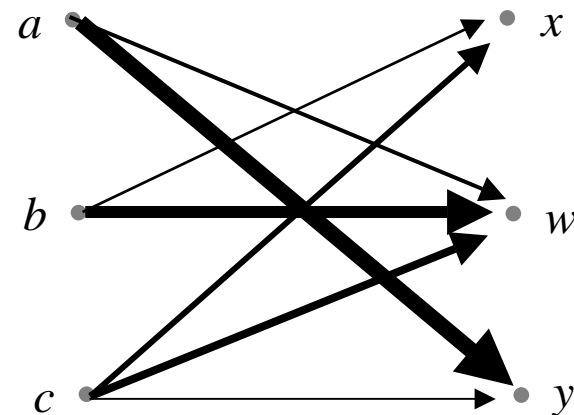
$$R(x, y) = \frac{1}{(1 + (x - y)^2)}$$



R : x aproximadamente igual a y

$$X = \{a, b, c\}$$

$$Y = \{x, w, y\}$$



$$R(x, y) = \begin{bmatrix} 0.0 & 0.4 & 1.0 \\ 0.3 & 0.9 & 0.0 \\ 0.5 & 0.7 & 0.2 \end{bmatrix} \begin{matrix} a \\ b \\ c \end{matrix}$$

Definições

1 – Domínio: $\text{dom}R(x) = \sup_{y \in Y} R(x, y)$

2 – Codomínio: $\text{co}R(x) = \sup_{x \in X} R(x, y)$

3 – Representação: $R = \bigcup R_\alpha$; $R(x, y) = \max_{\alpha \in [0,1]} (\min [\alpha, R(x, y)])$

Operações

1 – União: $(R \cup W)(x, y) = R(x, y) \vee W(x, y)$

2 – Interseção: $(R \cap W)(x, y) = R(x, y) \wedge W(x, y)$

3 – Complemento: $\bar{R}(x, y) = 1 - R(x, y)$

Propriedades

1 – Inclusão: $R \subseteq W \quad R(x, y) \leq W(x, y)$

2 – Igualdade: $R = W \quad R(x, y) = W(x, y)$

3 – Transposição: $R^T(x, y) = R(y, x)$

$$(R^T)^T = R$$

$$(\overline{R})^T = \overline{R^T}$$

Composição de Relações Nebulosas

$$R : X \times Y \rightarrow [0,1]; \quad G : X \times Z \rightarrow [0,1]; \quad W : Z \times Y \rightarrow [0,1]$$

1 – Composição sup – t: $R(x, y) = \sup_{z \in Z} [G(x, z) \text{t} W(z, y)]$

$$R = G \square W$$

2 – Composição inf – s: $R(x, y) = \inf_{z \in Z} [G(x, z) \text{s} W(z, y)]$

$$R = G \blacklozenge W$$

Associativa

$$R \square (P \square W) = (R \square P) \square W$$

$$R \blacklozenge (P \blacklozenge W) = (R \blacklozenge P) \blacklozenge W$$

Distributividade Fraca

$$R \square (P \cap W) \subset (R \square P) \cap (R \square W)$$

$$R \blacklozenge (P \cup W) \supset (R \blacklozenge P) \cup (R \blacklozenge W)$$

Distributividade

$$R \square (P \cup W) = (R \square P) \cup W$$

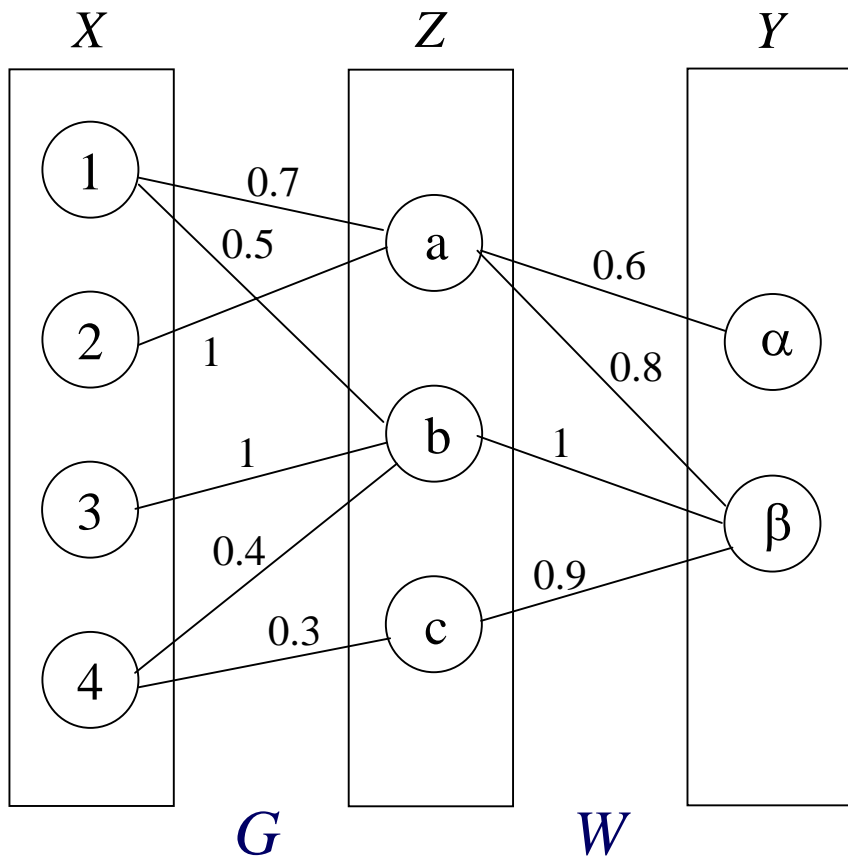
$$R \blacklozenge (P \cap W) = (R \blacklozenge P) \cap W$$

Monotonicidade

$$P \subset W \Rightarrow (R \square P) \subset (R \square W)$$

$$P \subset W \Rightarrow (R \blacklozenge P) \supset (R \blacklozenge W)$$

Composição de Relações Nebulosas



$$\begin{bmatrix} 0.7 & 0.5 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0.3 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 0.6 & 0.8 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.7 \\ 0.6 & 0.8 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0.4 \end{bmatrix}$$

$G \circ W = R$

Projeção de Relações Nebulosas

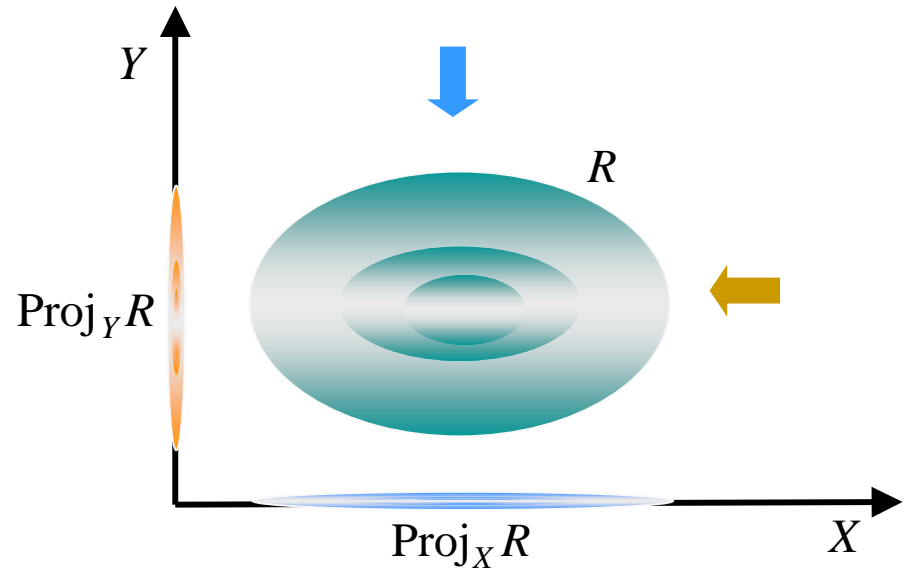
$$R_X(x) = \text{Proj}_X R(x) = \sup_{y \in Y} R(x, y)$$

$$R_Y(y) = \text{Proj}_Y R(y) = \sup_{x \in X} R(x, y)$$

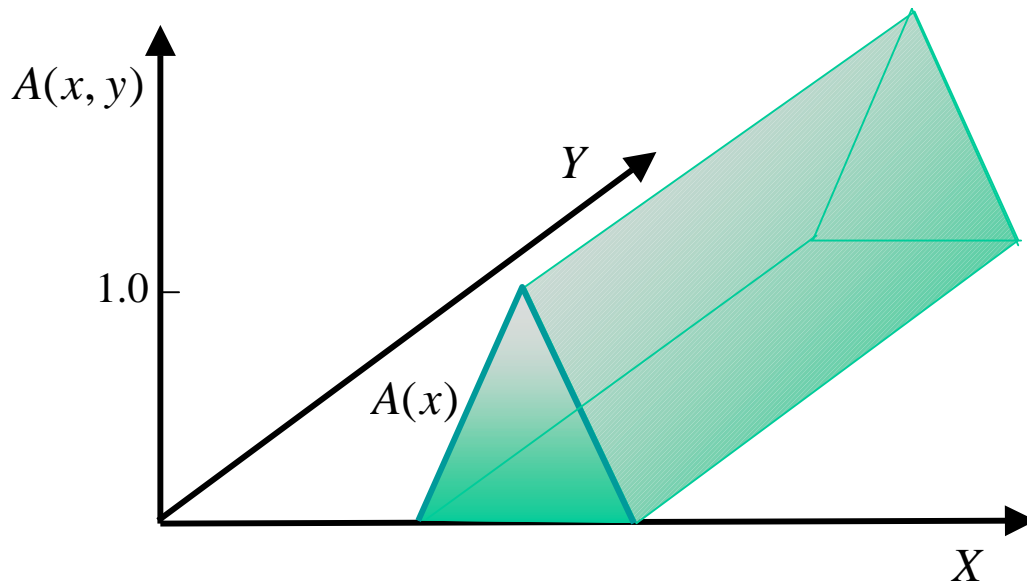
Exemplo

$$R(x, y) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0.3 & 0.6 \\ 0.8 & 0.1 & 1 & 0 \\ 0.9 & 0.7 & 0 & 0.5 \\ 0.9 & 0 & 0.3 & 0.7 \end{bmatrix} \quad \text{Proj}_X R = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0.9 \\ 0.9 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0.9 & 1.0 & 1.0 & 0.7 \end{bmatrix} \\ \text{Proj}_Y R$$



Extensão Cilíndrica de Relações Nebulosas



$$\text{cyl}A: X \times Y \rightarrow [0,1]$$

$$\text{cyl}A(x, y) = A(x), \quad \forall y \in Y$$

$$A(x) = \begin{bmatrix} 0.3 \\ 0.9 \\ 1.0 \\ 0.6 \end{bmatrix}$$

$$\text{cyl}A(x, y) = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.3 & 0.3 & 0.3 \\ 0.9 & 0.9 & 0.9 & 0.9 \\ 1.0 & 1.0 & 1.0 & 1.0 \\ 0.6 & 0.6 & 0.6 & 0.6 \end{bmatrix}$$

Relações Nebulosas Binárias

$$R: X \times X \rightarrow [0,1]$$

1-Reflexiva: $R(x,x) = 1$

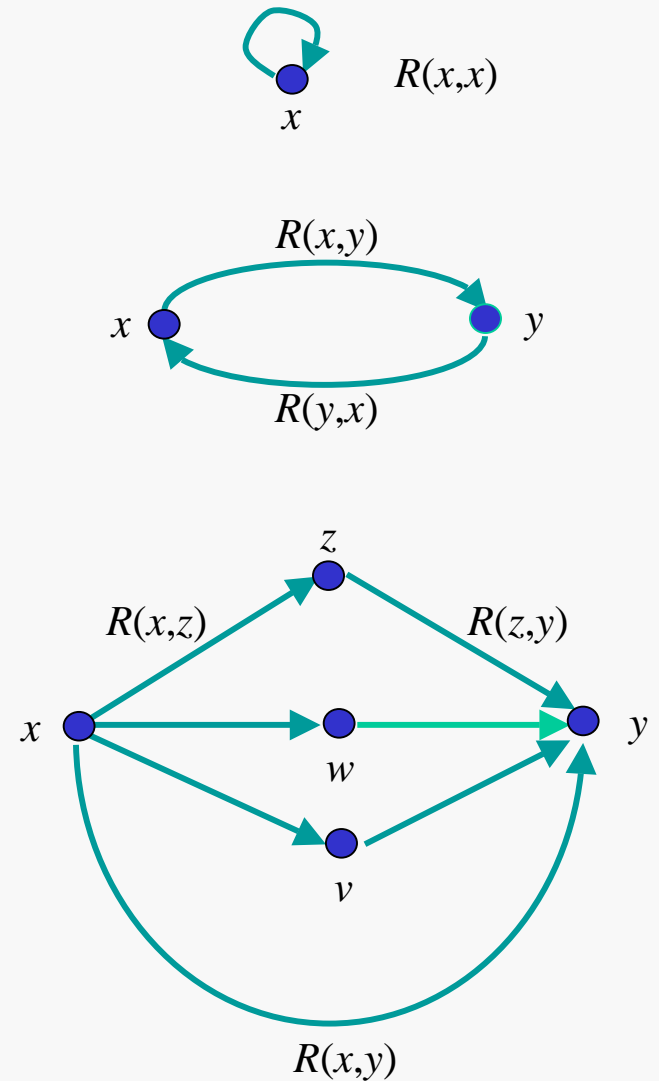
2-Simétrica: $R(x,y) = R(y,x)$

3-Transitiva: $R \square R \subseteq R$

Fecho Transitivo: $\text{trans}R = R \cup R^2 \cup \dots \cup R^n$

$$R^2 = R \square R, \dots, R^p = R \square R^{p-1}$$

R reflexiva e t = min $\Rightarrow I \subseteq R \subseteq R^2 \subseteq \dots R^{n-1} = R^n$



$$\sup_{z \in X} [R(x,z) \text{t} R(z,y)] \leq R(x,y)$$

Relação de Equivalência

Relação em $X \times X$ Reflexiva, Simétrica e Transitiva

Equivalência: generaliza igualdade \rightarrow semelhança

$A_x = \{y \mid (x, y) \in R(x, y)\}$ Classe de Equivalência

Família das classes de equivalência $X/R \Rightarrow$ partição de X

Exemplo: $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

$R = \{(x, y) \mid x \text{ e } y \text{ tem mesmo resto quando divididos por } 3\}$

$$A_1 = A_4 = A_7 = \{1, 4, 7, 10\}$$

$$A_2 = A_5 = A_8 = \{2, 5, 8\}$$

$$A_3 = A_6 = A_9 = \{3, 6, 9\}$$



Classes de Equivalência

$$X / R = \{\{1, 4, 7, 10\}, \{2, 5, 8\}, \{3, 6, 9\}\}$$

Partição

Relação de Similaridade

Relação Similaridade: generaliza relação de equivalência

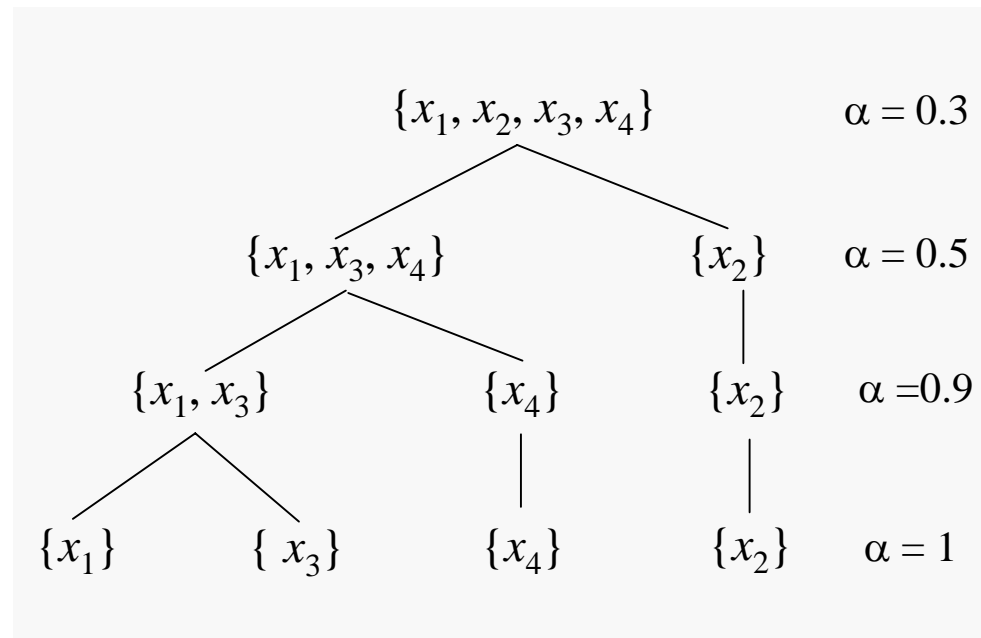
Relação Nebulosa Reflexiva, Simétrica e Transitiva

$$R = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} \alpha R_\alpha \Rightarrow R_\alpha \text{ Relação de Equivalência}$$

Exemplo:

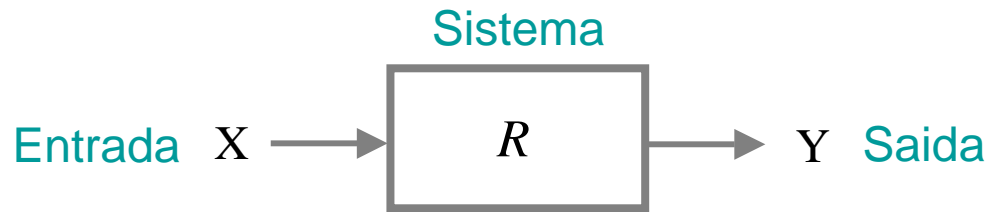
$$R(x, y) = \begin{bmatrix} 1 & 0.3 & 0.9 & 0.5 \\ 0.3 & 1 & 0.3 & 0.3 \\ 0.9 & 0.3 & 1 & 0.5 \\ 0.5 & 0.3 & 0.5 & 1 \end{bmatrix}$$

Linhas de R : Classes de Similaridade



Árvore das partições induzidas por R

Equações Relacionais Nebulosas



$$Y = X \square R$$

Equação relacional sup-t: $Y = X \square R$

Problemas Básicos:

Estimação: dados Y e X , $R = ?$

Inverso: dados Y e R , $X = ?$

Solução do Problema de Estimação

$\mathbb{R} = \{ R \mid Y = X \square R \}$ X, Y discretos e finitos $\text{hgt}(X) \geq \text{hgt}(Y) \Rightarrow \mathbb{R} \neq \emptyset$

$$\hat{R} = X^T \varphi Y$$

Solução

Exemplo $X = [0.8 \quad 0.5 \quad 0.3]$, $Y = [0.4 \quad 0.2 \quad 0 \quad 0.7]$, $t = \min$

$$\begin{bmatrix} 0.8 \\ 0.5 \\ 0.3 \end{bmatrix} \varphi [0.4 \quad 0.2 \quad 0 \quad 0.7] = \begin{bmatrix} 0.8 \varphi 0.4 & 0.8 \varphi 0.2 & 0.8 \varphi 0 & 0.8 \varphi 0.7 \\ 0.5 \varphi 0.4 & 0.5 \varphi 0.2 & 0.5 \varphi 0 & 0.5 \varphi 0.7 \\ 0.3 \varphi 0.4 & 0.3 \varphi 0.2 & 0.3 \varphi 0 & 0.3 \varphi 0.7 \end{bmatrix}$$

$$\hat{R}(x, y) = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.2 & 0 & 0.7 \\ 0.4 & 0.2 & 0 & 1 \\ 1 & 0.2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Solução maximal

Solução do Problema Inverso

$$\hat{X}^T = R \square \varphi Y^T$$

Solução

$$\mathbb{X} = \{X / X \square R = Y\}$$

$$\mathbb{X} \neq \phi$$

$$\hat{X}(x) = \inf_y [R(x, y) \varphi Y(y)]$$

Exemplo

$$R = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.2 & 0 & 0.7 \\ 0.4 & 0.2 & 0 & 1 \\ 1 & 0.2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad Y = [0.4 \quad 0.2 \quad 0 \quad 0.7], \quad t = \min$$

$$\hat{X}^T = \min \left\{ \begin{bmatrix} 0.4 & 0.2 & 0 & 0.7 \\ 0.4 & 0.2 & 0 & 1 \\ 1 & 0.2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \varphi \begin{bmatrix} 0.4 \\ 0.2 \\ 0 \\ 0.7 \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} \min[(0.4 \varphi 0.4) (0.2 \varphi 0.2) (0 \varphi 0) (0.7 \varphi 0.7)] \\ \min[(0.4 \varphi 0.4) (0.2 \varphi 0.2) (0 \varphi 0) (1.0 \varphi 0.7)] \\ \min[(1.0 \varphi 0.4) (0.2 \varphi 0.2) (0 \varphi 0) (1.0 \varphi 0.7)] \end{bmatrix}$$

$$\hat{X} = [1.0 \quad 0.7 \quad 0.4]$$

Solução maximal

Este material não pode ser reproduzido sem autorização prévia dos autores. Quando autorizado, seu uso é exclusivo para atividades de ensino e pesquisa em instituições sem fins lucrativos.