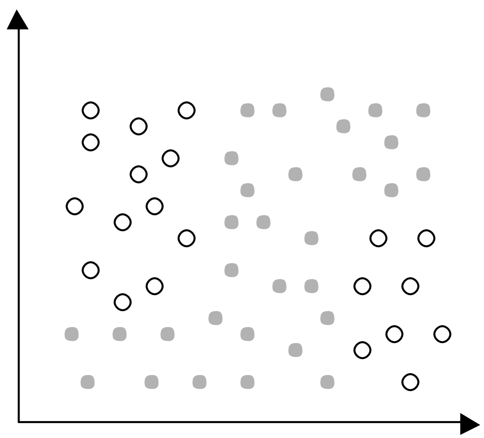
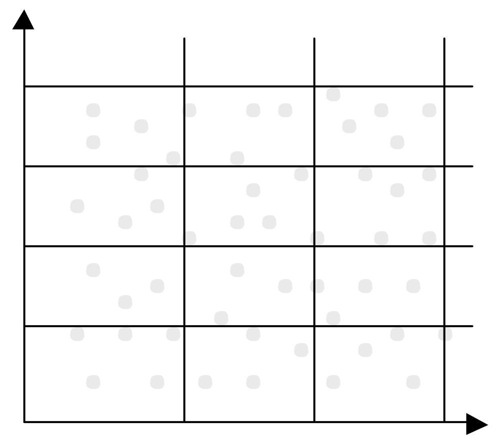
Computação com Regras

Introdução



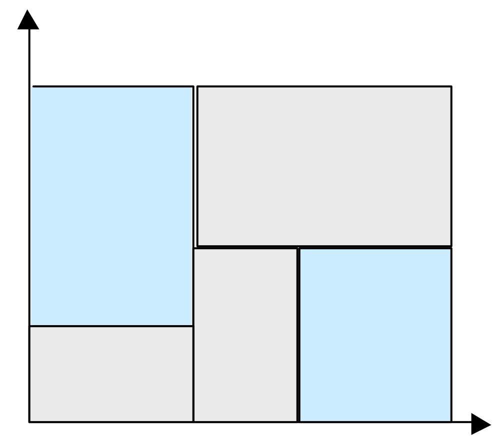
Dados

Números



Informação

Granularização



Conhecimento

Regras Se - Então

Conhecimento: coleção de proposições em uma linguagem

Conhecimento: coleção de proposições em uma linguagem

- representação manipulável $\longrightarrow$ computação
- proposição $\longrightarrow$ restrições nebulosas $\equiv$ relações nebulosas

Representação de proposições em representações manipuláveis envolve:

- Identificação das variáveis cujos valores são restritos pela proposição
- Identificação das restrições induzidas pelas proposições
- Caracterização de cada restrição através de relações nebulosas

Sintaxe

Proposição básica: The (attribute) of (object) is (value)

Forma canônica: p : X is *A*

Exemplo: Temperatura do forno é alta

temperatura (*forno*) é *alta*

p : T is *H*

variável com valor restrito:	*temperatura*
restrição induzida:	*alta*
caracterização:	conjunto nebuloso *alta* (*H*)

Proposições Compostas

Proposição composta: construida a partir de conjunções e/ou disjunções

Forma canônica:

p : X_1 is A_1 and X_2 is A_2 ..... and X_n is A_n $\rightarrow$ P

q : X_1 is A_1 or X_2 is A_2 ..... or X_n is A_n $\rightarrow$ Q

A_1, A_2 ..... A_n conjuntos nebulosos em X_1, X_2, ... , X_n

P e Q são relações em $X_1 \times X_2 \times ..... \times X_n$

$$P(x_1,\ldots,x_n) = \underset{i=1}{\overset{n}{\mathrm{T}}}[A_i(x_i)]$$

$$Q(x_1,\ldots,x_n) = \underset{i=1}{\overset{n}{\mathrm{S}}}[A_i(x_i)]$$

p : (X_1, X_2 ....., X_n) is P

q : (X_1, X_2 ....., X_n) is Q

Proposições Condicionais º Regras Se - Então

Forma canônica: **Se <antecedente> Então <consequente>**

antecedente: proposição nebulosa

consequente: proposição nebulosa

Exemplos

p : Se X_1 is A_1 and X_2 is A_2 ..... and X_n is A_n Então Y_1 is B_1 and Y_2 is B_2 ... And Y_m is B_m

q : Se X_1 is A_1 or X_2 is A_2 ..... or X_n is A_n Então Y_1 is B_1 or Y_2 is B_2 ..... or Y_m is B_m

A_1, A_2 ..... A_n conjuntos nebulosos em $X_1, X_2, \ldots, X_n$

B_1, B_2 ..... B_m conjuntos nebulosos em $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$

p e q induzem relações P e Q em $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n \times Y_1 \times \ldots \times Y_m$

$$P(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_m) = f(P_a(x_1,\ldots,x_n),P_c(y_1,\ldots,y_m))$$

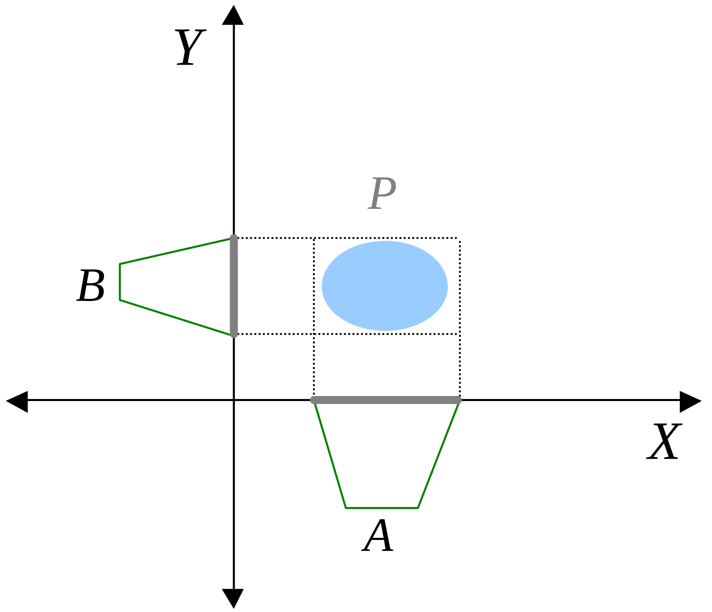
$$Q(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_m) = f(Q_a(x_1,\ldots,x_n),Q_c(y_1,\ldots,y_m))$$

p : (X_1, X_2, ..., X_n, Y_1, ..., Y_m) is P

q : (X_1, X_2, ..., X_n, Y_1, ..., Y_m) is Q

- P e Q são relações em $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n \times Y_1 \times \ldots \times Y_m$ induzidas por p e q
- P_a, Q_a e P_c, Q_c são as relações induzidas pelos antecedentes e consequentes
- ***f*** **define o significado da regra através de:**
    - **implicação nebulosa**
    - **conjunção (t-normas)**
    - **disjunção (s-normas)**

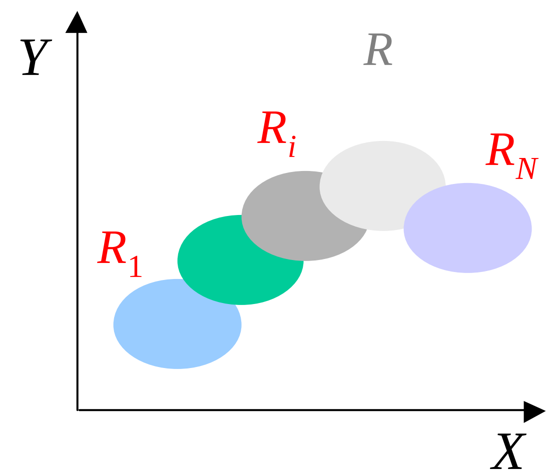
P :   Se X is A Então Y is B



Se X is A_1 Então Y is B_1

R :   Se X is A_2 Então Y is B_2

Se X is A_N Então Y is B_N



$$R = \mathop{\mathrm{A}}_{i=1}^{N} R_i$$

Regras Se - Então: Semântica

1-Conjunção nebulosa: $f_t : [0,1]^2 \rightarrow [0,1]$; $f_t(A(x), B(y)) = A(\mathrm{x})\ \mathrm{t}\ B(y), \forall(x,y)\ X \times Y$

- $f_c(A(x), B(y)) = A(\mathrm{x}) \wedge B(y)$ **Mamdani**
- $f_p(A(x), B(y)) = A(\mathrm{x})\ .\ B(y)$ **Larsen**

2-Disjunção nebulosa: $f_s : [0,1]^2 \rightarrow [0,1]$; $f_t(A(x), B(y)) = A(\mathrm{x})\ \mathrm{s}\ B(y), \forall(x,y)\ X \times Y$

3-Implicação nebulosa: $f_i : [0,1]^2 \rightarrow [0,1]$ tal que, $\forall(x,y)\ X \times Y$:

1. Monotônica no segundo: $B(y_1) \leq B(y_2) \rightarrow f_i(A(x), B(y_1)) \leq f_i(A(x), B(y_2))$
2. Dominância da falasidade: $f_i(0, B(y)) = 1$
3. Neutralidade da verdade: $f_i(1, B(y)) = B(y)$

Implicação nebulosa: em geral acrescenta-se o seguinte:

4. Monotônica no primeiro: $A(x_1) \leq A(x_2) \rightarrow f_i(A(x_1), B(y)) \geq f_i(A(x_2), B(y))$

5. Troca: $f_i(A(x_1), f_i(A(x_2), B(y))) = f_i(A(x_2), f_i(A(x_1), B(y)))$

6. Identidade: $f_i(A(x), A(x)) = 1$

7. Condições contorno: $f_i(A(x), B(y)) = 1 \quad \leftrightarrow \quad A(x) \leq B(y)$

8. Contraposição: $f_i(A(x), B(y)) = f_i(\overline{B}(y), \overline{A}(x))$

9. Continuidade: $f_i(A(x), B(y))$ é uma função contínua

Implicação nebulosa: classificada em duas grandes categorias

1. S – implicação : $f_{is}(A(x), B(y)) = \overline{A}(x) s B(y)$

2. R – implicação : $f_{ir}(A(x), B(y)) = \sup\limits_{c \in [0,1]} [A(x) t c \leq B(y)]$

Exemplos de implicações nebulosas

$$1- f_l(A(x),B(y)) = \min[1, 1-A(x)+B(y)]$$ Lukasiewic z

$$2- f_b(A(x),B(y)) = \max[1-A(x),B(y)]$$ Kleene

$$3- f_r(A(x),B(y)) = 1-A(x)+A(x).B(y)$$ Reichenbach

$$4- f_g(A(x),B(y)) = \begin{cases} 1 & A(x) \le B(x) \\ B(y) & A(x) > B(y) \end{cases}$$ Gödel

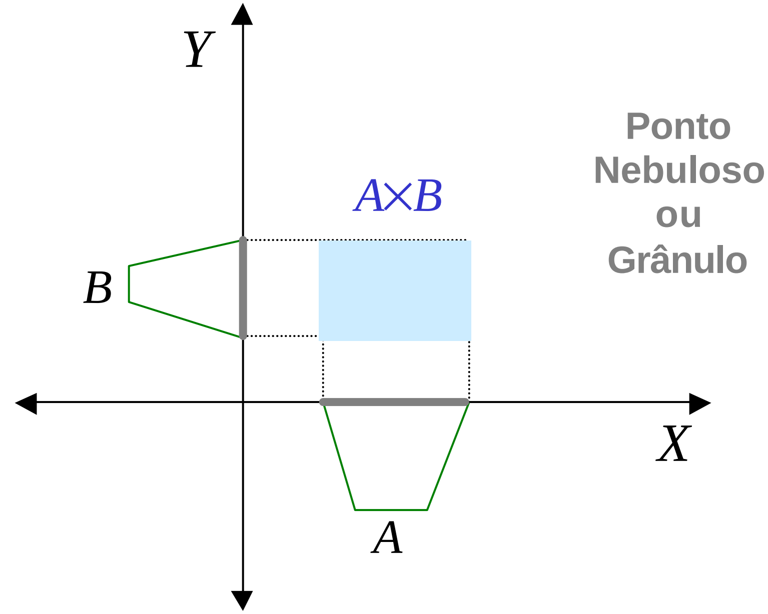
$$5\text{ - } f_\Delta(A(x),B(y)) = \begin{cases} 1 & A(x) \le B(x) \\ \dfrac{B(y)}{A(x)} & A(x) > B(y) \end{cases}$$ Goguen

Representação Granular e Grafos Nebulosos

P : Se X is A Então Y is B

(X,Y) is $A \times B$

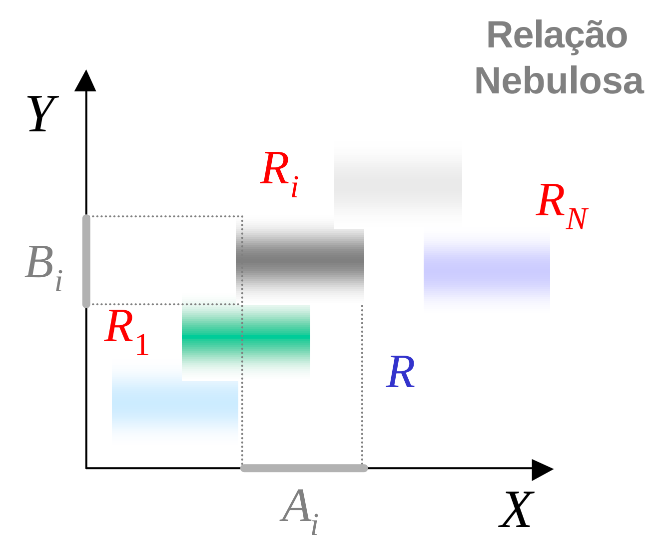
$A \times B = A \text{ t } B$



Se X is A_1 Então Y is B_1

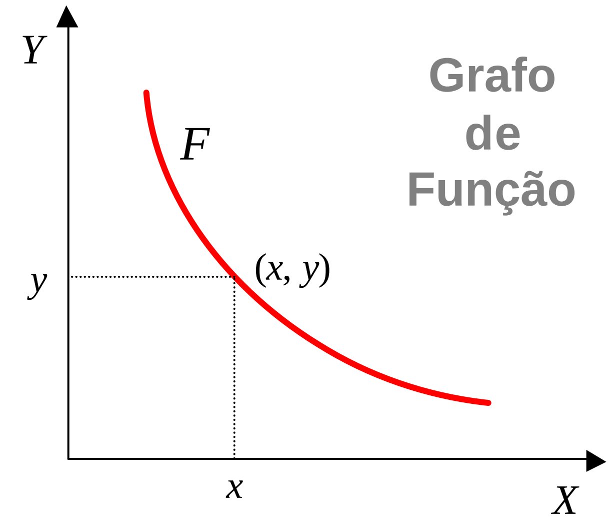
R : Se X is A_2 Então Y is B_2

Se X is A_N Então Y is B_N



$$(X,Y) \text{ is } \left(\sum_{i=1}^{N} A_i \times B_i\right) \equiv (X,Y) \text{ is } \sum_{i=1}^{N} R_i \equiv (X,Y) \text{ is } R$$

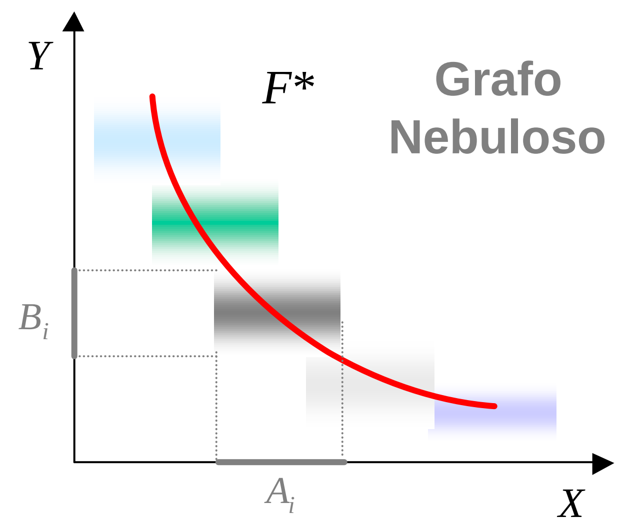
Grafo de Função



Função: $y = f(x)$; $\quad f : X \rightarrow Y$

Grafo: $F = \{\ (x,y)\ /\ y = f(x),\ x \in X,\ y \in Y\ \}$

Grafo Nebuloso de Função

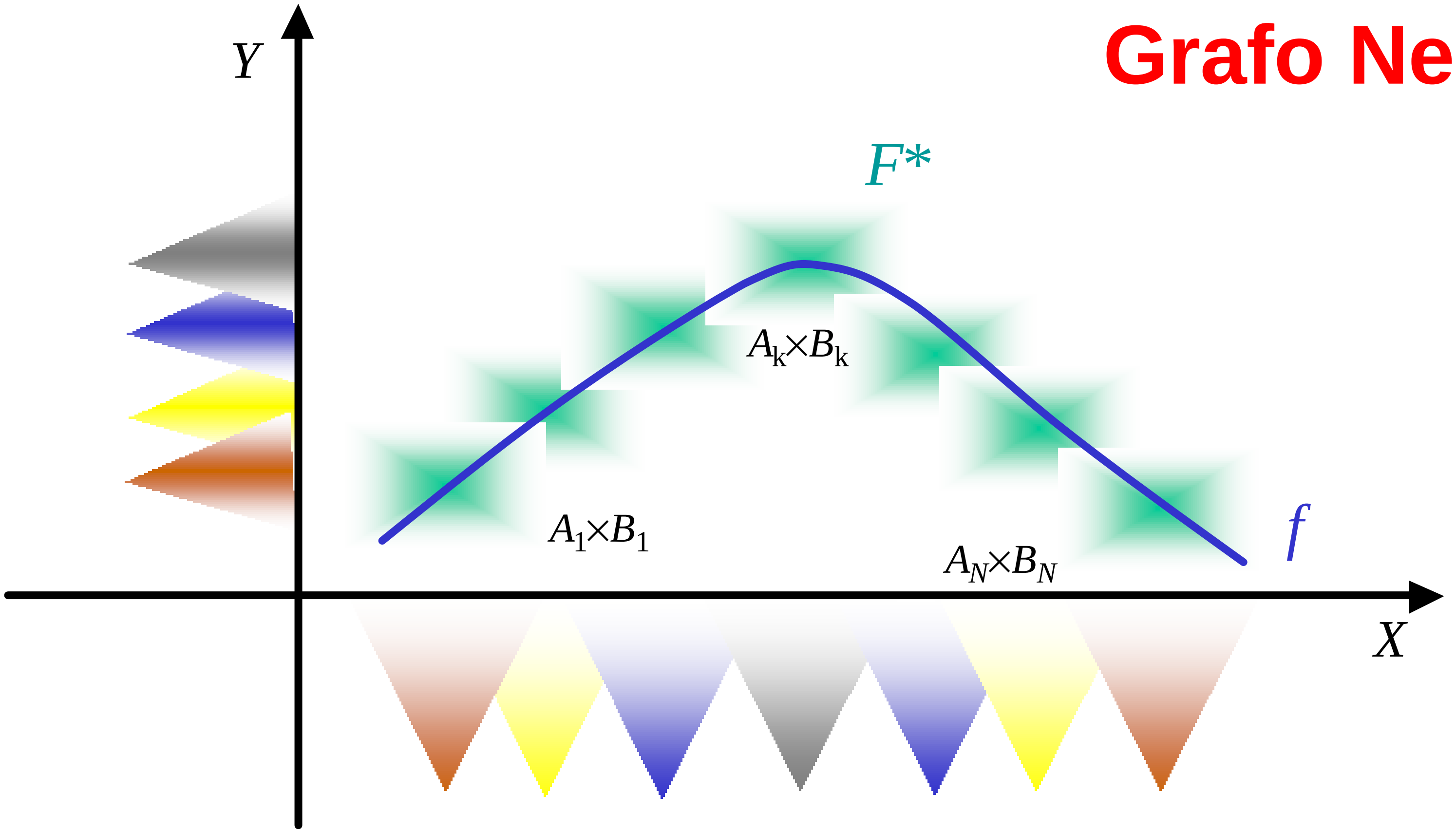


Função: $y = f(x)$; $\quad f : X \rightarrow Y$

Grafo Nebuloso: F^* = representação aproximada, **granular** da função f

$$F^*(x,y) = \mathop{\mathrm{S}}_{i=1}^{N} [A_i(x)\, \mathrm{t}\, B_i(y)], \qquad \forall (x,y) \in X \times Y$$

Grafo Nebuloso

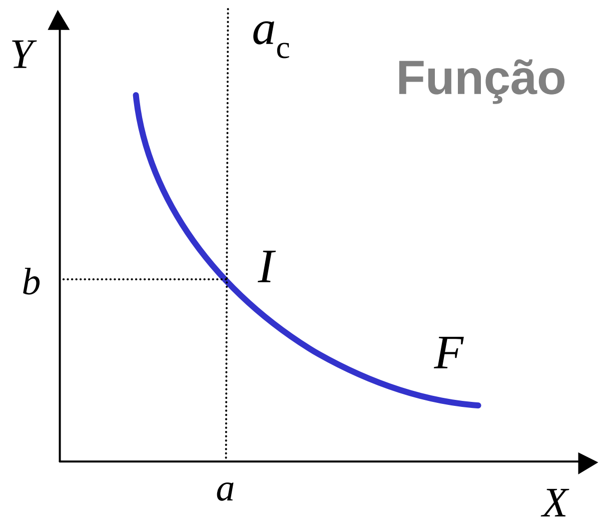


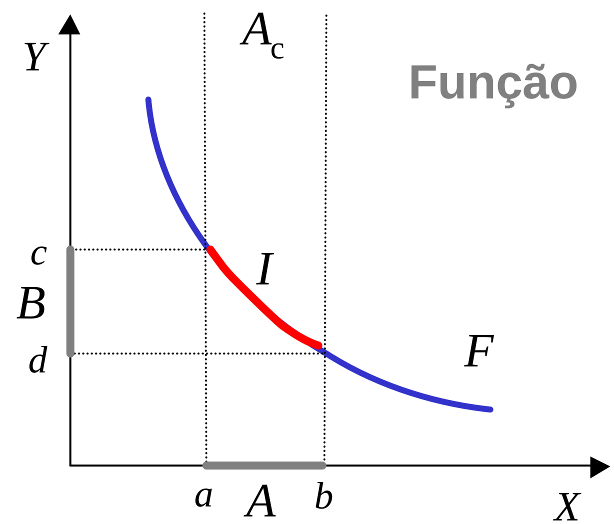
$F^* = \sum_k A_k \times B_k \;\rightarrow\;$ grafo nebuloso $\rightarrow$ relação nebulosa em $X \times Y$

F* é uma **aproximação granular** de ***f***

$F^* = \sum_k R_k = R$

Inferência e Raciocínio Aproximado

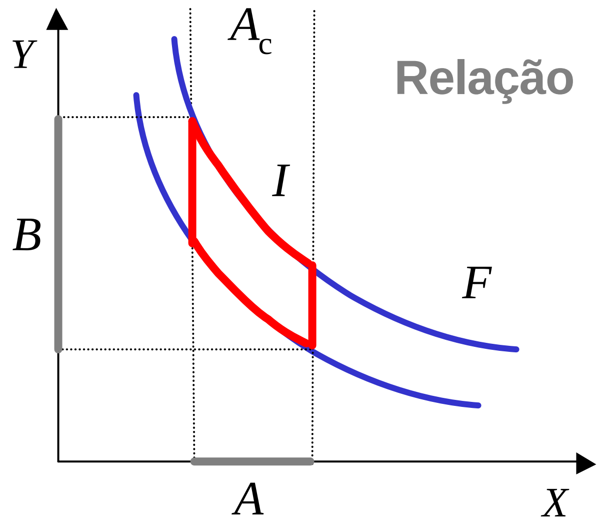


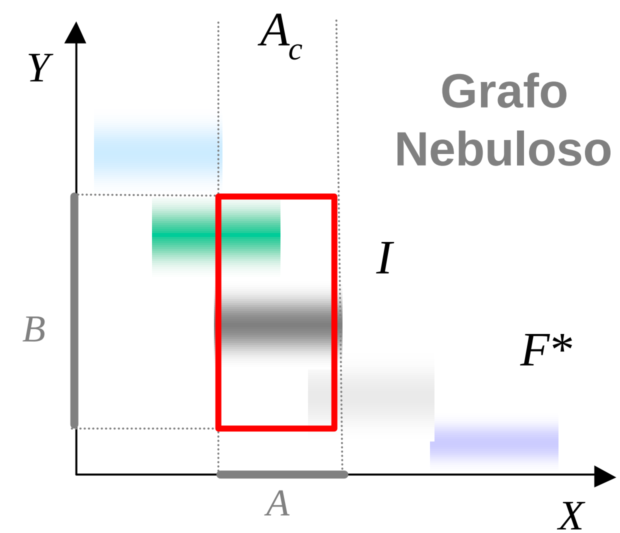


$$\frac{\begin{array}{l} x = a \\ y = f(x) \end{array}}{y = b}$$

$$\frac{\begin{array}{l} x \text{ is } A \\ (x, y) \text{ is } F \end{array}}{y \text{ is } B}$$

Inferência e Raciocínio Aproximado

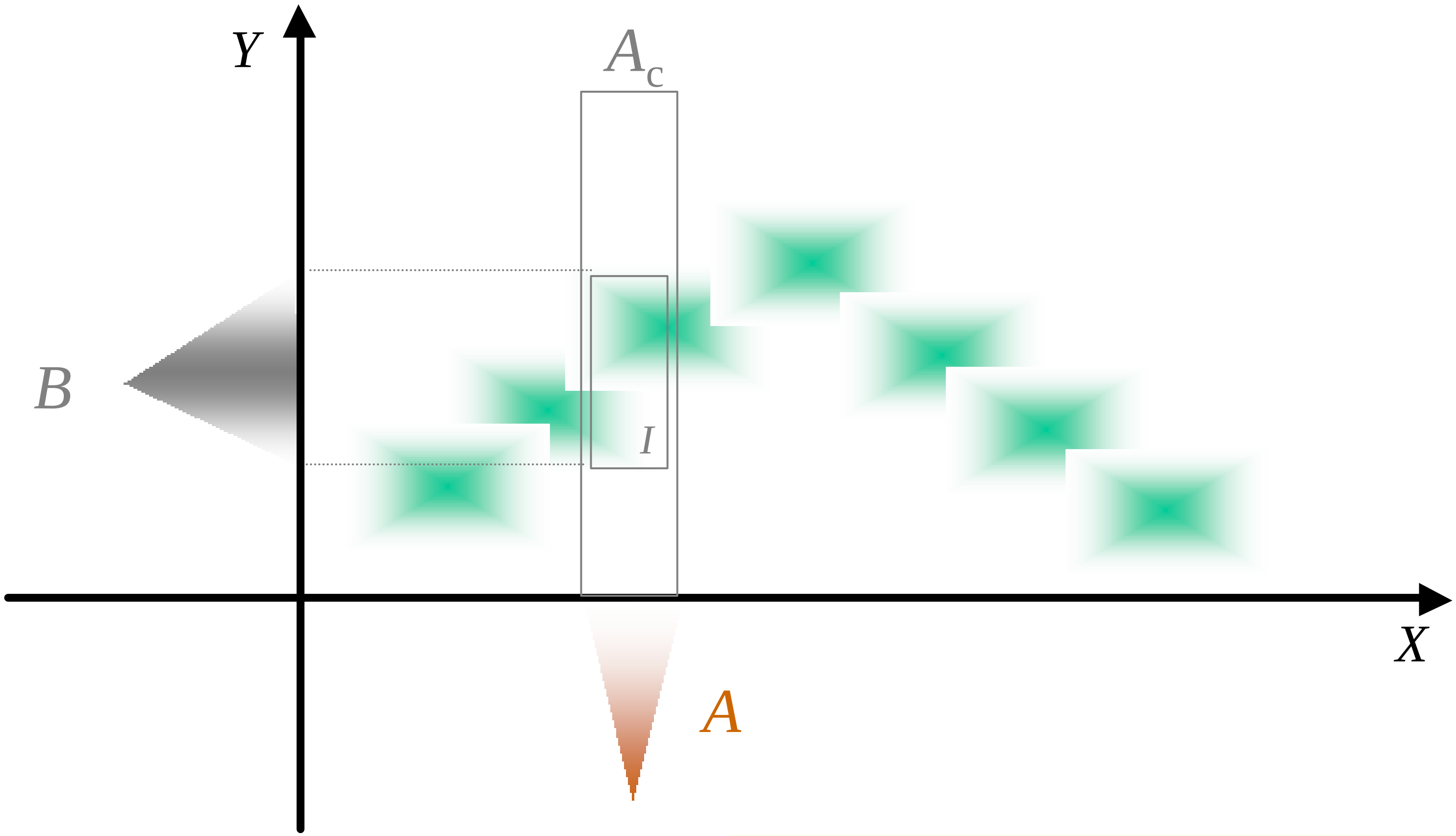




$$\frac{\begin{array}{l} x \text{ is } A \\ (x, y) \text{ is } F \end{array}}{y \text{ is } B}$$

$$\frac{\begin{array}{l} \text{X is } A \\ (\text{X}, \text{Y}) \text{ is } F^* \end{array}}{\text{Y is } B}$$

Inferência e Raciocínio Aproximado



X is A

(X,Y) is R

Y is $A \circ R$

$B = \mathrm{Proj}_Y(A_c \cap \sum_I R_i\ ) = \mathrm{Proj}_Y\ (\ A_c \cap R\ )$

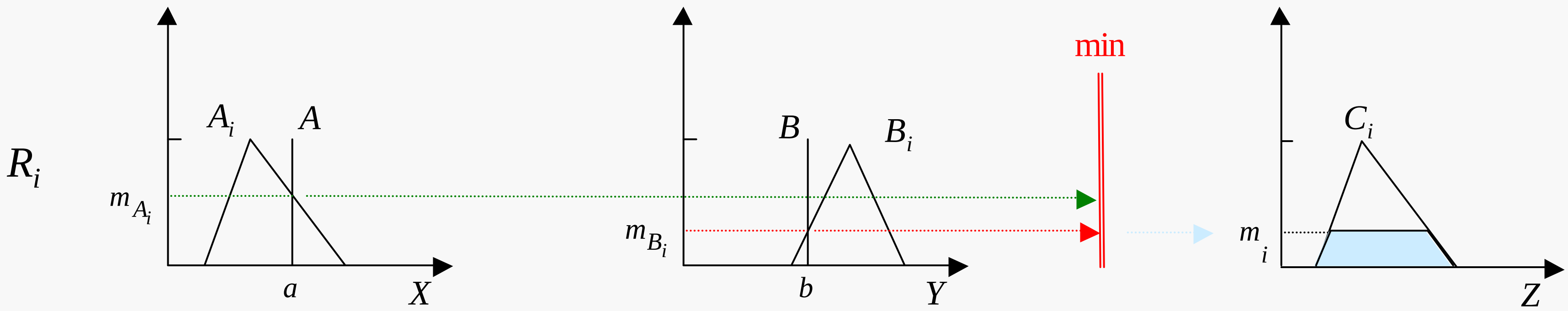
$B = A \circ R$ Regra da Composição

$B(y) = \sup_x [\ A(x)\ t\ R(x,y)\ ]$

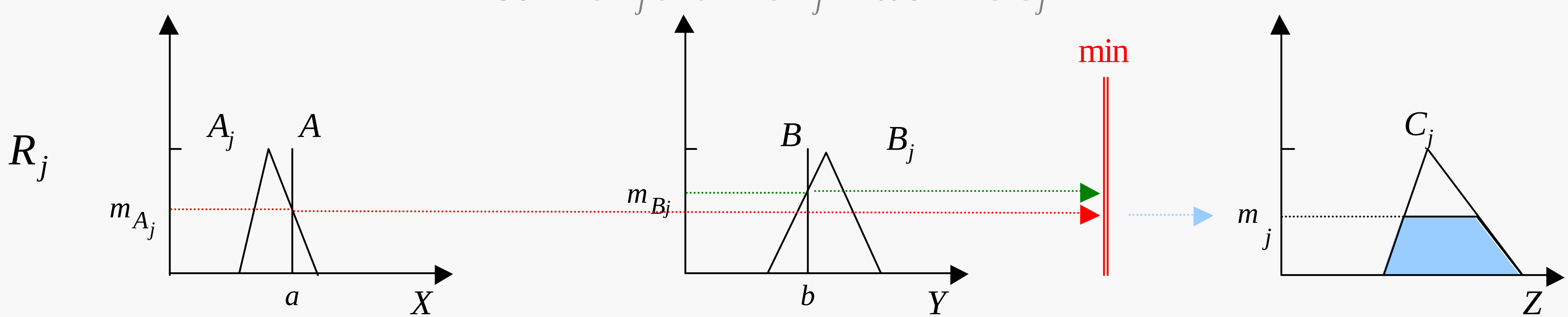
Inferência: Método de Mamdani

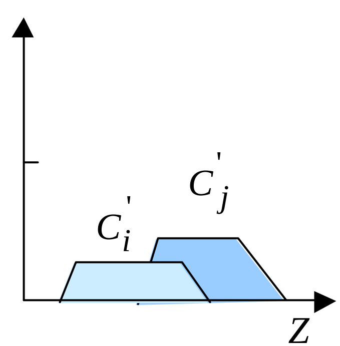
X is *A* and Y is *B*

Se X is A_i and Y is B_i Então Z is C_i

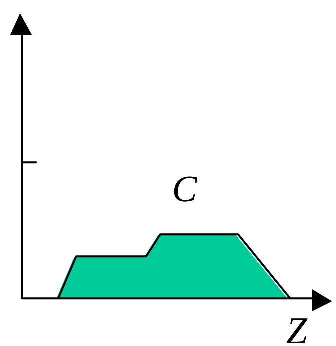


Se X is A_j and Y is B_j Então Z is C_j





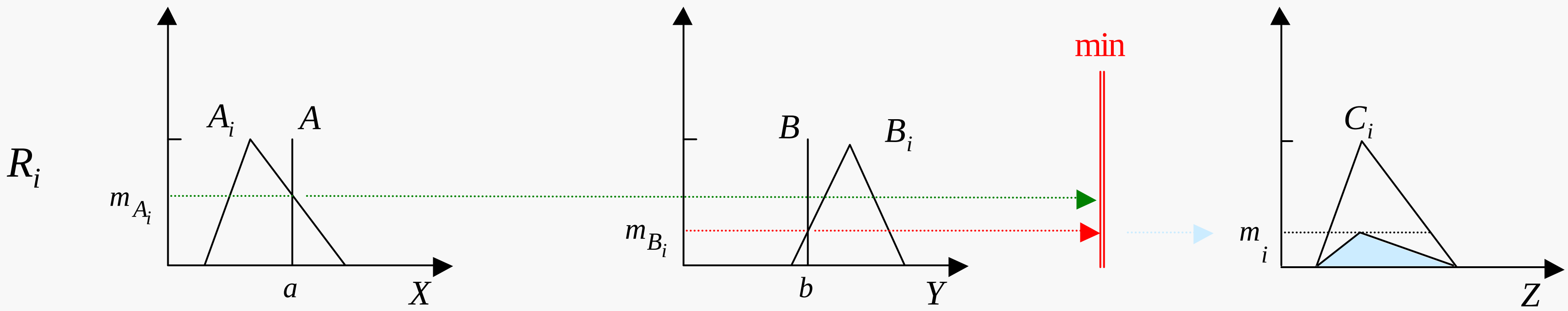
$$C_i^{'} \cup C_j^{'} = C$$



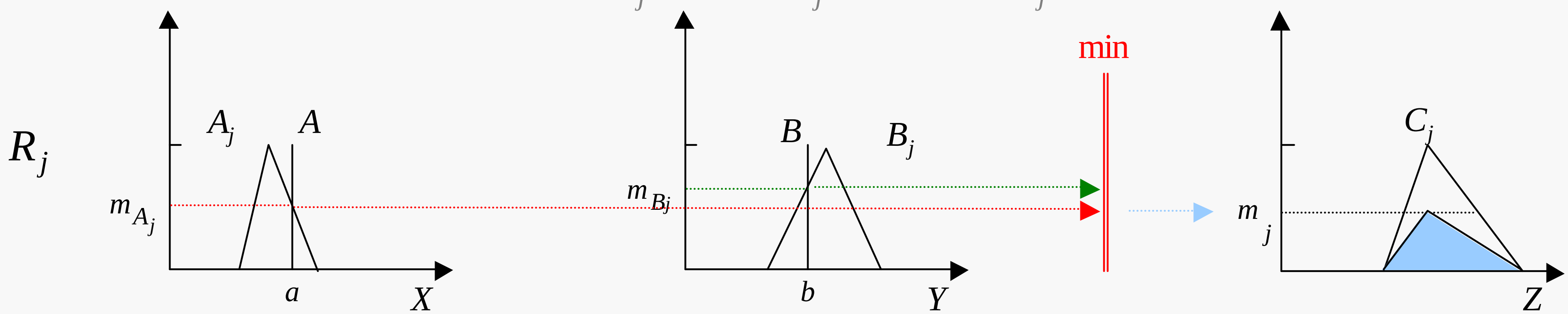
Inferência: Método de Larsen

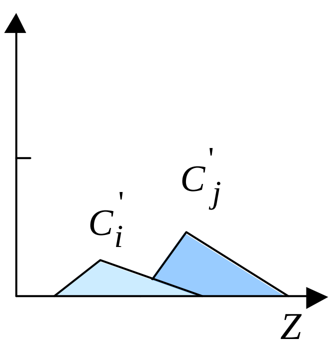
X is *A* and Y is *B*

Se X is A_i and Y is B_i Então Z is C_i

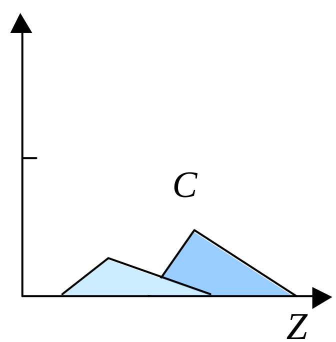


Se X is A_j and Y is B_j Então Z is C_j



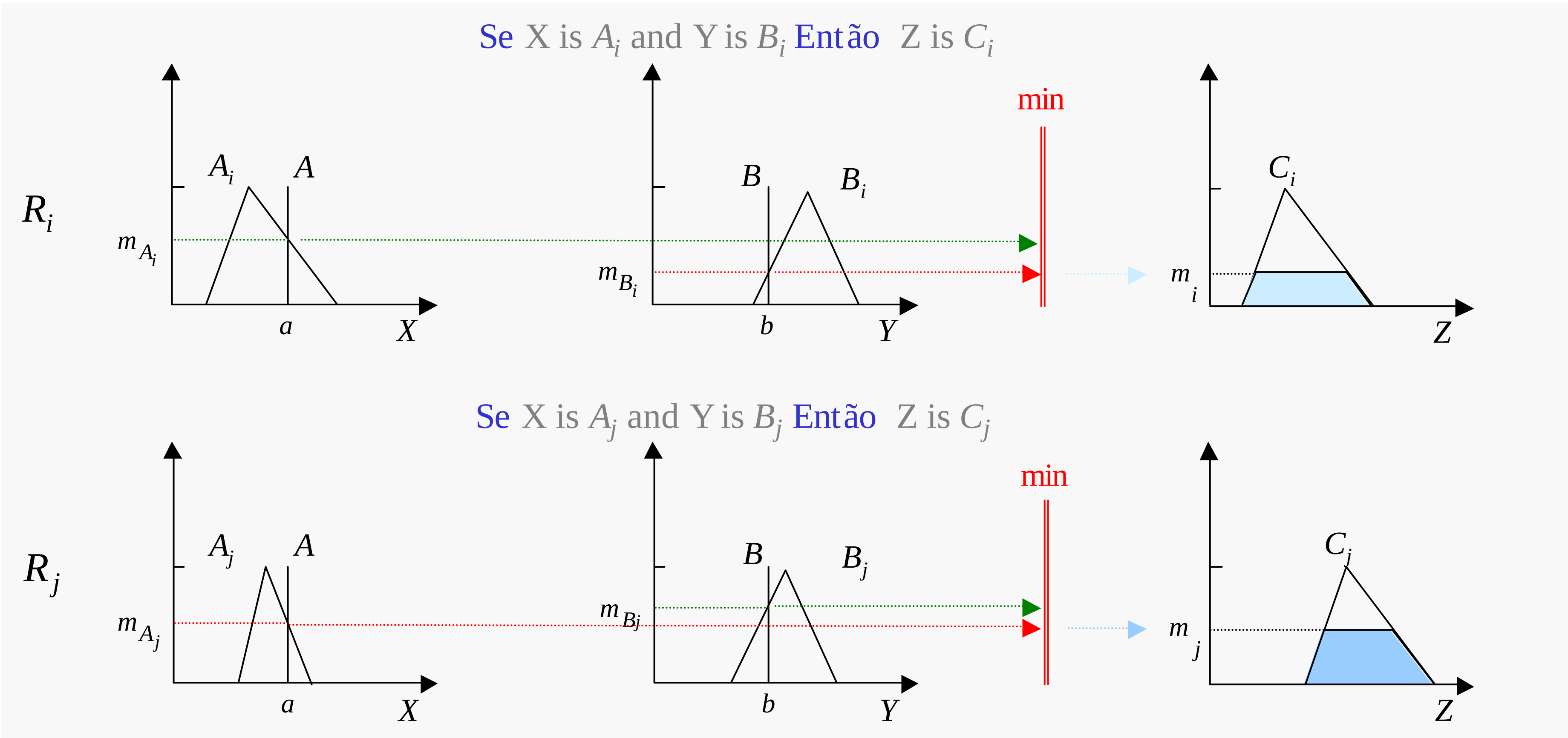


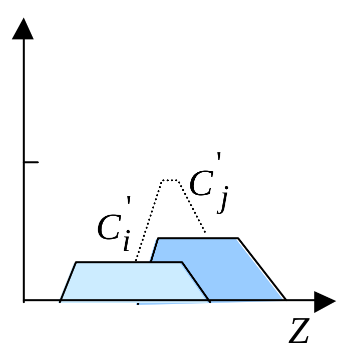
$$C_i' \cup C_j' = C$$



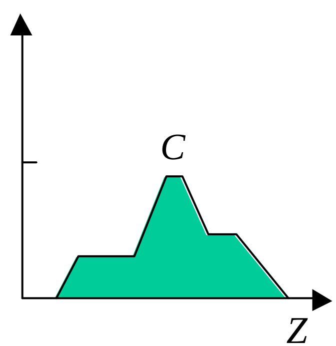
Inferência: Método Aditivo de Kosko-Mizumoto

X is A and Y is B



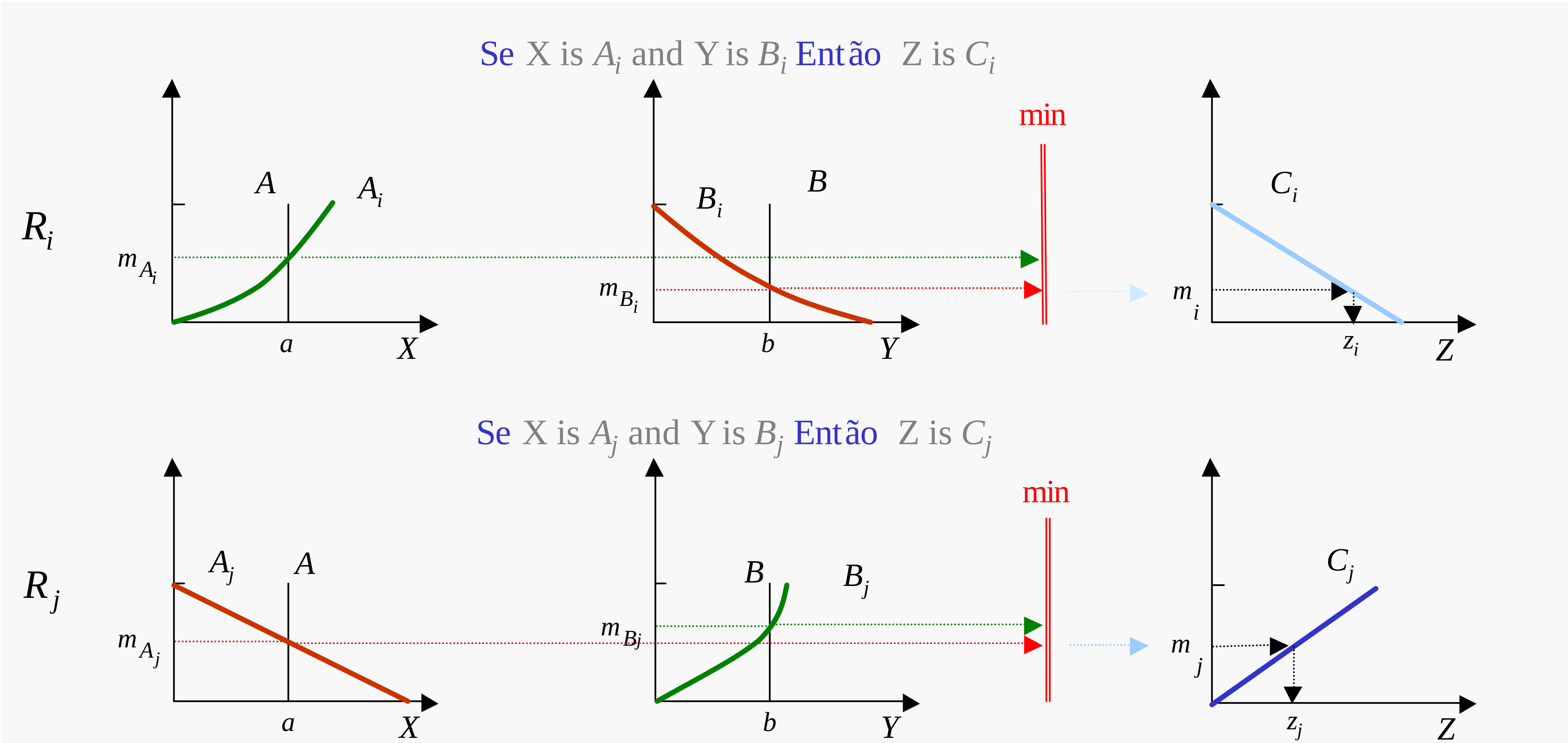


$$C'_i + C'_j = C$$



Inferência: Método de Tsukamoto

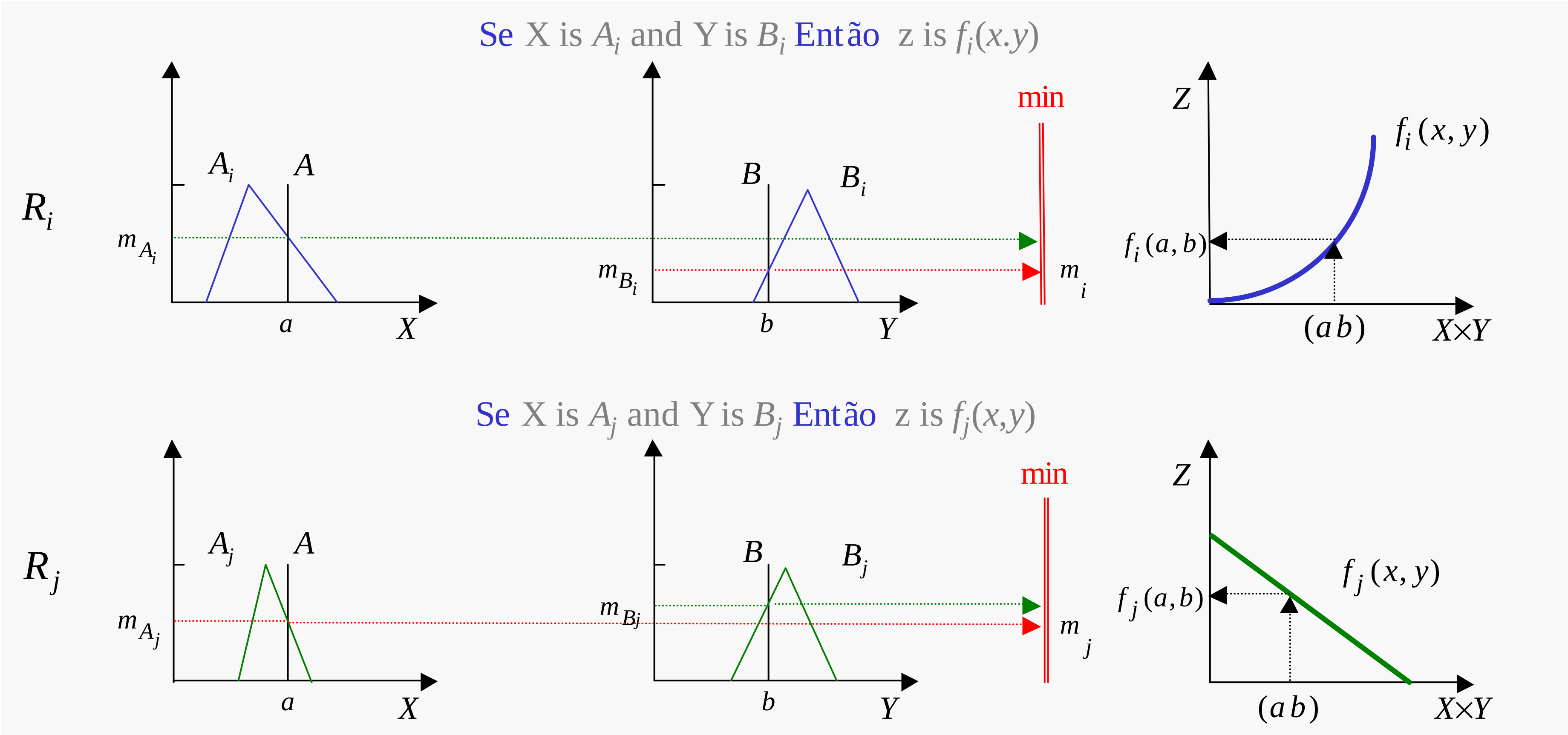
X is *A* and Y is *B*



$$z = \frac{m_i z_i + m_j z_j}{m_i + m_j}$$

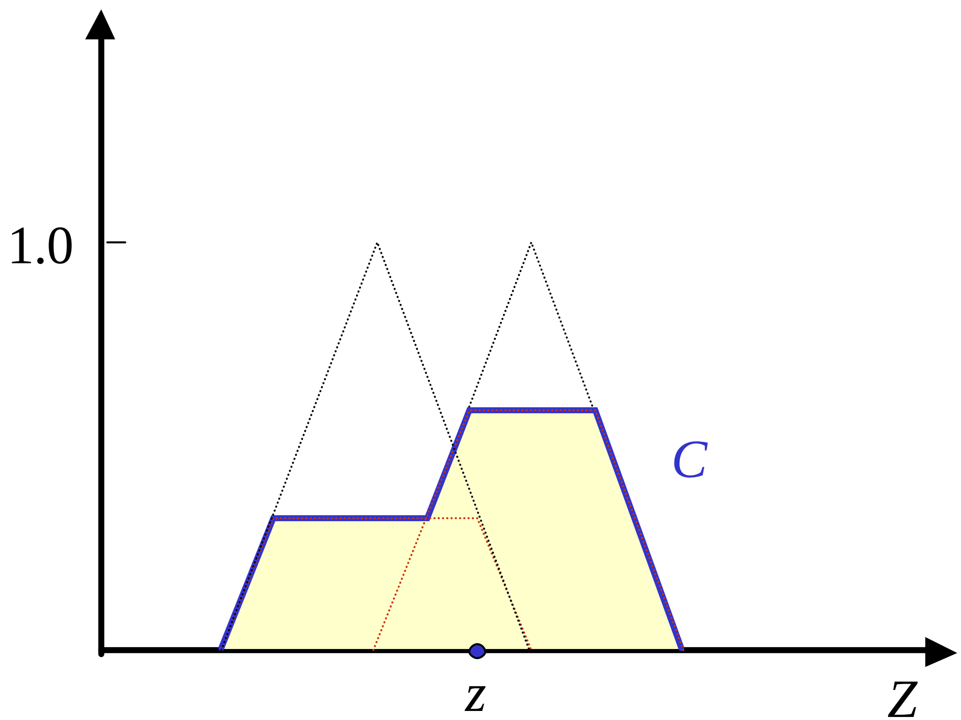
Inferência: Método de Takagi-Sugeno

X is A and Y is B



$$z = \frac{m_i f_i(a,b) + m_j f_j(a,b)}{m_i + m_j}$$

Defuzificação: Centro de Gravidade

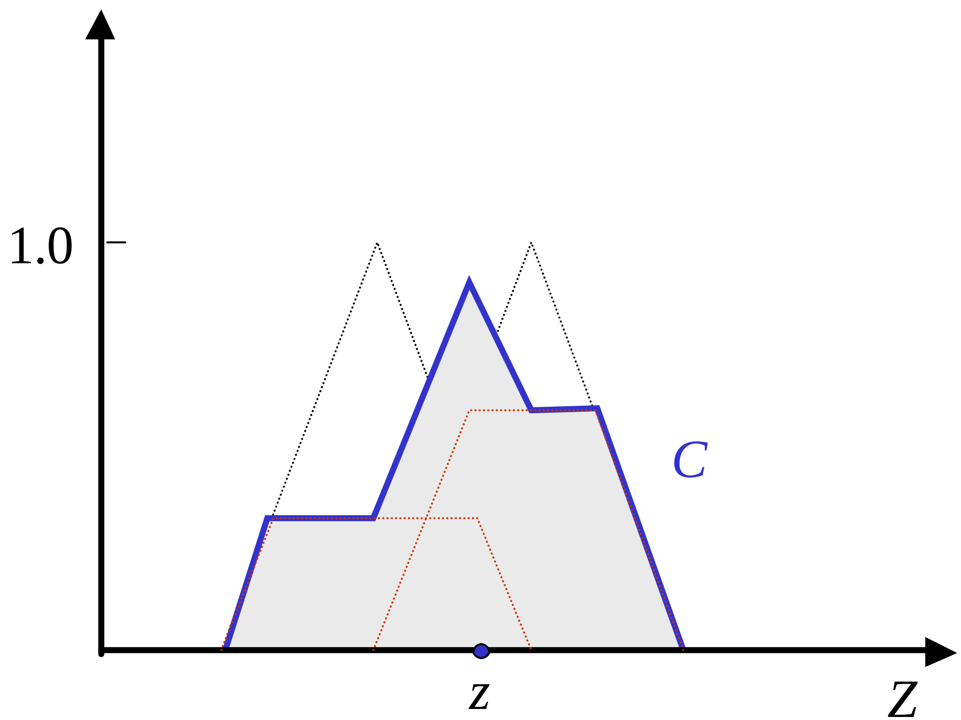


$$z = \frac{\sum_{i=1}^{n} z_i C(z_i)}{\sum_{i=1}^{n} C(z_i)}$$

$$Z = [z_1, \ldots\ldots, z_n]$$

$$C = \bigcup_{k=1}^{N} C_k^{'}$$

Defuzificação: Centro da Soma

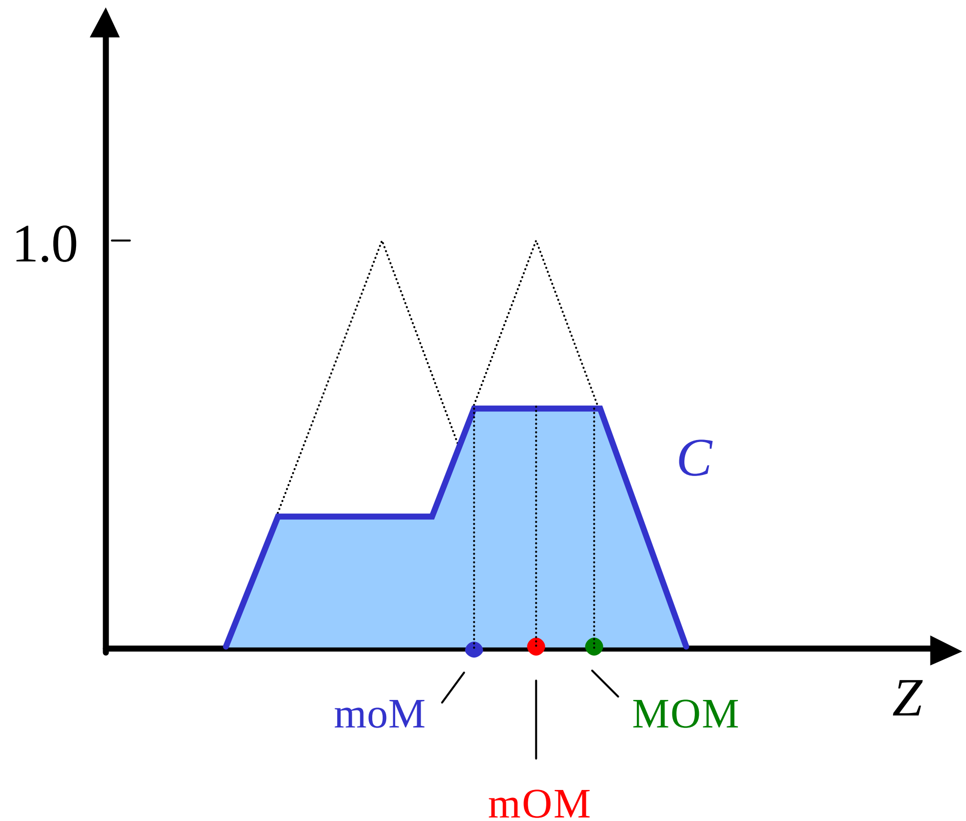


$$z = \frac{\sum_{i=1}^{n} z_i \sum_{k=1}^{N'} C'_k(z_i)}{\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{N'} C'_k(z_i)}$$

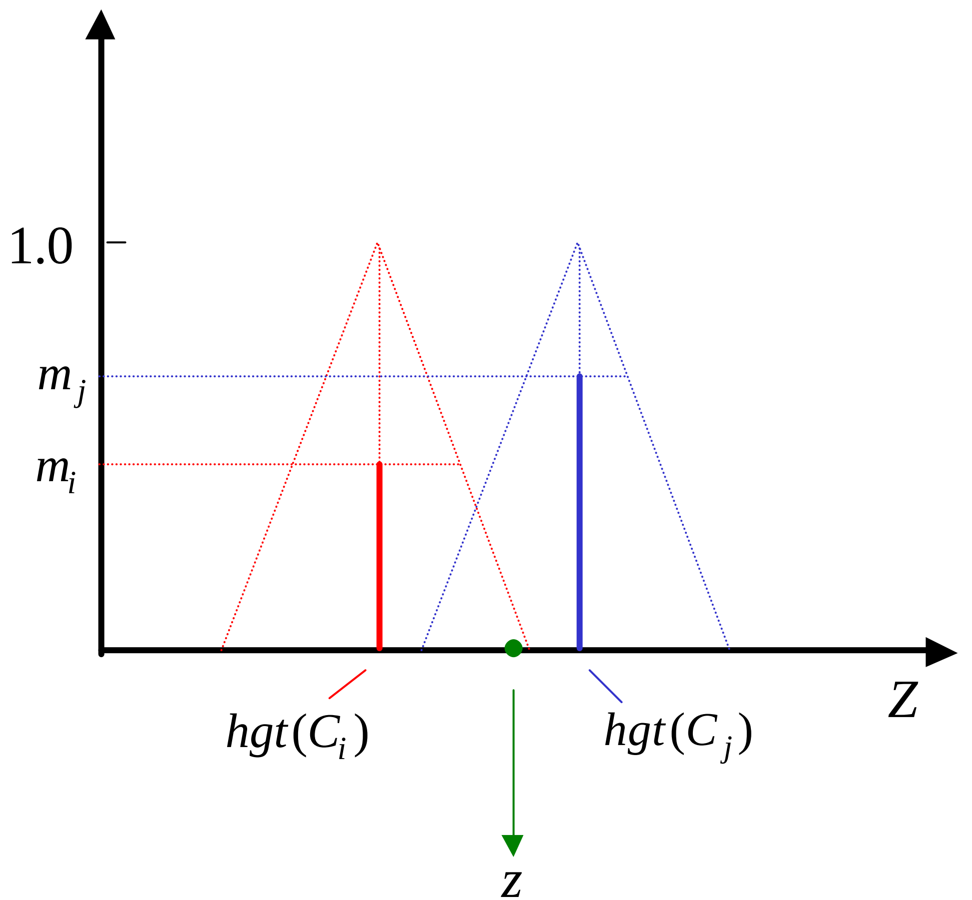
$$Z = [z_1, \ldots\ldots, z_n]$$

$$N' = \text{número de regras ativas}$$

Defuzificação: Método dos Máximos



Defuzificação: Método das Alturas



$$z = \frac{\sum_{k=1}^{N'} m_k hgt(C_k)}{\sum_{k=1}^{N'} hgt(C_k)}$$

$N' =$ número de regras ativas

Características da Regra da Composição

Método Global

$$P_c = P_a \circ \overset{N}{\underset{k=1}{\mathrm{A}}} R_k$$

Método Local

$$P_c = \overset{N}{\underset{k=1}{\mathrm{A}}} (P_a \circ R_k)$$

Em geral

$$\overset{N}{\underset{k=1}{\mathrm{A}}} (P_a \circ R_k) \neq P_a \circ \overset{N}{\underset{k=1}{\mathrm{A}}} R_k$$

Sup-min ou sup-t, t contínua
União = max
Interseção = mínimo

$$P_a \circ (\bigcap_{k=1}^{N} R_k) \subseteq \bigcap_{k=1}^{N} P_a \circ R_k \subseteq P_a \circ \bigcup_{k=1}^{N} R_k = \bigcup_{k=1}^{N} P_a \circ R_k$$

Sistemas Baseados em Regras Nebulosas
Aproximação Universal e Interpolação

1-Zadeh (1988)

- grafos nebulosos
- interpolação

2-Wang e Mendel (1992)

- regras: fp
- conjunção antecedente: produto algébrico
- composição sup-min
- agregação de regras: soma
- defuzificação: COG
- funções de pertinência: gaussianas
- entradas: pontos

3-Kosko (1994)

- condições similares as Wang e Mendel
- sistemas aditivos
- regras f_c e simetria nas funções do consequente

4-Castro (1995) e Castro e Delgado (1996)

- regras: f_{ir} ou f_c
- conjunção antecedente: t-normas arbitrárias
- defuzificação: COG
- funções pertinência triangular ou trapezoidal