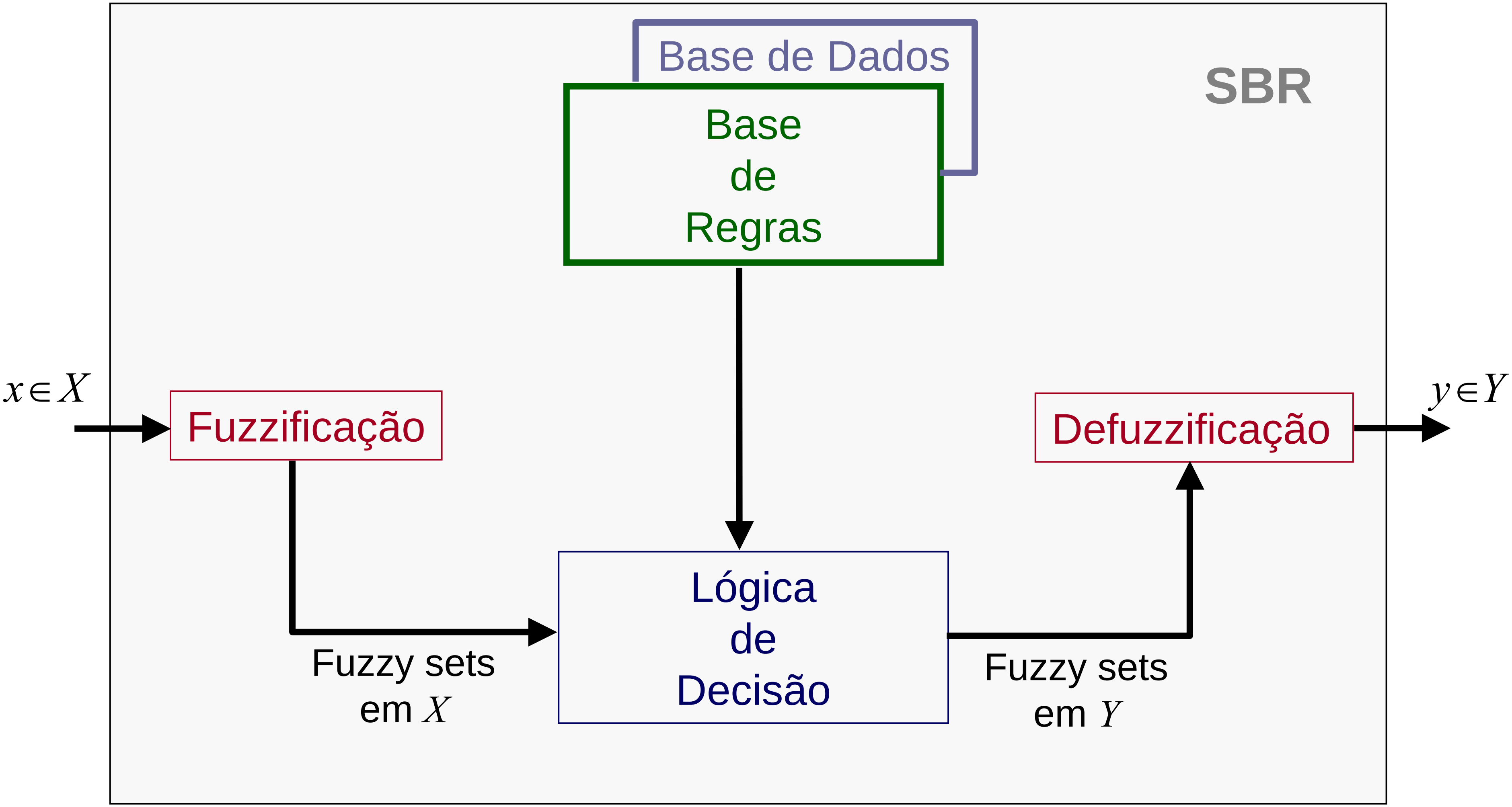
Sistema Baseado em Regras Nebulosas



Geração de Bases de Regras: Método Ingênuo

Dado: conjunto de pares entrada/saida

$$(x_1^1, x_2^1; y^1), (x_1^2, x_2^2; y^2), \ldots\ldots, (x_1^i, x_2^i; y^i), \ldots\ldots$$

x_1, x_2 entradas

y saida

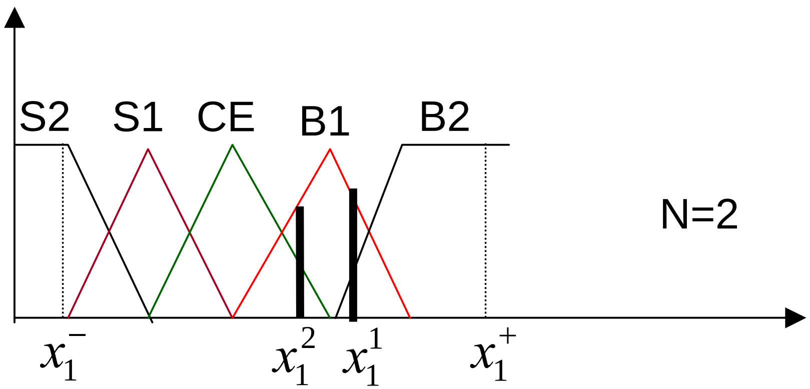
Determinar: base Regras Se-Então tal que

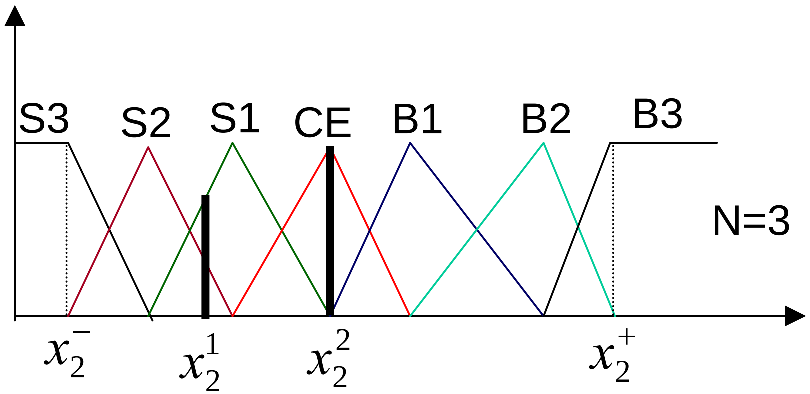
$$f : (x_1, x_2) \rightarrow y$$

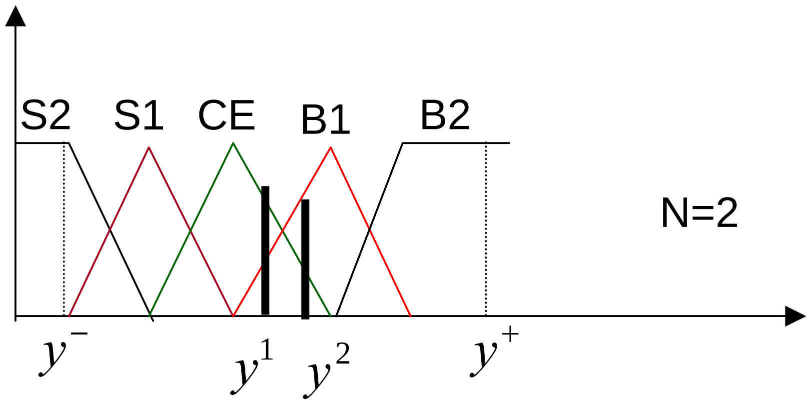
1-Granularizar espaços de entrada e saida

- determinar universos $[x_1^-, x_1^+], [x_2^-, x_2^+], [y^-, y^+]$

- particionar em 2N+1 regiões: SN, ..,S1,CE, B1,..,BN







2-Gerar regras a partir dos dados

- determinar graus de ativação

- criar regras correspondentes aos graus mais altos

$$R1:\ Se\ x_1\ é\ B1\ e\ x_2\ é\ S1\ então\ \ y\ é\ CE$$

$$R2:\ Se\ x_1\ é\ B1\ e\ x_2\ é\ CE\ \ então\ \ y\ é\ B1$$

3-Atribuir um grau a cada regra

- determinar grau de cada regra $\quad Grau(\text{Regra}) = A(x_1).B(x_2).C(y)$

- resolver conflitos escolhendo regra de maior grau

Li-Xin Wang, Adaptive Fuzzy Systems and Control, Prentice Hall, 1994

Geração de Bases de Regras: Método Agrupamento

- Reconhecimento de padrão
  - Processo de busca de estruturas em dados e a classificação destas estruturas em categorias, classes.
  - Estruturas da mesma categoria tem alto grau de associação e estruturas de diferentes categorias tem baixo grau de associação.
- Classificação de objetos em categorias: análise de grupos (*cluster analysis*)
- Problemas principais em reconhecimento de padrões:
  - Sensoriamento (*sensing*) $\rightarrow$ padrão (*pattern vector*)
  - Extração de características (*feature extraction*)
  - Discriminação (*discrimination function*)

$$x = [x_1\, x_2 \ldots x_p]$$

Método Baseado em Agrupamento

Seja $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ conjunto de dados

- c - partição fuzzy de X : família de conjuntos fuzzy $P = \{A_1, A_2, ..., A_c\}$ tal que

$$\sum_{i=1}^{c} A_i(x_k) = 1 \qquad \forall k \in \{1,2,...,n\} = N_n$$

$$0 < \sum_{k=1}^{n} A_i(x_k) < n \quad \forall i \in \{1,2,...,c\} = N_c$$

- Exemplo

$X = \{x_1, x_2, x_3\}$

$A_1 = 0.6 / x_1 + 1 / x_2 + 0.1 / x_3$

$A_2 = 0.4 / x_1 + 0 / x_2 + 0.9 / x_3$

$\{A_1, A_2\}$ é uma $2-$partição de X

Algoritmo *Fuzzy c-Means*

$$\min J_m(P) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{c}[A_i(x_k)]^m \left\| x_k - v_i \right\|^2$$

$$sa$$

$$\sum_{i=1}^{c} A_i(x_k) = 1 \qquad \forall k \in N_n$$

$$0 < \sum_{k=1}^{n} A_i(x_k) < n \quad \forall i \in N_c$$

$$x_k \in R^p$$

$v_i \in R^p$ = centros dos grupos (*cluster centers*), $i = 1,..,c$

$1 - Seja\ t = 0.\ Selecionar\ uma\ partição\ inicial\ \ P^{(0)}.$

$2 - Calcular\ centros\ grupos\ v_1^t, v_2^t, ..., v_c^t\ \ para\ P^{(t)}\ e\ valor\ escolhido\ de\ m.$

$$v_i = \frac{\sum_{k=1}^{n} [A_i(x_k)]^m x_k}{\sum_{k=1}^{n} [A_i(x_k)]^m}, \quad m > 1$$

$3 - Atualizar\ P^{(t+1)} : para\ cada\ x_k \in X,\ se\ \left\| x_k - v_i^t \right\|^2 > 0\ \forall i \in N_c\ então$

$$A_i^{(t+1)}(x_k) = \left[\sum_{j=1}^{c} \left(\frac{\left\| x_k - v_i^t \right\|^2}{\left\| x_k - v_j^t \right\|^2} \right)^{\frac{1}{m-1}} \right]^{-1}$$

$Se\ \left\| x_k - v_i^t \right\|^2 = 0\ para\ algum\ i \in I \subseteq N_c,\ então\ definir\ A_i^{t+1}(x_k)\ para\ i \in I$

como qualquer número real não negativo que satisfaça

$$\sum_{i \in I} A_i^{(t+1)}(x_k) = 1\ \ e\ \ definir\ \ A_i^{(t+1)}(x_k) = 0\ \ para\ i \in N_c - I.$$

$$4 - Comparar\ P^{(t)}\ e\ P^{(t+1)}.\ Se\ \left|P^{(t+1)} - P^{(t)}\right| \leq \varepsilon\ então\ parar.$$

$$Senão\ \ t = t + 1,\ ir\ para\ o\ passo\ 2.$$

$$Nota: \left|P^{(t+1)} - P^{(t)}\right|\ é\ uma\ distância\ em\ R^{n\times c},\ como\ por\ exemplo$$

$$\left|P^{(t+1)} - P^{(t)}\right| = \max_{i \in N_c, k \in Nn} \left|A_i^{(t+1)}(x_k) - A_i^{(t)}(x_k)\right|$$

- *valor ótimo de m ainda desconhecido*

- *algoritmo converge para* $m \in (0, \infty)$ $(Bezdek, 1981)$

J. Bezdek and S. Pal, Fuzzy Models for Pattern Recognition, IEEE Press, 1992

Adaptação de Bases de Regras: Método do Gradiente

$$R^i : If\ x_1\ is\ F_1^i\ and\ ...and\ x_n\ is\ F_n^i\ then\ y\ is\ G^i \qquad (\ A^i \rightarrow G^i\ )$$

F_j^i *fuzzy set* de X_j, G^i *fuzzy set* de Y

$x = (x_1\ x_2\ ...x_n) \in X_1 \times X_2 \times ... \times X_n = X$

$i = 1, 2, ..., M \ \rightarrow\ M$ regras

Conjunção *and* : produto

Regra *If-then* : produto

Inferência : composição sup-*produto*

Entrada : ponto $x \in X \subseteq R^n$ *singleton* do R^n

Li-Xin Wang, Adaptive Fuzzy Systems and Control, Prentice Hall, 1994

Defuzzificação : média dos centros (*center average*)

$$y = \frac{\sum_{i=1}^{M} \bar{y}^i B^i(\bar{y}^i)}{\sum_{i=1}^{M} B^i(\bar{y}^i)}$$ onde $\bar{y}^i$ é o valor modal de G^i (normal e unimodal)

$$B^i(y) = \sup_{x \in X}[R^i(x,y).A^{'}(x)] \quad (t = \text{produto})$$

$$R^i(x,y) = [\prod_{j=1}^{n} F^{'\,i}_{j}(x)].G^i(y) = A^i(x).G^i(y)$$

$$A^{'}(x) = \prod_{j=1}^{n} F_j(x)$$

- Neste caso, o sistema baseado em regras tem a forma:

$$y = f(x) = \frac{\sum_{i=1}^{M} \bar{y}^i \left(\prod_{j=1}^{n} F_j^i(x_i) \right)}{\sum_{i=1}^{M} \left(\prod_{j=1}^{n} F_j^i(x_i) \right)}, \text{ supondo } G^i \text{ normal e unimodal } \forall i$$

$$f(x) = \frac{\sum_{i=1}^{M} \bar{y}^i B^i(\bar{y}^i)}{\sum_{i=1}^{M} B^i(\bar{y}^i)} \quad ; \quad B^i(\bar{y}^i) = \sup_{x' \in X} \left[\prod_{j=1}^{n} F_j^i(x'_j).G^i(\bar{y}^i).A'(x') \right]$$

$$A'(x') = 1 \;\; se \;\; x' = x \;\; e \;\; A'(x') = 0 \;\; \forall x' \neq x \;\rightarrow\; \text{supremo para } x' = x$$

$Logo$

$$B^i(\bar{y}^i) = \prod_{j=1}^{n} F_j^i(x'_j).G^i(\bar{y}^i).A'(x') = \prod_{j=1}^{n} F_j^i(x'_j)$$

pois G^i é normal e unimodal $G^i(\bar{y}^i) = 1.$

• Funções de pertinência Gaussianas

$$F_j^i(x_i) = a_j^i \exp\left[-\left(\frac{x_i - \bar{x}_j^i}{\sigma_j^i} \right)^2 \right]$$

a_j^i , $\bar{x}_j^i$, σ_j^i são parâmetros ajustáveis

$$f(x) = \frac{\sum_{i=1}^{M} \bar{y}^i \left[\prod_{j=1}^{n} a_j^i \exp\left(-\left(\frac{x_j - \bar{x}_j^i}{\sigma_j^i} \right)^2 \right) \right]}{\sum_{i=1}^{M} \left[\prod_{j=1}^{n} a_j^i \exp\left(-\left(\frac{x_j - \bar{x}_j^i}{\sigma_j^i} \right)^2 \right) \right]}$$

Algoritmo de Adaptação via Gradiente

- dado $(x^p, d^p),\ x^p \in X,\ d^p \in Y \quad \left(\text{supondo} \quad a^i_j = 1\right)$

  determinar $\bar{y}^i,\ \bar{x}^i_j$ e $\sigma^i_j,\ i \in N_M,\ j \in N_n$ tal que

  $$min\ e^p = \min_{\bar{y}^i, \bar{x}^i_j, \sigma^i_j} \frac{1}{2}\left[f(x^p) - d^p\right]^2$$

- $$\bar{y}^i(k+1) = \bar{y}^i(k) - \alpha \left.\frac{\partial e}{\partial \bar{y}^i}\right|_k,\ i \in N_M$$

Fazendo $a = \sum_{i=1}^{M} \bar{y}^i z^i,\ b = \sum_{i=1}^{M} z^i,\ z^i = \prod_{j=1}^{n} exp\left(-\left[(x_j - \bar{x}^i_j)/\sigma^i_j\right]^2\right)$

$$\frac{\partial e}{\partial \bar{y}^i} = (f - d)\frac{\partial f}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial \bar{y}^i} = (f - d)\frac{1}{b} z^i$$

- $\bar{y}^i(k+1) = \bar{y}^i(k) - \alpha \dfrac{(f-d)}{b}, \; i \in N_M$

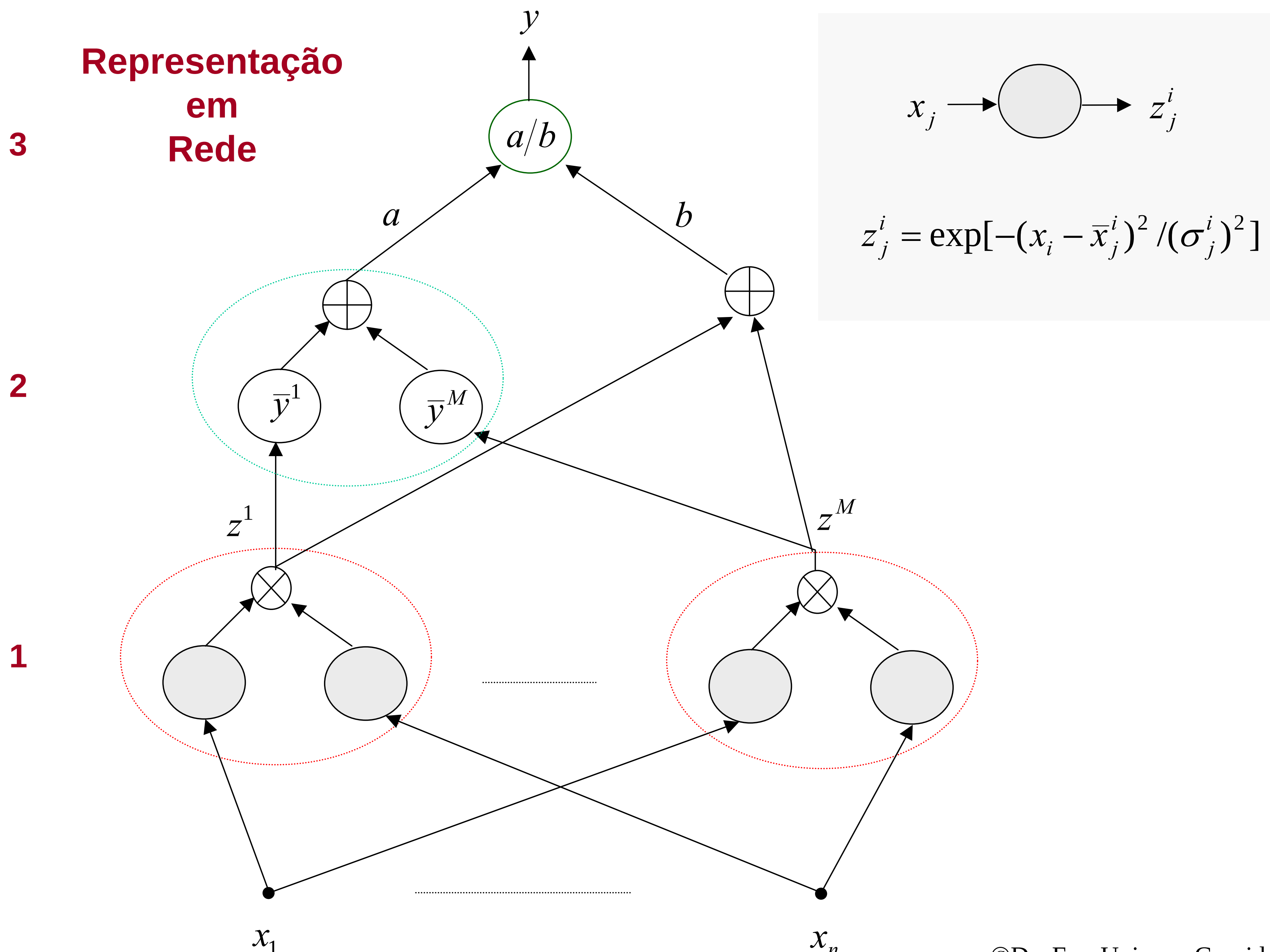
$$\bar{x}_j^i(k+1) = \bar{x}_j^i(k) - \beta \left.\frac{\partial e}{\partial \bar{x}_j^i}\right|_k$$

$$\frac{\partial e}{\partial \bar{x}_j^i} = (f-d)\frac{\partial f}{\partial z^i}\frac{\partial z^i}{\partial \bar{x}_j^i} = (f-d)\frac{\bar{y}^i - f}{b} z^i \frac{2(x_j^p - \bar{x}_j^i(k))}{[\sigma_j^i(k)]^2}$$

- $\bar{x}_j^i(k+1) = \bar{x}_j^i(k) - \beta(f-d)\dfrac{\bar{y}^i - f}{b} z^i \dfrac{2(x_j^p - \bar{x}_j^i(k))}{[\sigma_j^i(k)]^2}, \;\; j \in N_n, \;\; i \in N_M$

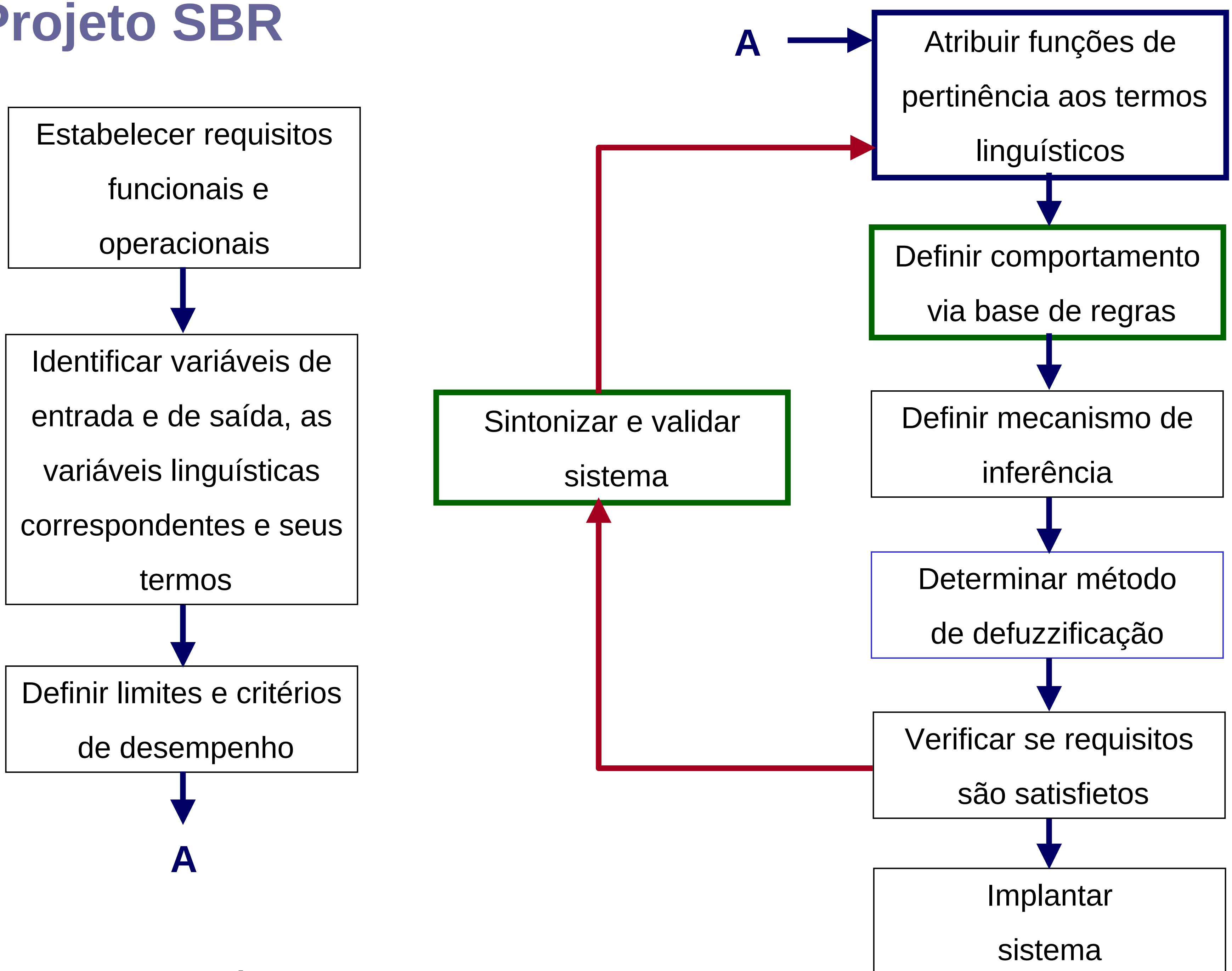
- $\sigma_j^i(k+1) = \sigma_j^i(k) - \gamma(f-d)\dfrac{\bar{y}^i - f}{b} z^i \dfrac{2[x_j^p - \bar{x}_j^i(k)]^2}{[\sigma_j^i(k)]^3}, \;\; j \in N_n, \;\; i \in N_M$

Representação em Rede



$$z_j^i = \exp[-(x_i - \bar{x}_j^i)^2 / (\sigma_j^i)^2]$$

Projeto SBR


Estabelecer requisitos funcionais e operacionais
Identificar variáveis de entrada e de saída, as variáveis linguísticas correspondentes e seus termos
Definir limites e critérios de desempenho
A
A
Atribuir funções de pertinência aos termos linguísticos
Definir comportamento via base de regras
Definir mecanismo de inferência
Determinar método de defuzzificação
Verificar se requisitos são satisfietos
Implantar sistema
Sintonizar e validar sistema