IA 810 Otimização de Sistemas de Grande Porte

2-Programação Linear

©DCA-FEEC-Unicamp

Conteúdo

1. Algoritmo simplex
2. Algoritmo simplex revisado
3. Dualidade em programação linear
4. Algoritmo dual simplex
5. Algoritmo branch-and-bound

©DCA-FEEC-Unicamp

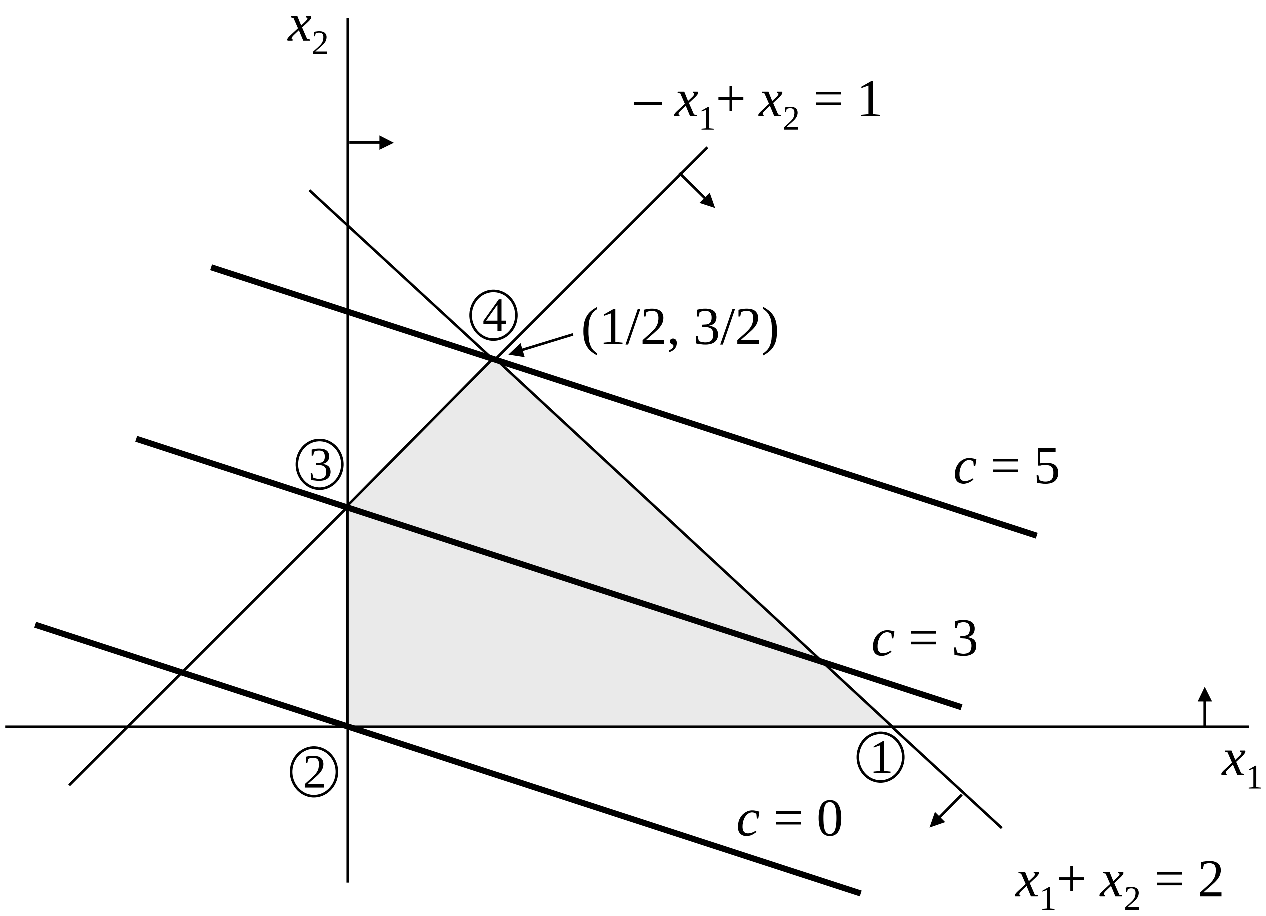
1-Algoritmo simplex

- Geometria da programação linear

$$
\begin{aligned}
max \ \ z = {} & x_1 + 3x_2 \\
sa \quad & -x_1 + x_2 \leq 1 \\
& x_1 + x_2 \leq 2 \\
& x_1, \ \ x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

©DCA-FEEC-Unicamp

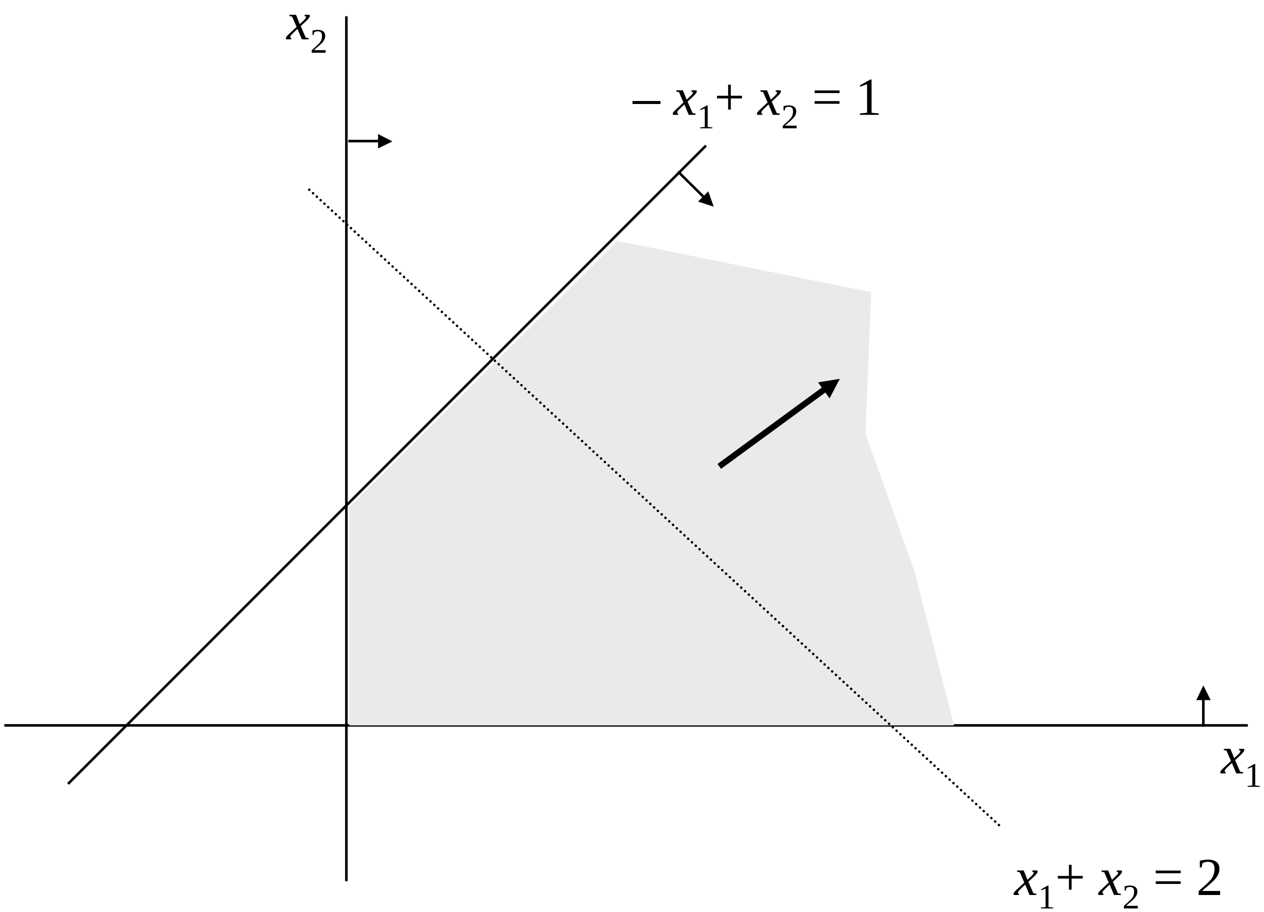
- Solução ótima finita



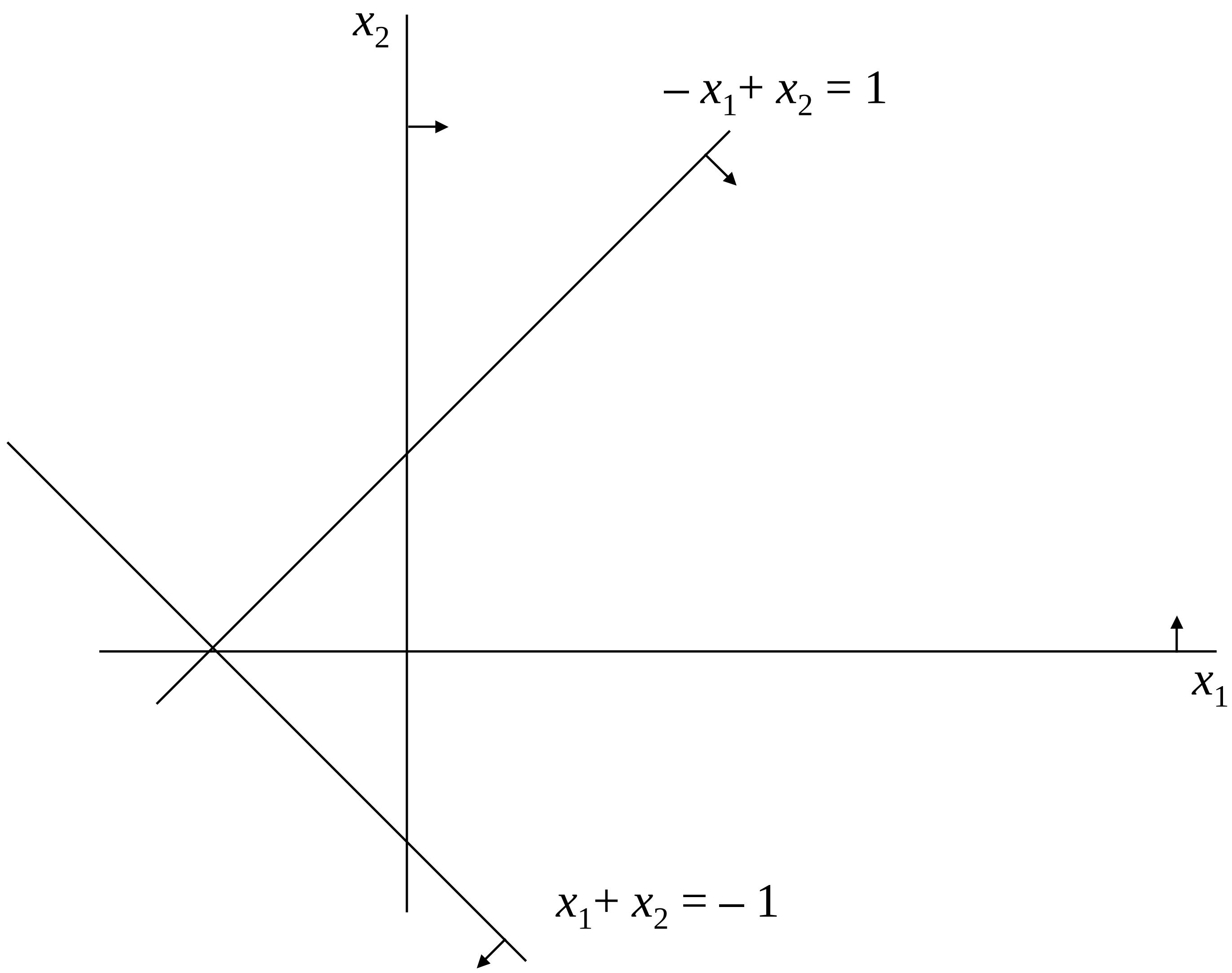
$x_1 + 3x_2$ = constante = c

©DCA-FEEC-Unicamp

- Solução ilimitada



- Modelo infactível (sem solução)



- Problema de programação linear
  - não tem solução
  - solução ilimitada
  - solução ótima única
  - número infinito de soluções ótimas

- Propriedade
  - solução ótima é um ponto extremo

- Forma canônica

$$\begin{aligned} \min \quad & cx \\ sa \quad & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

$$x \in R^n, \quad x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

$$A(m \times n), \quad b \in R^m, \quad c \in R^n$$

$$\text{rank}(A) = m$$

- Forma padrão

$$\begin{aligned} \min \quad & cx \\ sa \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

- Variáveis não negativas

$$x_k = x'_k - x''_k, \quad x'_k, x''_k \geq 0$$

- Variáveis de folga

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \quad \rightarrow \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + x_{n+i} = b, \quad x_{n+i} \geq 0$$

- Variáveis de excesso

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i \quad \rightarrow \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - x_{n+i} = b, \quad x_{n+i} \geq 0$$

- Teoremas básicos da programação linear

Definição 1: uma solução factível para um problema de programação linear é um vetor $x \in R^n$ que satisfaz as restrições principais e não negatividades.

Definição 2: matriz básica é uma matriz $m \times m$ formada por m colunas de A.

Definição 3: solução básica é o único vetor determinado pela escolha de uma matriz básica, fazendo as $n - m$ variáveis associadas às colunas que não estão na matriz básica iguais à zero, e resolvendo o sistema (não singular) de equações para as m variáveis restantes.

Definição 4: uma solução básica factível é uma solução básica não negativa.

Definição 5: uma solução básica factível não degenerada é uma solução básica factível com exatamente m componentes $x_i > 0$.

Definição 6: uma solução ótima é uma solução básica factível que minimiza z.

- Exemplos

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 + x_3 \quad\quad &= 1 \\ x_1 + x_2 + \quad\quad + x_4 &= 2 \\ x_i \geq 0,\ i = 1,\ldots,4 & \end{aligned}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 = 1,\ x_4 = 2$$

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad x_1 = -1,\ x_2 = 0,\ x_3 = 0,\ x_4 = 3$$

Teorema 1: a função objetivo z tem o seu mínimo em um ponto extremo do conjunto de restrições. Se a função objetivo tem seu mínimo em mais de um ponto extremo, então ela possui o mesmo valor para todo ponto do segmento que conecta estes pontos extremos.

Teorema 2: um vetor $x \in R^n$ é um ponto extremo do conjunto de restrições se e somente se x é uma solução básica factível (*sbf*).

$$n_{sbf} \leq \binom{n}{m} = \frac{n!}{(n-m)!\,m!}$$

- Sistema de equações

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
\vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m
\end{aligned}
$$

$S = \{x \in R^n \mid Ax = b\}$ conjunto solução

- Sistemas equivalentes

$$S_1 = \{x \in R^n \mid A_1 x = b_1\}$$

$$S_2 = \{x \in R^n \mid A_2 x = b_2\}$$

$$S_1 = S_2$$

conjuntos solução iguais

- Transformação de um sistema em outro equivalente

Operação elementares com linhas

1 – multiplicar qualquer equação E_i por uma constante $k \neq 0$.

2 – trocar qualquer equação E_t pela equação $E_t + k\,E_i$ onde E_i é qualquer outra equação e $k \neq 0$.

- Exemplo

$$
\begin{aligned}
-x_1 + x_2 + x_3 \quad\quad\quad &= 1 \\
x_1 + x_2 + \quad\quad + x_4 &= 2
\end{aligned}
$$

$$E_2 \leftarrow E_2 - 1\,E_1$$

$$
\begin{aligned}
-x_1 + x_2 + x_3 \quad\quad\quad &= 1 \\
2x_1 \quad\quad - x_3 + x_4 &= 1
\end{aligned}
$$

Pivoteamento

Definição 7: uma sequência particular de operações elementares com linhas que substitui um sistema linear por outro equivalente no qual uma variável especificada tem o coeficiente unitário em uma equação e nulo nas restantes.

1 – selecionar um termo $a_{rs}x_s$ na linha (equação) r, coluna s, com $a_{rs} \neq 0$.

2 – substituir a r-ésima equação pela r-ésima equação multiplicada por $1/a_{rs}$.

3 – para cada $i = 1,\ldots,m$ exceto para $i = r$, substituir a i-ésima equação E_i por $E_i - a_{is}/a_{rs}\, E_r$.

- Exemplo

$$
\begin{aligned}
2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + x_4 &= 1 & \quad E_1 \\
x_1 - x_2 + + 5x_4 &= 6 & \quad E_2 \\
3x_1 + x_2 + x_3 &= 2 & \quad E_3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x_1 + \frac{3}{2}x_2 - 2x_3 + \frac{1}{2}x_4 &= \frac{1}{2} \\
x_1 - x_2 + + 5x_4 &= 6 \\
3x_1 + x_2 + x_3 &= 2
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned} x_1 + \frac{3}{2}x_2 - 2x_3 + \frac{1}{2}x_4 &= \frac{1}{2} \\ -\frac{5}{2}x_2 + 2x_3 + \frac{9}{2}x_4 &= \frac{11}{2} \\ 3x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 + \frac{3}{2}x_2 - 2x_3 + \frac{1}{2}x_4 &= \frac{1}{2} \\ -\frac{5}{2}x_2 + 2x_3 + \frac{9}{2}x_4 &= \frac{11}{2} \\ -\frac{7}{2}x_2 + 7x_3 - \frac{3}{2}x_4 &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

- Sistemas canônicos

$$\boxed{a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1m}x_m} + a_{1m+1}x_{m+1} + \ldots\ldots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2m}x_m + a_{2m+1}x_{m+1} + \ldots\ldots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$\vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mm}x_m + a_{m,m+1}x_{m+1} + \ldots + a_{mn}x_n = b_m$$

$$B \;\rightarrow\; B^{-1} \;\rightarrow\; x_B = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$$

- Sistema canônico

$$
\boxed{\begin{array}{llll}
x_1 & & + \bar{a}_{1m+1}x_{m+1} + \ldots\ldots + \bar{a}_{1n}x_n & = \bar{b}_1 \\
& x_2 & + \bar{a}_{2m+1}x_{m+1} + \ldots\ldots + \bar{a}_{2n}x_n & = \bar{b}_2 \\
& \ddots & & \\
& & x_m + \bar{a}_{m,m+1}x_{m+1} + \ \ldots \ + \bar{a}_{mn}x_n & = \bar{b}_m
\end{array}}
$$

$x_1 = \bar{b}_1, x_2 = \bar{b}_2, \ldots, x_m = \bar{b}_m$ variáveis básicas

$x_{m+1} = x_{m+2} = \ldots = x_n = 0$ variáveis não básicas

$\bar{b}_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, m \quad \Rightarrow$ solução básica factível

$\exists i \mid \bar{b}_i = 0 \quad \Rightarrow$ solução degenerada

- Algoritmo simplex

– Método simplex
    - fase I: solução básica factível inicial
      modelo infactível
    - fase II: solução ótima
      solução ilimitada

– Fase I e II
    - usam o algoritmo simplex

- Sistema canônico aumentado (tableau simplex)

  - Reescrever a função objetivo

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$$
$$-z + c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n = 0$$

  - Incluir no sistema canônico

$$\begin{array}{lllll}
x_1 & & & +\bar{a}_{1m+1}x_{m+1} + \ldots\ldots + \bar{a}_{1n}x_n & = \bar{b}_1 \\
& x_2 & & +\bar{a}_{2m+1}x_{m+1} + \ldots\ldots + \bar{a}_{2n}x_n & = \bar{b}_2 \\
& & \ddots & & \\
& & x_m & +\bar{a}_{m,m+1}x_{m+1} + \ \ldots \ + \bar{a}_{mn}x_n & = \bar{b}_m \\
& & -z & +\bar{c}_{m+1,m+1}x_{m+1} + \ \ldots \ + \bar{c}_nx_n & = -\bar{z}
\end{array}$$

- Teste de otimalidade

Teorema 3: uma solução básica factível é uma solução ótima (*min*) se os custos relativos (custo reduzido) são todos não negativos.

$$\bar{c}_j \geq 0 \quad j = m+1, \ldots, n$$

$\bar{z}$: valor ótimo da função objetivo

Prova:

$$z = \bar{z} + \bar{c}_{m+1} x_{m+1} + \ldots + \bar{c}_n x_n$$

$$x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_n = 0$$

$$x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0$$

$$c_j \geq 0, j = m+1, \ldots, n \Rightarrow \bar{c}_j x_j \geq 0$$

AlgoritmoSimplexBásico( ) **retorna** uma solução ótima

entrada: um modelo linear de otimização

$x \leftarrow$ GerarSoluçãoFactívelInicial( )

$\underline{c} \leftarrow$ CalcularCustoReduzido(c, A, B)

se $\underline{c}_j \geq 0 \ \forall j \in \{1,\ldots,n\}$ **então retornar** x

senão

    repetir

        determinar a variável não básica que entra na base (coluna pivô s)

        determinar a variável básica que sai da base (linha pivô r)

        fazer o pivoteamento

    até que $\underline{c}_j \geq 0 \ \forall j \in \{1,\ldots,n\}$

retornar x

- Variável não básica que entra na base

$$\bar{c}_s = \min_j \{\bar{c}_j \mid \bar{c}_j < 0\}$$

- Variável básica que sai da base

$$x_s^* = \frac{\bar{b}_r}{\bar{a}_{rs}} = \min_{\bar{a}_{is} > 0} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{is}} \right\}$$

- Pivô

$$\bar{a}_{rs}$$

Corolário 1: uma solução básica factível ótima é unica se os custos reduzidos de todas as variáveis não básicas são positivos.

$$\bar{c}_j > 0 \quad j = m+1,\dots,n$$

Teorema 5: se, para alguma coluna s do sistema canônico, todos os elementos são não positivos e o custo reduzido correspondente é negativo, então o modelo é ilimitado.

Prova:

$$x_1 = \bar{b}_1 - a_{1s} x_s$$

$$\vdots$$

$$x_m = \bar{b}_m - a_{ms} x_s$$

$$z = \bar{z} + \bar{c}_s x_s \qquad \bar{c}_s < 0$$

$$\bar{a}_{is} \leq 0 \quad i = 1,2,\dots m \quad \Rightarrow \quad x_s \to \infty$$

- Exemplo
  - Forma canônica

$$
\begin{aligned}
\min \quad & -10x_1 - 12x_2 - 12x_3 \\
sa \quad & x_1 + 2x_2 + 2x_3 \le 20 \\
& 2x_1 + x_2 + 2x_3 \le 20 \\
& 2x_1 + 2x_2 + x_3 \le 20 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0
\end{aligned}
$$

– Forma padrão

$$
\begin{array}{ll}
\min & -10x_1 - 12x_2 - 12x_3 \\
sa & x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 20 \\
 & 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_5 = 20 \\
 & 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_6 = 20 \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0
\end{array}
$$

x = (0, 0, 0, 20, 20, 20) solução básica factível inicial

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
	0	–10	–12	–12	0	0	0
$x_6 =$	20	1	2	2	1	0	0
$x_5 =$	20	2*	1	2	0	1	0
$x_6 =$	20	2	2	1	0	0	1

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
	100	0	–7	–2	0	5	0
$x_4 =$	10	0	1.5	1*	1	–0.5	0
$x_1 =$	10	1	0.5	1	0	0.5	0
$x_6 =$	0	0	1	–1	0	–1	1

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
	120	0	–4	0	0	0	0
$x_3 =$	10	0	1.5	1	1	–0.5	0
$x_1 =$	0	1	–1	0	–1	1	0
$x_6 =$	10	0	2.5*	0	1	–1.5	1

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
	136	0	0	0	3.6	1.6	1.6
$x_3 =$	4	0	0	1	0.4	0.4	–0.6
$x_1 =$	4	1	0	0	–0.6	0.4	0.4
$x_2 =$	4	0	1	0	0.4	–0.6	0.4

- Solução básica factível inicial (Fase I)

$$\begin{aligned} &\min\ cx \\ &sa \quad Ax = b \\ &\qquad\quad x \geq 0 \end{aligned}$$

– Assumir, sem perda de generalidade, $b \geq 0$

– Introduzir variáveis artificiais $y \in R^m$

– Criar problema auxiliar (modelo artificial)

- Modelo artificial

$$
\begin{aligned}
\min\ & y_1 + y_2 + \cdots + y_m \\
sa\ \ & Ax + y = b \\
& x \geq 0 \\
& y \geq 0
\end{aligned}
$$

Inicialização: $x = 0$, $y = b$, $B = I$

- Exemplo

$$
\begin{aligned}
min \quad & x_1 + x_2 + x_3 \\
sa \quad & x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 3 \\
& -x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 2 \\
& 4x_2 + 9x_3 = 5 \\
& 3x_3 + x_4 = 1 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0
\end{aligned}
$$

- Modelo artificial

$$
\begin{aligned}
\min \quad & y_1 + y_2 + y_3 + y_4 \\
sa \quad & x_1 + 2x_2 + 3x_3 + y_1 = 3 \\
& -x_1 + 2x_2 + 6x_3 + y_2 = 2 \\
& 4x_2 + 9x_3 + y_3 = 5 \\
& 3x_3 + x_4 + y_4 = 1 \\
& x_1, \ldots, x_4, y_1, \ldots, y_4 \geq 0
\end{aligned}
$$

		x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	y_3	y_4
	–11	0	–8	–21	–1	0	0	0	0
y_1 =	3	1	2	3	0	1	0	0	0
y_2 =	2	–1	2	6	0	0	1	0	0
y_3 =	5	0	4	9	0	0	0	1	0
y_4 =	1	0	0	3	1*	0	0	0	1

		x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	y_3	y_4
	–10	0	–8	–18	0	0	0	0	1
y_1 =	3	1	2	3	0	1	0	0	0
y_2 =	2	–1	2	6	0	0	1	0	0
y_3 =	5	0	4	9	0	0	0	1	0
x_4 =	1	0	0	3*	1	0	0	0	1

		x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	y_3	y_4
	–4	0	–8	0	6	0	0	0	7
$y_1 =$	2	1	2	0	–1	1	0	0	–1
$y_2 =$	0	–1	2*	0	–2	0	1	0	–2
$y_3 =$	2	0	4	0	–3	0	0	1	–3
$x_3 =$	1/3	0	0	1	1/3	0	0	0	1/3

		x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	y_3	y_4
	–4	–4	0	0	–2	0	4	0	–1
$y_1 =$	2	2*	0	0	1	1	–1	0	1
$x_2 =$	0	–1/2	1	0	–1	0	1/2	0	–1
$y_3 =$	2	2	0	0	1	0	–2	1	1
$x_3 =$	1/3	0	0	1	1/3	0	0	0	1/3

		x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	y_3	y_4
	0	0	0	0	0	2	2	0	1
$x_1 =$	1	1	0	0	1/2	1/2	–1/2	0	1/2
$x_2 =$	1/2	0	1	0	–3/4	1/4	1/4	0	–3/4
$y_3 =$	0	0	0	0	0	–1	–1	1	0
$x_3 =$	1/3	0	0	1	1/3	0	0	0	1/3

		x_1	x_2	x_3	x_4
	*	*	*	*	*
$x_1 =$	1	1	0	0	1/2
$x_2 =$	1/2	0	1	0	–3/4
$x_3 =$	1/3	0	0	1	1/3

2-Algoritmo simplex revisado

– Cada iteração simplex computa o sequinte:

1. custos reduzidos para calcular coluna *s*

$$\bar{c}_s = \min_j \{\bar{c}_j \mid \bar{c}_j < 0\}$$

2. Supondo *s*-ésimo custo reduzido negativo, os elementos da coluna *s* e das variáveis básicas para determinar o pivô

$$\bar{P}_s = (\bar{a}_{1s}, \ldots, \bar{a}_{ms})' \qquad x_B = (\bar{b}_1, \ldots, \bar{b}_m)$$

$$\frac{\bar{b}_r}{\bar{a}_{rs}} = \min_{\bar{a}_{is} > 0} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{is}} \right\} \qquad \rightarrow \qquad \bar{a}_{rs}$$

©DCA-FEEC-Unicamp

- Modelo de programação linear na forma coluna

$$\begin{aligned} &min\ c_1x_1 + \ldots + c_nx_n \\ &sa \quad P_1x_1 + \ldots + P_nx_n = b \\ &\qquad\ x_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, n \end{aligned}$$

$$P_j = (a_{1j}, \ldots, a_{mj})'$$

$$A = [P_1, \ldots, P_j, \ldots P_n]$$

$$\mathrm{rank}(A) = m$$

- Assumir modelo factível

- Definindo

$$B = [P_{j_1}, \ldots, P_{j_2}, \ldots P_{j_m}]$$

$$x_B = (x_{j_1}, \ldots, x_{j_2}, \ldots x_{j_m}) \qquad x_B = B^{-1}b = \overline{b}$$

$$c_B = (c_{j_1}, \ldots, c_{j_2}, \ldots c_{j_m}) \qquad x_B \geq 0$$

- Sistema canônico aumentado (tableau)

$$\hat{P}_j = (a_{1j}, \ldots, a_{mj}, c_j)', \;\; j = 1, \; \ldots, n$$

$$\hat{P}_{n+1} = (0, \ldots, 0, 1)'$$

$$\hat{b} = (b_1, \ldots, b_m, 0)'$$

$$\begin{aligned} P_1x_1 + \ldots + P_nx_n &= b \\ c_1x_1 + \ldots + c_nx_n &= z \end{aligned} \qquad \equiv \qquad \sum_{i=1}^{n} \hat{P}_i x_i + \hat{P}_{n+1}(-z) = \hat{b}$$

$$\hat{B} = [\hat{P}_{j_1}, \ldots, \hat{P}_{j_2}, \ldots, \hat{P}_{j_m}, \hat{P}_{n+1}] = \begin{bmatrix} B & 0 \\ c_B & 1 \end{bmatrix} \qquad (m+1)\times(m+1)$$

Modelo factível $\Rightarrow$ $\hat{B}$ matriz básica factível

$$\hat{B}^{-1} = \begin{bmatrix} B^{-1} & 0 \\ -c_B B^{-1} & 1 \end{bmatrix}$$

Definição 8: π é o vetor de multiplicadores simplex associado à base *B*.

$$\pi = (\pi_1, \ldots, \pi_m) = c_B B^{-1}$$

Nota: multiplicando a primeira equação por da restrição principal por π_1, a segunda por π_2, e a *m*-ésima por π_m , somar e subtrair da função objetivo:

$$c_j - \pi P_j = 0 \quad j \text{ básica} \qquad \Rightarrow \qquad \pi = c_B B^{-1}$$

$$\hat{B}^{-1} = \begin{bmatrix} B^{-1} & 0 \\ -c_B B^{-1} & 1 \end{bmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \hat{B}^{-1} = \begin{bmatrix} B^{-1} & 0 \\ -\pi & 1 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1}[\sum_{i=1}^{n}\hat{P}_i x_i + \hat{P}_{n+1}(-z)] = B^{-1}\hat{b}$$

$$\equiv$$

$$\hat{B}^{-1}\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & 0 \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} & \\ & \ddots & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & 0 \\ c_1 & \cdots & c_n & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \\ -z \end{bmatrix} = \hat{B}^{-1}\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1}[\sum_{i=1}^{n}\hat{P}_i x_i + \hat{P}_{n+1}(-z)] = B^{-1}\hat{b}$$

$$\equiv$$

$$\begin{array}{lllcll}
x_{j_1} & & & & & \bar{b}_1 \\
& \ddots & & + \sum_{j=nb} \overline{P}_j x_j & = & \vdots \\
& & x_{j_m} & & & \bar{b}_m \\
& & -z & + \sum_{j=nb} \bar{c}_j x_j & = & -z_o
\end{array}$$

$$\begin{bmatrix} \overline{P}_j \\ \overline{c}_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B^{-1} & 0 \\ -\pi & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_j \\ c_j \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} \overline{P}_j = B^{-1} P_j & \text{atualiza coluna} \\ \overline{c}_j = c_j - \pi P_j & \text{atualiza custo reduzido} \end{array}}$$

Nota: dada B^{-1} e π, as quantidades $\overline{c}_j$ e $\overline{P}_j$ necessárias para uma iteração simplex são obtidas a partir dos dados originais c_j e P_j

$$\bar{c}_s = \min_{j}\{\bar{c}_j \mid \bar{c}_j < 0\}$$

$$\bar{P}_s = B^{-1}P_s$$

$$\frac{\bar{b}_r}{\bar{a}_{rs}} = \min_{\bar{a}_{is} > 0}\left\{\frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{is}}\right\} \quad \Rightarrow \quad \text{pivô} \quad \bar{a}_{rs}$$

- x_s entra na base e x_r sai da base
- P_s entra na base e P_{jr} sai da base
- Gerar inversa da nova matriz básica

- Inversa da nova base

$$\hat{B}^{-1} \times \begin{bmatrix} & & & & \vdots & & & & \vdots & a_{1s} \\ & & & & \vdots & & & & \vdots & \vdots \\ \hat{P}_{j_1} & \cdots & \hat{P}_{j_m} & \hat{P}_{n+1} & \vdots & u_1 & \cdots & u_{m+1} & \vdots & a_{rs} \\ & & & & \vdots & & & & \vdots & \vdots \\ & & & & \vdots & & & & \vdots & a_{ms} \\ & & & & \vdots & & & & \vdots & c_s \end{bmatrix}$$

$$\hat{B}^{-1} = \begin{bmatrix} B^{-1} & 0 \\ -\pi & 1 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c|c} & & & & & & \bar{a}_{1s} \\ & & & & & & \vdots \\ u_1 & \cdots & u_r & \cdots & u_{m+1} & \hat{B}^{-1} & \bar{a}_{rs} \\ & & & & & & \vdots \\ & & & & & & \bar{a}_{ms} \\ & & & & & & \bar{c}_s \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ \longleftarrow \ \text{pivô} \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccccccc|c|c} u_1 & \cdots & u_{r-1} & \alpha & u_{r+1} & \cdots & u_{m+1} & \hat{B}_{new}^{-1} & u_r \end{array}\right]$$

- Simplex revisado: resumo

1– $\hat{B}^{-1}_{m+1} = (-\pi_1, -\pi_2, \ldots, -\pi_m, 1)$

$$\bar{c}_j = c_j - \sum_{i=1}^{m} \pi_i a_{ij} = c_j - \pi P_j$$

2– $\bar{c}_s = \min_j \bar{c}_j$

3– $\bar{c}_s \geq 0$, solução ótima

4– $\bar{c}_s < 0$, calcular $\begin{bmatrix} \overline{P}_s \\ \bar{c}_s \end{bmatrix} = \hat{B}^{-1} \begin{bmatrix} P_s \\ c_s \end{bmatrix}$

5– $\overline{P}_s = (\overline{a}_{1s}, \ldots, \overline{a}_{ms})'$

$\overline{a}_{is} \leq 0, i = 1, \ldots, m$ modelo ilimitado

6– $\dfrac{\overline{b}_r}{\overline{a}_{rs}} = \min\limits_{a_{is} > 0} \dfrac{\overline{b}_i}{\overline{a}_{is}} = \theta$

7– $\left[\begin{array}{c:c} B^{-1} & \overline{P}_s \\ & \overline{c}_s \end{array}\right]$ pivô $\overline{a}_{rs}$, colunas $1 \cdots m+1$ nova inversa

$(x_B)_i \leftarrow (x_B)_i - \theta \overline{a}_{is}, \quad i \neq r$

$(x_B)_i \leftarrow \theta$

- Simplex revisado: forma produto da inversa

$$E = \begin{bmatrix} 1 & & & \eta_1 & & & \\ & 1 & & \eta_2 & & & \\ & & \ddots & \vdots & & & \\ & & & \eta_r & & & \\ & & & \vdots & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & \eta_{m+1} & & & 1 \end{bmatrix} \qquad \eta_i = \begin{cases} \dfrac{-\bar{a}_{is}}{\bar{a}_{rs}} & i = 1,\ldots,m+1, i \neq r \\ \dfrac{1}{\bar{a}_{rs}} & i = r \end{cases}$$

coluna r

$$B_n^{-1} = EB_o^{-1}$$

$$B_k^{-1} = E_k E_{k-1} \ldots E_1$$

$$\pi = (\ldots((c_B E_k) E_{k-1}) \ldots) E_1$$

$$\overline{P_s} = B^{-1} P_s = E_k (\ldots (E_2 (E_1 P_s)) \ldots)$$

3-Dualidade em programação linear

Primal

$$\begin{aligned} &min \;\; cx \\ &sa \quad Ax \geq b \\ &\qquad\quad x \geq 0 \end{aligned}$$

Dual

$$\begin{aligned} &max \;\; \pi b \\ &sa \quad A'\pi' \leq c \\ &\qquad\quad \pi \geq 0 \end{aligned}$$

©DCA-FEEC-Unicamp

Teorema 6: se $\bar{x}$ e $\bar{\pi}$ são soluções primal e dual factíveis, então

$$\bar{z} = c\bar{x} \geq \bar{\pi}b = \bar{v}$$

Prova:

$$\bar{x} \geq 0, \quad A\bar{x} = b, \quad A'\pi' \leq c$$

Logo

$$c\bar{x} \geq \bar{\pi}A\bar{x} = \bar{\pi}b$$

©DCA-FEEC-Unicamp

Teorema 7: se o dual e o primal possuem soluções factíveis, então ambos tem solução ótima e *min z = max v.*

Prova:

Teorema 6: $z^* \geq v^*$ $\Rightarrow$ primal e dual tem solução ótima

x° solução primal

x° básica (primal tem solução ótima)

$$B^\circ x_B^\circ = b \quad x_B^\circ \geq 0$$

$$\pi^\circ = c_B (B^\circ)^{-1}$$

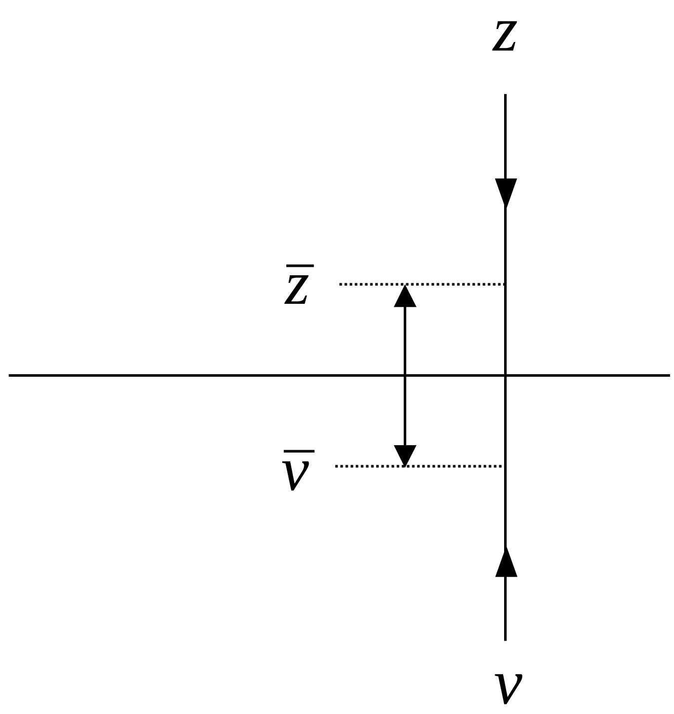
$$\bar{c}_j = c_j - \pi^\circ P_j \geq 0; \;\; \forall j$$

$$A'(\pi^\circ)' \leq c$$

$$v^\circ = \pi^\circ b = c_B (B^\circ)^{-1} b = c_B x_B^\circ = z^\circ$$

©DCA-FEEC-Unicamp

- Interpretação teoremas 6 e 7



$min\ z = max\ v$

- Pontos importantes
  - restrições duais = condições otimalidade primal
    - custos relativos aparecem como variáveis de folga
  - multiplicador π^{o} associado com base ótima primal é solução dual
  - algoritmo simplex automaticamente fornece solução dual
  - resolver problemas lineares: primal ou dual, o que for mais simplex
  - multiplicadores simplex (variáveis duais): preços / custos marginais

©DCA-FEEC-Unicamp

Corolário 2: se ou o primal ou o dual tem solução ótima, então o outro também tem e o valores ótimos das funções objetivos são iguais.

Teorema 8: se ou o primal ou o dual tem solução ilimitada, então o outro é infactível.

Prova:

Assumindo o primal ilimitado, pelo T2

$\pi b \leq -\propto$ para π dual factível

existência solução dual factível $\Rightarrow$ contradição

©DCA-FEEC-Unicamp

Teorema 9: o par (x^o, π^o) com x^o primal factível e π^o dual factível possui x^o e π^o primal e dual ótimo, respectivamente, se e somente se $(c' - \pi^o A)x^o = 0$

Prova:

$\rightarrow$

$\bar{x}$ solução primal factível qualquer

$$A\bar{x} = b; \quad c\bar{x} = \bar{z}$$

$$cx - \pi A\bar{x} = \bar{z} - \bar{\pi} b$$

$$\bar{\pi} b = \bar{v}$$

$$(c - \bar{\pi} A)\bar{x} = \bar{z} - \bar{v}$$

$$(x^\circ, \pi^\circ) \text{ primal e dual ótimo} \Rightarrow z^\circ - v^\circ = 0 = (c - \pi^\circ A)x^\circ$$

©DCA-FEEC-Unicamp

$\leftarrow$

(x°, π°) satisfaz $(c - \pi^\circ A)x^\circ = z^\circ - v^\circ = 0$

T1 $\Rightarrow z^\circ \leq z$ e $v^\circ \geq v \Rightarrow (x^\circ, \pi^\circ)$ é ótimo

- condição $(c' - \pi^o A)x^o = 0$ folga complementar

$(c' - \pi^o A)_i \, x_i^o = 0 \quad \forall\, i$

$\bar{c}_i^\circ = 0 \;\; \forall i \qquad (\bar{c}_i^\circ = c_i - \pi^\circ P_i)$

©DCA-FEEC-Unicamp

Classes de algoritmos de programação linear

Algoritmo	Factibilidade primal	Factibilidade dual	Folga complementar
Simplex	satisfeita	relaxada	satisfeita
Dual simplex	relaxada	satisfeita	satisfeita
Primal dual	relaxada	satisfeita	satisfeita

4-Algoritmo dual simplex

- Algoritmo dual simplex
  - simplex aplicado ao dual
  - inicialmente:

$$\bar{c}_j \geq 0 \quad \text{factibilidade dual}$$

$$\bar{c}_j = 0 \quad \text{folga complementar}$$

$$\bar{b}_i \ngeq 0 \quad \text{factibilidade primal relaxada}$$

- Algoritmo dual simplex

1– $\overline{b}_r = min\,\overline{b}_i < 0$ linha pivô r

2– $\dfrac{\overline{c}_s}{-\overline{a}_{rs}} = \min\limits_{\overline{a}_{rj}<0} \dfrac{\overline{c}_j}{-\overline{a}_{rj}}$ coluna pivô s

3– Se $\overline{a}_{rj} \geq 0 \ \forall j$, então primal infactível

4– Pivotear sobre $\overline{a}_{rs}$

5– Se $\overline{b}_i \geq 0$, $\forall i$ então solução ótima. Senão passo 1

- Exemplo

$$
\begin{array}{llllr}
\min & 2x_4 + x_5 & & & \\
sa & x_1 & & +3x_4 + x_5 & = 1 \\
 & & x_2 & - x_4 + 5x_5 & = 2 \\
 & & & x_3 - 2x_4 - 6x_5 & = -1 \\
 & x_1, \ldots, x_5 \geq 0 & & &
\end{array}
$$

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
	–3	0	0	0	2	1
$x_1 =$	1	1	0	0	3	1
$x_2 =$	2	0	1	0	–1	5
$x_3 =$	–1	0	0	1	–2	–6*

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
	–19/6	0	0	1/6	5/3	0
$x_1 =$	5/6	1	0	1/6	8/3	0
$x_2 =$	7/6	0	1	–1/6	8/3	0
$x_4 =$	1/6	0	0	–1/6	1/3	1

5-Algoritmo branch-and-bound

$$\begin{aligned} \min \quad & cx \\ sa \quad & Ax \leq b \\ & x \in \{1,0\} \end{aligned}$$

- Exemplo

	Gerador			
	1	2	3	4
custo operação	7	12	5	14
potência	300	600	500	1600

$$x_j = \begin{cases} 1 \text{ se gerador } j \text{ é ligado} \\ 0 \qquad\qquad \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} &min \;\; 7x_1 + 12x_2 + 5x_3 + 14x_4 \\ &sa \;\; 300x_1 + 600x_2 + 500x_3 + 1600x_4 \geq 700 \\ &\qquad x_1, x_2, x_3, x_4 \in \{0,1\} \end{aligned}$$

Definições

1 – soluções parciais: algumas das variáveis fixas, outras livres (notação #)

x = (1, #, 0, #) solução parcial $x_1 = 1$, $x_3 = 0$ fixos, x_2, x_4 livres

2 – completamento de solução parcial: soluções completas consistentes com a solução parcial e todas as componentes fixas

$$x = (1, \#, \#, 0) \rightarrow (1, 0, 0, 0),\ \underbrace{(1, 0, 1, 0),\ (1, 1, 0, 0),\ (1, 1, 1, 0)}_{\text{factíveis}}$$

3 – nós: soluções parciais

4 – arcos: variáveis fixas de soluções parciais

5 – raiz: solução parcial $x^{(0)} = (\#, ..., \#)$

6 – nós ativos**:** soluções parciais não terminadas

7 – solução incumbente**:** melhor solução factível encontrada até então

- Algoritmo branch-and-bound
  - termina solução parcial quando identifica melhor complementamento
  - termina solução parcial quando esta não produz solução ótima
  - solução parcial não terminada é ramificada (*branch*)
  - cria novas soluções parciais a partir da solução parcial atual e das variáveis livres correspondentes
  - pára quando todas soluções parciais foram ramificadas ou terminadas
    - solução incumbente, se existir, é ótimo global
    - caso contrário modelo é infactível

- Problema candidato associado à uma solução parcial
  - versão restrita do modelo, com variáveis fixas como na solução parcial
  - completamentos factíveis são soluções factíveis do problema candidato correspondente
  - valor da função objetivo do melhor completamento factível é o valor ótimo da função objetivo do problema candidato

- Exemplo $x = (\#, 1, \#, 0)$

$$
\begin{aligned}
&min\ \ 7x_1 + 12x_2 + 5x_3 + 14x_4 \\
&sa\ \ \ 300x_1 + 600x_2 + 500x_3 + 1600x_4 \geq 700 \\
&\qquad x_1,\ x_3, \in \{0,1\} \\
&\qquad x_2 = 1,\ \ x_4 = 0
\end{aligned}
$$

- se uma relaxação de um problema candidato é infactível, então a solução parcial associada pode ser terminada pois não existem completamentos factíveis.

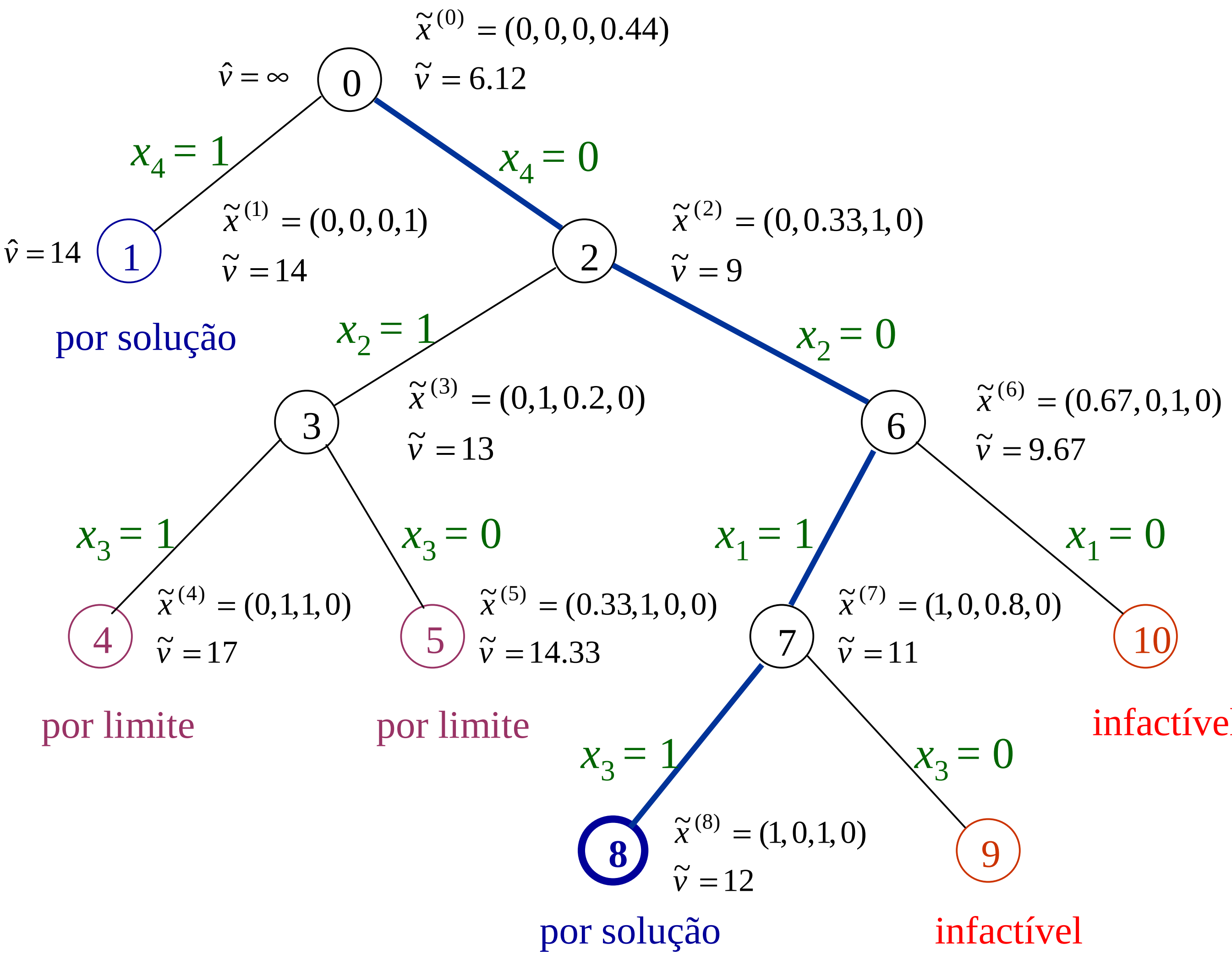
- se uma relaxação de um problema candidato possui valor da função objetivo pior do que o valor da solução incumbente, então a solução parcial pode ser terminada porque nehum complementamento factível terá valor melhor do que o da solução incumbente (*bound*).

- se uma solução ótima de uma relaxação do problema candidato é factível para o modelo original, então ela é o melhor completamento associado à solução parcial

- esta solução, após comparação com a incumbente, se existir, pode ser terminada

AlgoritmoBranchBoundBasico( ) **retorna** solução
entrada: modelo otimização discreta
inicialização: $x^0 = (\#,...,\#)$ ou x^0 incumbente com valor v^0; $t \leftarrow 0$
repetir
    se existe solução partial **então** selecionar uma delas x^t
    senão
        se existe solução incumbente então ela é ótima; **retornar** (x^t, v^t)
        senão modelo infactível; **retornar**
    ResolveRelaxaçãoProblemaCandidado(x^t);
    se relaxação infactível **então** teminar x^t, $t \leftarrow t + 1$
    senão
        se solução ótima relaxação pior do que solução incumbente corrente, **então** terminar
            $t = t + 1$
        senão
            se solução ótima relaxação satisfaz restrições **então** solução incumbente
                candidata; terminar x^t ; $t = t + 1$
            senão escolher variável livre fracionária modelo relaxado ótimo;
                criar dois novos arcos; $t = t + 1$

Exemplo



$\tilde{x}^{(0)} = (0,0,0,0.44)$
$\tilde{v} = 6.12$
$\hat{v} = \infty$
0
$x_4 = 1$
$x_4 = 0$
$\hat{v} = 14$
1
$\tilde{x}^{(1)} = (0,0,0,1)$
$\tilde{v} = 14$
por solução
2
$\tilde{x}^{(2)} = (0,0.33,1,0)$
$\tilde{v} = 9$
$x_2 = 1$
$x_2 = 0$
3
$\tilde{x}^{(3)} = (0,1,0.2,0)$
$\tilde{v} = 13$
6
$\tilde{x}^{(6)} = (0.67,0,1,0)$
$\tilde{v} = 9.67$
$x_3 = 1$
$x_3 = 0$
$x_1 = 1$
$x_1 = 0$
4
$\tilde{x}^{(4)} = (0,1,1,0)$
$\tilde{v} = 17$
por limite
5
$\tilde{x}^{(5)} = (0.33,1,0,0)$
$\tilde{v} = 14.33$
por limite
7
$\tilde{x}^{(7)} = (1,0,0.8,0)$
$\tilde{v} = 11$
10
infactível
$x_3 = 1$
$x_3 = 0$
8
$\tilde{x}^{(8)} = (1,0,1,0)$
$\tilde{v} = 12$
por solução
9
infactível

- arredondamento de soluções relaxadas parciais:
  - quando aplicável, ajuda a encontrar incumbentes
  - arredondamento feito antes de ramificar
  - pode fornecer ótimo aproximado

- arredondamento não garante obtenção de novas incumbentes

- valor ótimo relaxação associado a nó pai de soluções parciais é um limitante
  - superior para problemas de maximização
  - inferior para problemas de minimização

- sempre que branch-and-bound obtém nova solução incumbente
  - soluções parciais ativas cujos limitantes do nó pai é pior que a nova solução podem ser terminada

- Estratégias de busca e de desempate
  - primeiro em profundidade (*depth fist*)
    - maior número componentes solução parcial fixos
  - primeiro melhor (*best first*)
    - solução ativa com melhor limitante estabelecido pelo pai
  - *depth forward best back*
    - profundidade; primeiro melhor quando termina uma solução parcial
  - desempate: regra do filho mais próximo

Observação

Este material refere-se às notas de aula do curso IA 810 Otimização de Sistemas de Grande da Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação da Unicamp. Não substitui o livro texto, as referências recomendadas e nem as aulas expositivas. Este material não pode ser reproduzido sem autorização prévia dos autores. Quando autorizado, seu uso é exclusivo para atividades de ensino e pesquisa em instituições sem fins lucrativos.

©DCA-FEEC-Unicamp