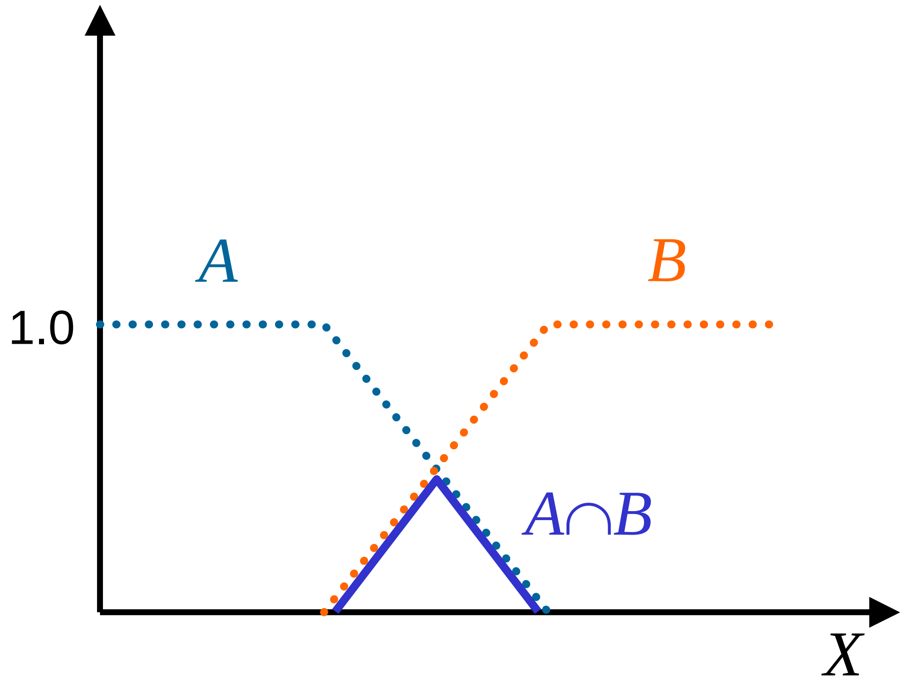
Operações com Conjuntos Nebulosos

Interseção



$$(A \cap B)(x) = \min[A(x), B(x)] = A(x) \wedge B(x) \qquad \forall x \in X$$

©DcaFeecUnicampGomide

t-normas: Generalização da Interseção

$$\mathrm{t}:[0,1]\times[0,1]\rightarrow[0,1]$$

$x\mathrm{t}y = y\mathrm{t}x$	Comutativa
$x\mathrm{t}(y\mathrm{t}z) = (x\mathrm{t}y)\mathrm{t}z$	Associativa
Se $x \leq y$ e $w \leq z$, então $x\mathrm{t}w \leq y\mathrm{t}z$	Monotônica
$x\mathrm{t}1 = x \quad e \quad 0\mathrm{t}x = 0$	Contorno

©DcaFeecUnicampGomide

t-normas: Exemplos

$1-\ xt_4 y = xy$ Produto Algébrico

$2-xt_2 y = \max[0,(1+p)(x+y-1)-pxy), \ \ p \geq -1$ Dif. Limitada $(p=0)$

$$3-xt_{11}y = \begin{cases} x & \text{se } y=1 \\ y & \text{se } x=1 \\ 0 & \textit{caso contrário} \end{cases}$$ Produto Drástico

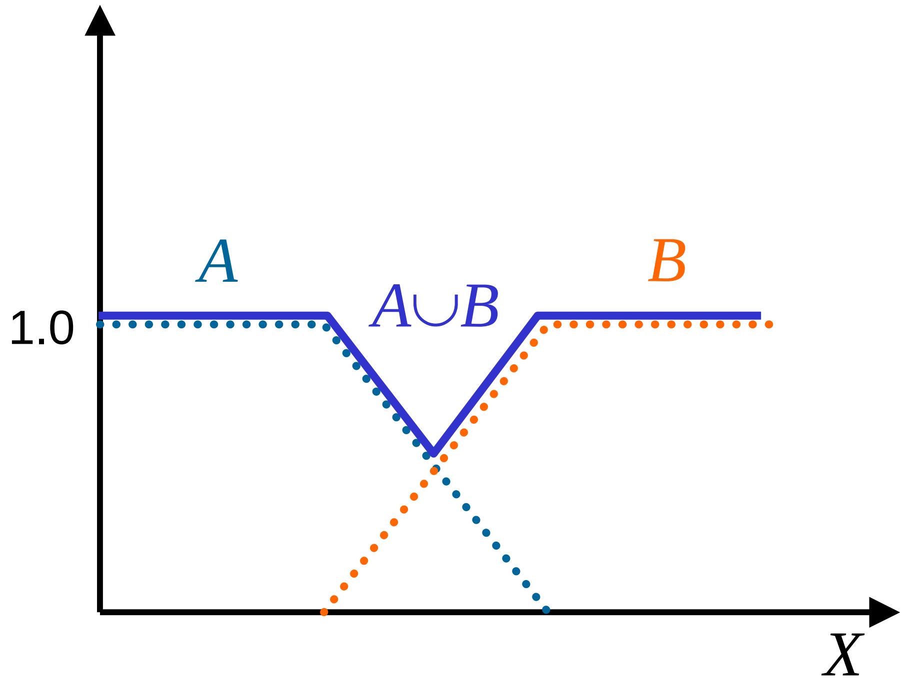
t-normas: Propriedades

$$xt_{11}y \leq xty \leq \min(x,y)$$

$\min(x,x) = x$ única t – norma idempotente

©DcaFeecUnicampGomide

União



$$(A \cup B)(x) = \max[A(x), B(x)] = A(x) \vee B(x) \qquad \forall x \in X$$

©DcaFeecUnicampGomide

s-normas: Generalização da União

$$\mathrm{s} : [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$$

$x\mathrm{s}y = y\mathrm{s}x$	Comutativa
$x\mathrm{s}(y\mathrm{s}z) = (x\mathrm{s}y)\mathrm{s}z$	Associativa
Se $x \leq y$ e $w \leq z$, então $x\mathrm{s}w \leq y\mathrm{s}z$	Monotônica
$x\mathrm{s}1 = 1 \;\; e \;\; 0\mathrm{s}x = x$	Contorno

©DcaFeecUnicampGomide

s-normas: Exemplos

$1 - x s_4 y = x + y - xy$ Soma Probabilística

$2 - x s_2 y = \min[1, (x + y + pxy), \quad p \geq 0$ Soma Limitada $(p = 0)$

$$3 - x s_{11} y = \begin{cases} x & \text{se } y = 0 \\ y & \text{se } x = 0 \\ 1 & \textit{caso contrário} \end{cases}$$ Soma Drástica

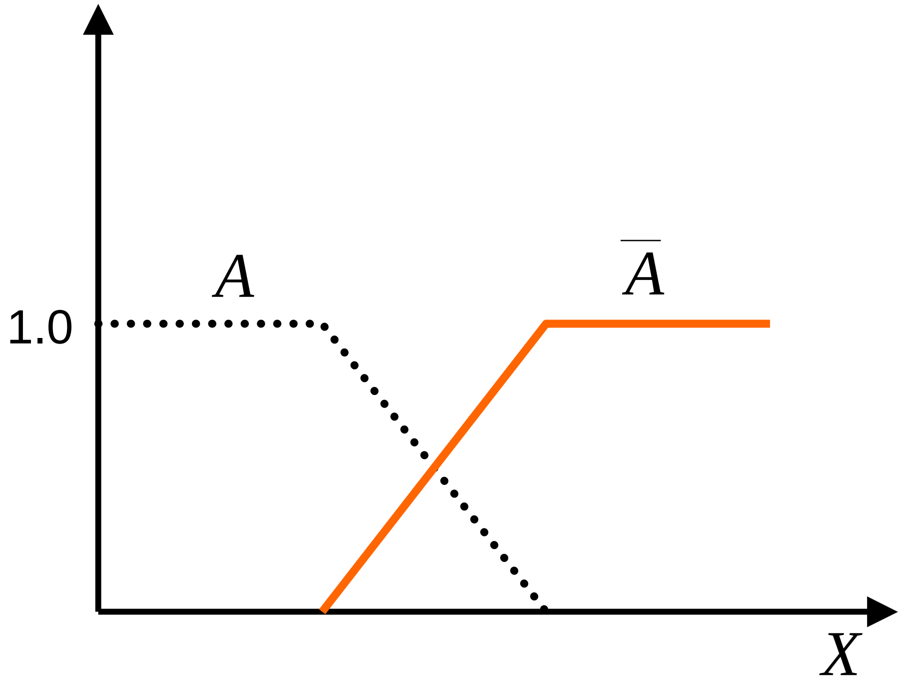
s-normas: Propriedades

$$\max(x, y) \leq xsy \leq x s_{11} y$$

$\max(x,x) = x$ única s – norma idempotente

©DcaFeecUnicampGomide

Complemento



$$\overline{A}(x) = 1 - A(x) \qquad \forall x \in X$$

©DcaFeecUnicampGomide

Normas Duais com Relação ao Complemento

t-norma e s-normas duais:

$$x\mathrm{s}y = 1 - (1 - x)\mathrm{t}(1 - y)$$

$$x\mathrm{t}y = 1 - (1 - x)\mathrm{s}(1 - y)$$

Generalização do seguinte:

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

De Morgan

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

©DcaFeecUnicampGomide

Operações de Agregação

$$A : [0,1]^n \rightarrow [0,1]$$

$$1 - A(0,0,....,0) = 0$$ Contorno

$$A(1,1,......,1) = 1$$

$$2 - A(x_1,...,x_n) \geq A(y_1,...,y_n) \text{ se } x_i \geq y_i, \quad i = 1,....,n$$ Monotônica

t-normas e s-normas são operadores de agregação

©DcaFeecUnicampGomide

Exemplos de Operações de Agregação

1-Operações Compensatórias

$$(A\Theta B)(x) = [(A \cap B)(x)]^{1-\gamma}[(A \cup B)(x)]^{\gamma}, \quad \gamma \in [0,1]$$

$$(A \otimes B)(x) = (1-\gamma)[(A \cap B)(x)] + \gamma[(A \cup B)(x)], \quad \gamma \in [0,1]$$

2-Soma Simétrica

$$S\_sum(x_1,\ldots,x_n) = \left[1 + \frac{\rho(1-x_1,\ldots,1-x_n)}{\rho(x_1,\ldots,x_n)}\right]^{-1}$$

Comutativa e Auto-dual

$\rho:$ função contínua e crescente com $\rho(0,\ldots,0) = 0$

©DcaFeecUnicampGomide

3-Médias Generalizadas

$$A(x_1,\ldots\ldots,x_n)=\sqrt[p]{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i)^p},\qquad p\in R \text{ e } p\neq 0$$

$$1-\text{Média Aritmética}\qquad (p=1)\quad A(x_1,\ldots\ldots,x_n)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$$

$$2-\text{Média Geométrica}\quad (p\to 0)\quad A(x_1,\ldots\ldots,x_n)=(x_1..x_i\ldots x_n)^{1/n}$$

$$3-\text{Média Harmônica}\quad (p=-1)\quad A(x_1,\ldots\ldots,x_n)=n/[\textstyle\sum_{i=1}^{n}(1/x_i)]$$

$$4-\text{Mínimo}\qquad (p\to-\infty)\quad A(x_1,\ldots\ldots,x_n)=\min[x_1,\ldots\ldots,x_n]$$

$$5-\text{Máximo}\qquad (p\to\infty)\quad A(x_1,\ldots\ldots,x_n)=\max[x_1,\ldots\ldots,x_n]$$

©DcaFeecUnicampGomide

4-OWA: Ordered Weighted Averaging

$$\mathbf{w} = (w_1, \ldots.., w_n), \qquad \sum_{i=1}^{n} w_i = 1$$

$\{A(x_i)\}$ sequência ordenada $A(x_1) \leq A(x_2) \leq \ldots \leq A(x_n)$

$$\text{OWA}(A, \mathbf{w}) = \sum_{i=1}^{n} w_i A(x_i)$$

$1 - \text{Média} \qquad \mathbf{w} = (1/n, \ldots 1/n) \quad \text{OWA}(A, \mathbf{w}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} A(x_i)$

$2 - \text{Mínimo} \qquad \mathbf{w} = (10\ldots0) \quad \text{OWA}(A, \mathbf{w}) = A(x_1) = \min[A(x_1), \ldots.., A(x_n)]$

$3 - \text{Máximo} \qquad \mathbf{w} = (0\ldots01) \quad \text{OWA}(A, \mathbf{w}) = A(x_n) = \max[A(x_1), \ldots., A(x_n)]$

©DcaFeecUnicampGomide

Operações de Negação

$$N:[0,1] \to [0,1]$$

Monotônica: N é não crecente

Condições de Contorno: $N(0)=1, \quad N(1)=0$

Adicionais

Continuidade: N é uma função contínua

Involução: $N(N(x)) = x, \quad x \in [0,1]$

$$N(x) = \frac{1-x}{1+\lambda x}, \quad \lambda \in (-1,\infty) \qquad \textit{Sugeno}$$

Exemplos

$$N(x) = \sqrt[w]{1-x^w}, \; w \in (0,\infty) \qquad \textit{Yager}$$

©DcaFeecUnicampGomide

Normas Duais com Relação à Negação: Sistema (t,s,*N*)

$$x\mathrm{s}y = N(N(x)\mathrm{t}N(y))$$
$$x\mathrm{t}y = N(N(x)\mathrm{s}N(y))$$

$$x\mathrm{t}y = \max\left(0, \frac{x+y-1+\lambda xy}{1+\lambda}\right)$$
$$x\mathrm{s}y = \min(1,\ x+y-1+\lambda xy)$$
$$N(x) = \frac{1-x}{1+\lambda x},\quad \lambda > 1$$

Exemplo

©DcaFeecUnicampGomide

Operações de Comparação

1-Medidas de Distância

$$d(A,B)=\left[\int_X |A(x)-B(x)|^p \, dx\right]^{1/p}, \quad p \geq 1$$

$$1-\text{Hamming} \quad (p=1) \quad d(A,B)=\int_X |A(x)-B(x)|\, dx$$

$$2-\text{Euclideana} \quad (p=2) \quad d(A,B)=\left[\int_X |A(x)-B(x)|^2 \, dx\right]^{1/2}$$

$$3-\text{Tchebyschev} \quad (p\rightarrow\infty) \quad d(A,B)=\sup_{x\in X} |A(x)-B(x)|$$

©DcaFeecUnicampGomide

2-Indices de Igualdade

Truth ($A \subset B$ e $B \subset A$) = true

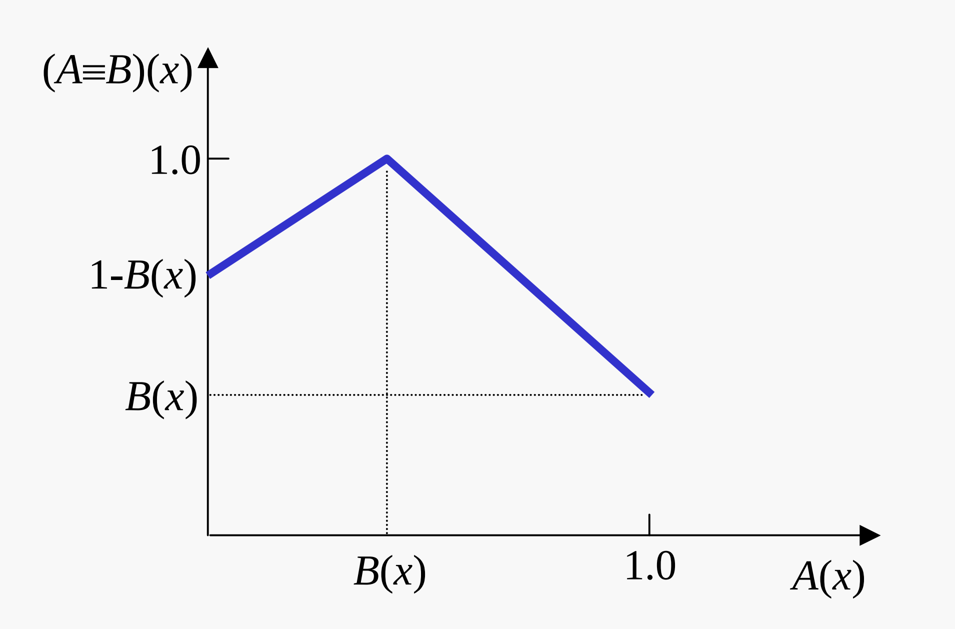
$$(A \equiv B)(x) = \frac{1}{2}\{([A(x)\varphi B(x)] \wedge [B(x)\varphi A(x)]) + ([\overline{A}(x)\varphi \overline{B}(x)] \wedge [\overline{B}(x)\varphi \overline{A}(x)])\}$$

$$A(x)\varphi B(x) = \sup_{c \in [0,1]} [A(x) \mathrm{t} c \leq B(x)]$$

$$a\varphi b = \sup_{c \in [0,1]} [a \mathrm{t} c \leq b] = a \to b = a \prec b, \qquad a, b \in [0,1)$$

a	b	a => b
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

©DcaFeecUnicampGomide



$$A(x)\varphi B(x) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad A(x) < B(x) \\ B(x) - A(x) + 1 & \text{se} \quad A(x) \geq B(x) \end{cases}$$

$$(A \equiv B)(x) = \begin{cases} A(x) - B(x) + 1 & \text{se} \quad A(x) < B(x) \\ B(x) - A(x) + 1 & \text{se} \quad A(x) \geq B(x) \end{cases}$$

$t = t_2, \quad p = 0$

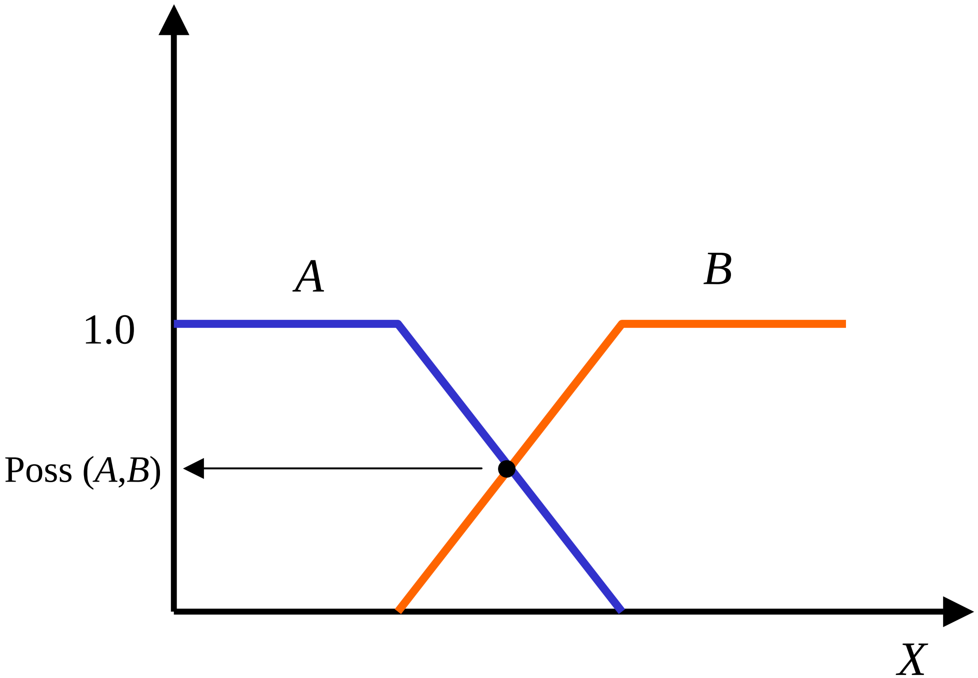
1 – Otimista $\quad (A \equiv B)_{opt} = \sup_{x \in X} (A \equiv B)(x)$

2 – Pessimista $\quad (A \equiv B)_{pes} = \inf_{x \in X} (A \equiv B)(x)$

3 – Médio $\quad (A \equiv B)_{av} = \dfrac{1}{Card(X)} \int_X (A \equiv B)(x) dx$

©DcaFeecUnicampGomide

3-Medida de Possibilidade



$$\text{Poss }(A,B)=\sup_{x\in X}[\min(A(x),B(x))]$$

$$\text{Poss }(A,B)=\sup_{x\in X}[A(x)\,t\,B(x)]$$

©DcaFeecUnicampGomide

Possibilidade

$$\Pi : P(X) \rightarrow [0,1]$$

$$a - \Pi(\phi) = 0; \quad \Pi(X) = 1$$

$$b - \Pi\left(\bigcup_{i=1,..,n} A_i\right) = \sup_{i=1,\ldots,n} \Pi(A_i), \qquad \forall A_i \in P(X),$$

$$1 - \Pi(A \cup B) = \max[\Pi(A), \Pi(B)], \quad \forall A, B \in P(X)$$

$$2 - \Pi(A \cap B) \leq \min[\Pi(A), \Pi(B)], \quad \forall A, B \in P(X)$$

$$3 - \text{Se} \;\; A \supseteq B, \;\; \text{então} \;\; \Pi\left(A\right) \geq \Pi(B)$$

$$4 - \forall A \in P(X)$$

$$\max[\Pi(A), \Pi(\overline{A})] = 1$$

$$\Pi(A) + \Pi(\overline{A})] \geq 1$$

©DcaFeecUnicampGomide

Exemplo 1: $X = \{2,3,4,5,6\}$

$\Pi(A_1) = \Pi(\{3,5\}) = 1$

$\Pi(A_2) = \Pi(\{4\}) = 0.4$

$\Pi(A_1 \cup A_2) = \Pi(\{3,4,5\}) = \max\,[1, 0.4] = 1$

Exemplo 2: $X = \{2,3,4,5,6\}$

$\Pi(A_1) = \Pi(\{3,5\}) = 1$

$\Pi(A_2) = \Pi(\{4\}) = 0.4$

$\Pi(A_3) = \Pi(\{2\}) = 0$

$\Pi(A) = \Pi(A_1 \cup A_3) = \Pi(\{2,3,5\}) = \max\,[1, 0] = 1$

$\Pi(B) = \Pi(A_2 \cup A_3) = \Pi(\{2,4\}) = \max\,[0.4, 0] = 0.4$

$\Pi(A \cap \mathrm{B}) = \Pi(\{2\}) = 0$

$\Pi(A) \neq 0$ e $\Pi(B) \neq 0$, contudo $\Pi(A \cap \mathrm{B}) = 0$

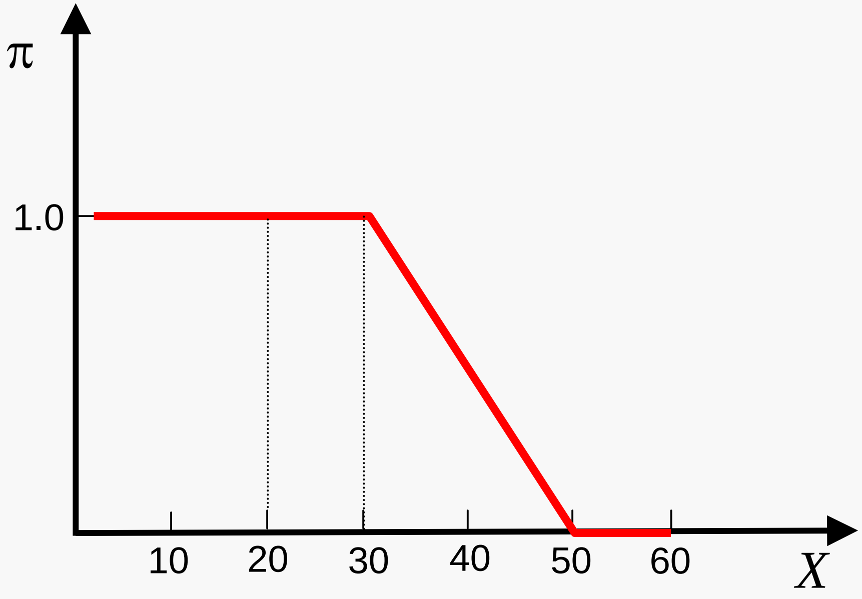
©DcaFeecUnicampGomide

Distribuição de Possibilidade

$$\pi : X \to [0,1], \qquad \sup_{x \in X} \pi(x) = 1$$

$$\Pi(A) = \sup_{x \in A} \pi(x), \qquad \forall A \in P(X)$$

$$\pi(x) = \Pi(\{x\}), \qquad \forall x \in X$$



$\Pi([20,30]) = 1$

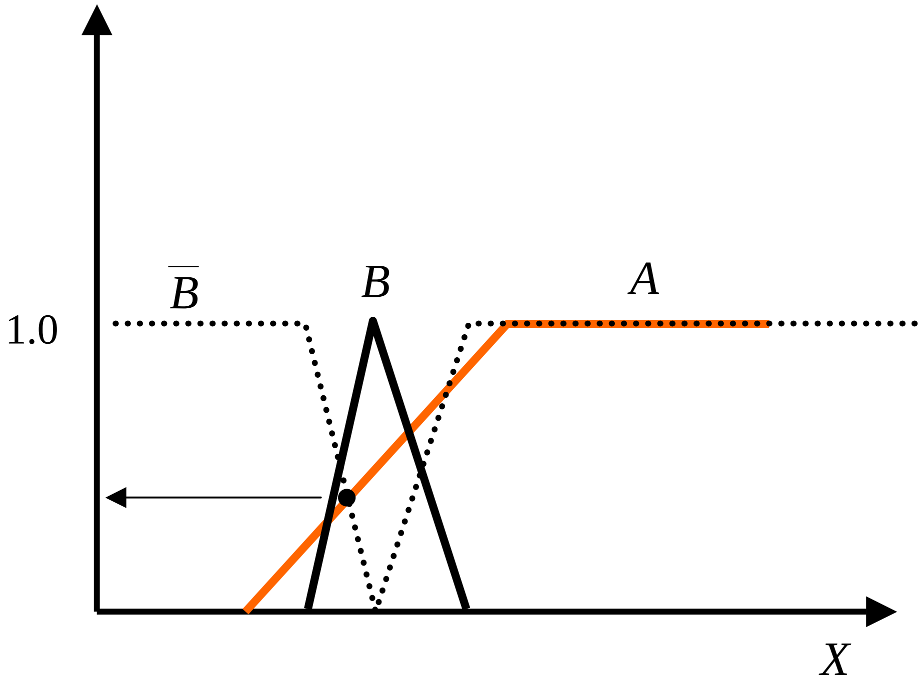
$\Pi([50,60]) = 0$

$\Pi([0,20]) = \Pi([21,60]) = 1$

Nota: [21,60] = complemento de [0,20] !

©DcaFeecUnicampGomide

4-Medida de Necessidade



$$\text{Nec}\,(A,B) = \inf_{x \in X}\,[\max(A(x),(1 - B(x)))]$$

$$\text{Nec}\,(A,B) = \sup_{x \in X}\,[A(x)\text{s}(1 \text{-} B(x))]$$

$$\text{Nec}\,(A,B) + \text{Poss}\,(\overline{A},B) = 1$$

©DcaFeecUnicampGomide

Necessidade

$$N : P(X) \to [0,1]$$

$$a - N(\phi) = 0; \quad N(X) = 1$$

$$b - N\left(\bigcap_{i=1,\ldots,n} A_i\right) = \inf_{i=1,\ldots,n} N(A_i), \quad \forall A_i \in P(X),$$

$$1 - N(A \cap B) = \min[N(A), N(B)], \quad \forall A, B \in P(X)$$

$$2 - N(A \cup B) \geq \max[N(A), N(B)], \quad \forall A, B \in P(X)$$

$$3 - \text{Se} \quad A \supseteq B, \quad \text{então} \quad N(A) \geq N(B)$$

$$4 - \forall A \in P(X)$$

$$\min[N(A), N(\overline{A})] = 0$$

$$N(A) + N(\overline{A})] \leq 1$$

©DcaFeecUnicampGomide

Relações Entre Possibilidade e Necessidade

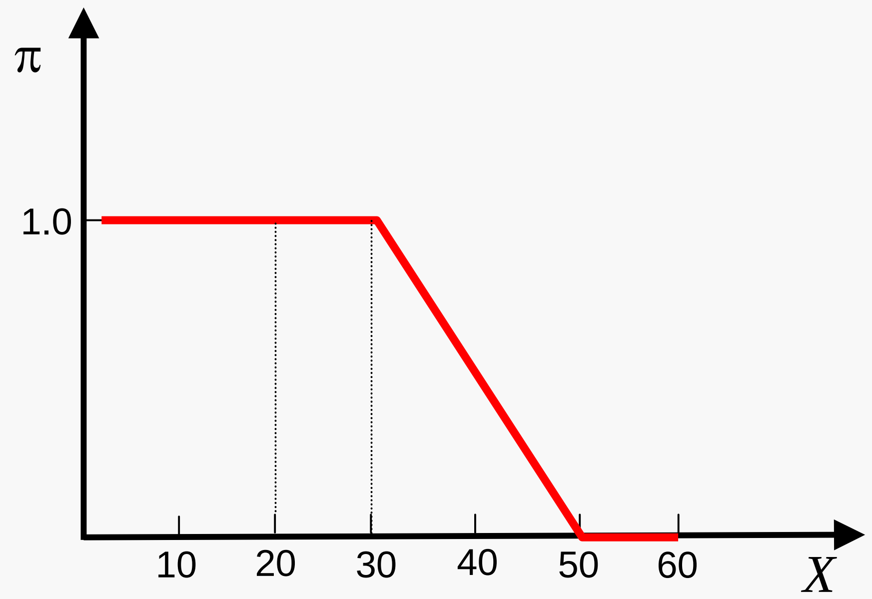
$$\forall A \in P(X)$$

$$N(A) = 1 - \Pi(\overline{A})$$

$$N(A) = \inf_{x \notin A} [1 - \pi(x)]$$

$$\Pi(A) \geq N(A)$$

$$\max[\Pi(A), 1 - N(A)] = 1$$



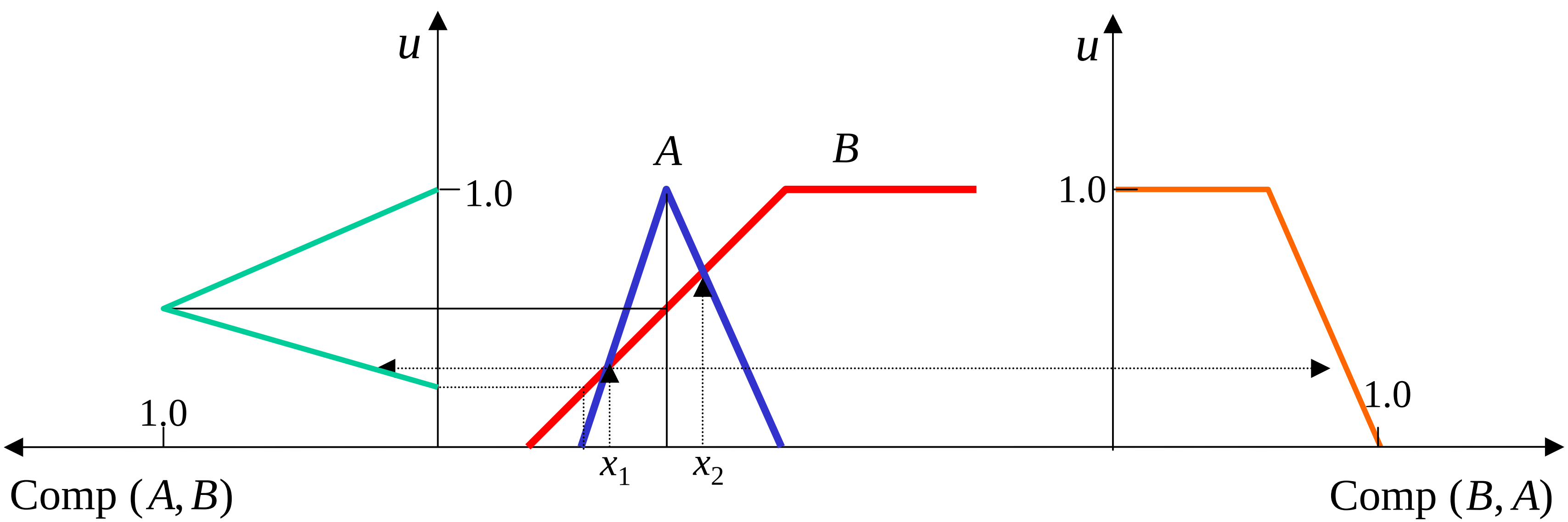
N([0,30]) = 1 - Π([31,60]) = 1 - π(31)

N([0,30]) = 0.1

©DcaFeecUnicampGomide

4-Medida de Compatibilidade

$$\text{Comp}\,(A,B)(u) = \sup_{u=B(x)} A(x), \qquad \forall u \in [0,1]$$



©DcaFeecUnicampGomide

Este material não pode ser reproduzido sem autorização prévia dos autores. Quando autorizado, seu uso é exclusivo para atividades de ensino e pesquisa em instituições sem fins lucrativos.

©DcaFeecUnicampGomide