Planos de Corte e Decomposição de Benders

Conteúdo

1. Método dos planos de corte
2. Programação estocástica e decomposição de Benders

1. Método dos Planos de Corte

- Considerar o problema (dual)

$$\begin{aligned} &\max\ \mathbf{p}'\mathbf{b} \\ &sa \quad \mathbf{p}'\mathbf{A_i} \le c_i \qquad i = 1,\ldots,n, \end{aligned} \tag{D}$$

- n muito grande (impraticável gerar e armazenar todos $\mathbf{A}_i$'s)

- I subconjunto de $\{1,\ldots, n\}$; formar o dual relaxado

$$\begin{aligned} &\max\ \mathbf{p}'\mathbf{b} \\ &sa \quad \mathbf{p}'\mathbf{A_i} \le c_i \qquad i \in I \end{aligned} \tag{R}$$

- Seja $\mathbf{p}^*$ uma solução básica factível ótima para o dual relaxado (R):

1. se $\mathbf{p}^*$ é tal que $\mathbf{p}'\mathbf{b} \leq (\mathbf{p}^*)'\mathbf{b}$, então $\mathbf{p}^*$ é solução ótima para (D), finalizando o algoritmo;
2. se $\mathbf{p}^*$ é infactível para o problema (D), tem-se uma restrição violada. Adicionar esta restrição ao problema dual relaxado e continuar.

Para completar o algoritmo precisa-se:

- método para verificar se $\mathbf{p}^*$ é uma solução factível do problema (D)
- método para identificar restrição violada quando $\mathbf{p}^*$ é dual infactível

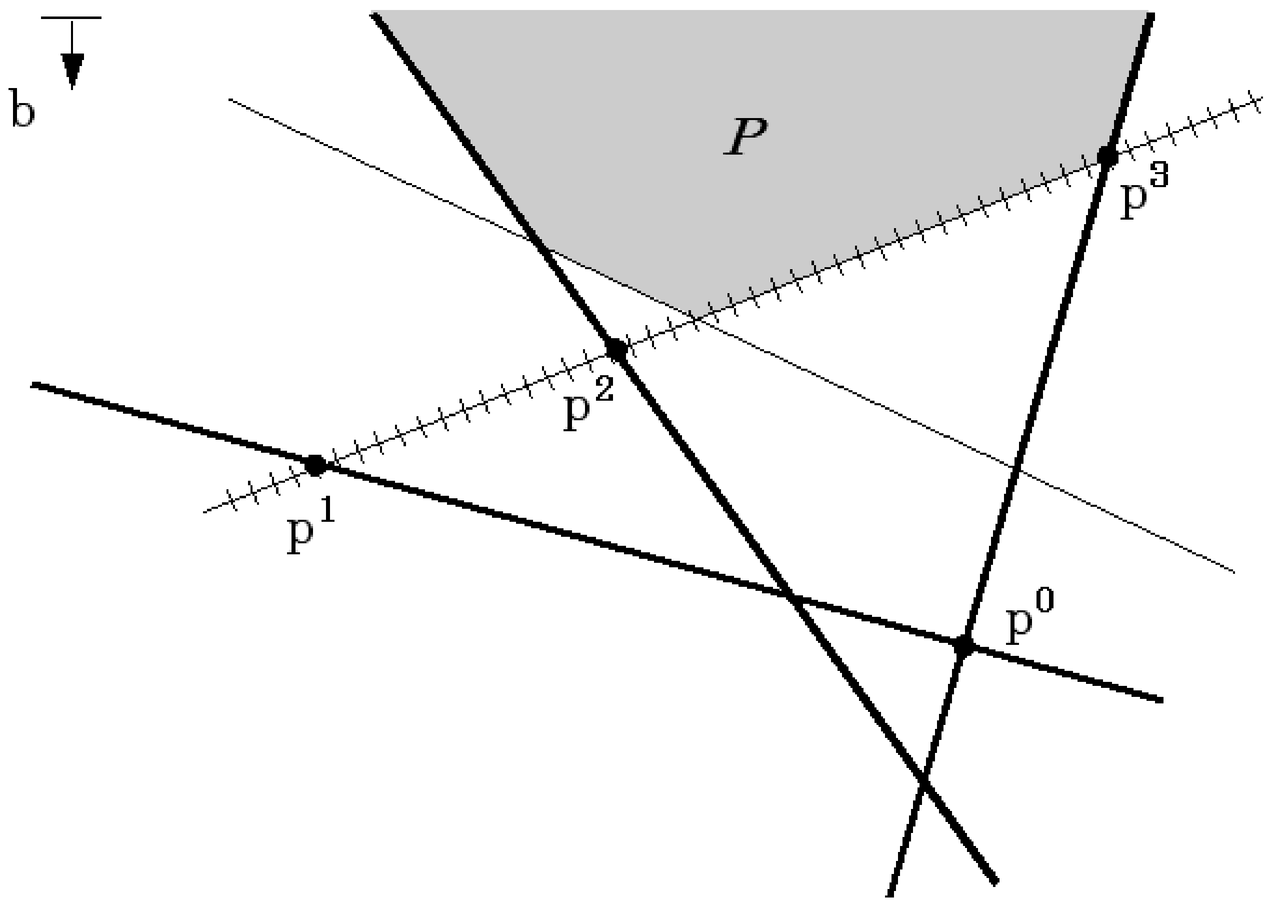
- Uma possibilidade é formular e resolver o problema de otimização:

$$\min_{i} \; c_i - (\mathbf{p}^*)'\mathbf{A}_i \qquad (*)$$

- valor ótimo em (*) não negativo $\rightarrow$ solução factível (ótima) para D

- valor ótimo negativo $\rightarrow$ i que otimiza (*) identifica restrição violada

Exemplo



2. Programação Estocástica e Decomposição de Benders

- Problemas de otimização estocástica com dois estágios
- Cada estágio envolve uma variável decisão diferente, **x** e **y**
- Parâmetros exógenos incertos influenciam segundo estágio
- Valores parâmetros conhecidos somente quando se tem **x**

- Formulação do problema

  - primeiro estágio envolve a escolha da variável de decisão $\mathbf{x}$
  - segundo estágio escolhe valores nova variável de decisão $\mathbf{y}$
  - K cenários; cenário real conhecido após a escolha de $\mathbf{x}$
  - ω indexa os cenários
  - α_ω probabilidade de um cenário particular ω
  - $\mathbf{y}$ depende do cenário ω, logo adota-se a notação $\mathbf{y}_\omega$
  - $\mathbf{c}$ e $\mathbf{f}$ custos associados às decisões $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}_\omega$

- Primeiro estágio de decisão deve satisfazer as restrições:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x} \geq 0$$

- Os dois estágios devem satisfazer restrições na forma:

$$\mathbf{B}_\omega \mathbf{x} + \mathbf{D}\, \mathbf{y}_\omega = \mathbf{d}_\omega \qquad \forall \omega$$

$$\mathbf{y}_\omega \geq 0$$

- Cada cenário pode envolver um conjunto diferente de restrições
- Objetivo: escolher $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_K$ que minimiza o custo esperado

$$\mathbf{cx} + \alpha_1 \mathbf{f}\, \mathbf{y}_1 + \ldots\ldots.. + \alpha_K \mathbf{f}\, \mathbf{y}_K$$

- Problema mestre (PM)

$$
\begin{array}{llllllll}
\min & \mathbf{c}'\mathbf{x} + \alpha_1 \mathbf{f}'\mathbf{y}_1 + \ldots + \alpha_K \mathbf{f}'\mathbf{y}_K & & & & & & \\
sa & \mathbf{A}\mathbf{x} & & & & & = & \mathbf{b} \\
 & \mathbf{B}_1\mathbf{x} & + & \mathbf{D}\mathbf{y}_1 & & & = & \mathbf{d}_1 \\
 & \mathbf{B}_2\mathbf{x} & & + & \mathbf{D}\mathbf{y}_2 & & = & \mathbf{d}_2 \\
 & \vdots & & & \ddots & & & \vdots \\
 & \mathbf{B}_K\mathbf{x} & & & & + \ \mathbf{D}\mathbf{y}_K & = & \mathbf{d}_K \\
 & \mathbf{x}, \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_K \geq 0 & & & & & &
\end{array}
$$

Aplicação: Expansão de Capacidade de Geração Elétrica

- Usina elétrica pretende instalar 2 geradores, $j = 1, 2$
- Dias com três períodos de igual duração, $i = 1, 2, 3$

  períodos de demanda básica, média e pico
- Custo fixo gerador j amortizado em c_j por dia
- Custo operação gerador j no i–ésimo período f_{ij}
- Excesso de demanda atendida com custo g_i

- Capacidade gerador j no mínimo b_j

- Recursos
  - demanda (d_i^{ω})

    $d_{i,1}, d_{i,2}, d_{i,3}, d_{i,4}$ probabilidade $p_{i,1}, p_{i,2}, p_{i,3}, p_{i,4}$

  - disponibilidade geradores (a_j^{ω})

    G_1: $a_{1,1}, a_{1,2}, a_{1,3}, a_{1,4},$ probabilidade $q_{1,1}, q_{1,2}, q_{1,3}, q_{1,4}$

    G_2: $a_{2,1}, a_{2,2}, a_{2,3}, a_{2,4}, a_{2,5},$ probabilidade $q_{1,1}, q_{1,2}, q_{1,3}, q_{1,4}, q_{2,5}$

- Enumerando os eventos possíveis : $4^3 \times 4 \times 5 = 1280$ cenários ω

- Variáveis de decisão
  - 1° estágio: x_j capacidade instalada do gerador j
  - 2° estágio: y_{ij}^{ω} nível de operação gerador j, i-ésimo período, cenário ω

    y_i^{ω} capacidade a ser comprada no i-ésimo período, cenário ω
- Disponibilidade: nível operação gerador j em qualquer instante é $a_j x_j$

- Problema mestre (PM)

$$
\begin{aligned}
min \ & \sum_{j=1}^{2} c_j x_j + E\left[\sum_{i=1}^{3}\left(\sum_{j=1}^{2} f_{ij} y_{ij}^{\omega} + g_i y_i^{\omega}\right)\right] \\
sa \quad & x_j \geq b_j, && \forall\ j, \\
& y_{ij}^{\omega}{}_2 \leq a_j^{\omega} x_j && \forall\, i,j,\omega, \\
& \sum_{j=1}^{2} y_{ij}^{\omega} + y_i^{\omega} \geq d_i^{\omega} && \forall\, i,\omega, \\
& x_j, y_{ij}^{\omega}, y_i^{\omega} \ \geq 0 && \forall\, i,j,\omega,
\end{aligned}
$$

PM: 11.522 variáveis, 11.522 restrições (sem contar negatividade)

- Reformulação do Problema

  – Seja $\mathbf{x}$ tal que $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ e $\mathbf{x} \geq 0$

  – Para $\mathbf{x}$ fixo, o segundo estágio é resolvido para cada cenário

$$
\begin{aligned}
&\mathit{min} \;\; \mathbf{f}'\,\mathbf{y}_\omega \\
&\mathit{sa} \quad \mathbf{B}_\omega \mathbf{x} + \mathbf{D}\,\mathbf{y}_\omega = \mathbf{d}_\omega \\
&\qquad\;\; \mathbf{y}_\omega \geq 0
\end{aligned}
\qquad (*)
$$

$z_\omega(\mathbf{x})$ custo ótimo, assumindo $z_\omega(\mathbf{x}) = \infty$ se (*) infactível

  – Voltando à otimização de $\mathbf{x}$

$$
\begin{aligned}
&\mathit{min} \; \mathbf{c}'\mathbf{x} + \sum_{\omega=1}^{K} \alpha_\omega' z_\omega(\mathbf{x}) \\
&\mathit{sa} \quad\; \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \\
&\qquad\quad\; \mathbf{x} \geq 0
\end{aligned}
\qquad \text{(PM)}
$$

- Resolve-se (*) usando seu dual

$$\begin{aligned} &max \;\; \mathbf{p}'_\omega(\mathbf{d}_\omega - \mathbf{B}_\omega \mathbf{x}) \\ &sa \;\;\; \mathbf{p}'_\omega \mathbf{D} \le \mathbf{f}' \end{aligned} \qquad (\#)$$

- Seja $P = \{\, \mathbf{p} \mid \mathbf{p}'_\omega \mathbf{D} \le \mathbf{f}' \,\}, \quad P \ne \emptyset$

  $\mathbf{p}^i$, $i = 1, ..., I$ pontos extremos de P

  $\mathbf{w}^j$, $j = 1,..., J$ raios extremos de P

- $P \ne \emptyset$ implica no seguinte
  1. ou (#) tem solução ótima e $z_\omega(\mathbf{x})$ é finito
  2. ou custo dual é $\propto \Rightarrow$ primal infactível, $z_\omega(\mathbf{x}) = \propto$

- $z_\omega(\mathbf{x}) < \propto$ se e somente se

$$(\mathbf{w}^j)' \, (\mathbf{d}_\omega - \mathbf{B}_\omega \mathbf{x}) \leq 0, \ \ \forall j$$

- $z_\omega(\mathbf{x}) < \propto \Rightarrow \mathbf{z}_\omega(\mathbf{x})$ custo ótimo para o problema (#) em ponto extremo de P

$$z_\omega(\mathbf{x}) = \max_{i=1,..,I} (\mathbf{p}^i{}_\omega)' \, (\mathbf{d}_\omega - \mathbf{B}_\omega \mathbf{x})$$

- Equivalentemente $z_\omega(\mathbf{x})$ é o menor número z_ω tal que

$$(\mathbf{p}^i{}_\omega)' \, (\mathbf{d}_\omega - \mathbf{B}_\omega \mathbf{x}) \leq z_\omega$$

- Problema mestre (PM)

$$
\begin{aligned}
min \quad & \mathbf{c}'\mathbf{x} + \sum_{\omega=1}^{K} \alpha_\omega z_\omega(\mathbf{x}) \\
sa \quad & \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\
& (\mathbf{p}^i)'(\mathbf{d}_\omega - \mathbf{B}_\omega \mathbf{x}) \le z_\omega, \qquad \forall\, i, \omega, \\
& (\mathbf{w}^j)'(\mathbf{d}_\omega - \mathbf{B}_\omega \mathbf{x}) \le 0, \qquad \forall\, j, \omega, \\
& \mathbf{x} \ge 0
\end{aligned}
$$

- Geração de restrições

  – Considerar problema mestre relaxado (PMR)

  – Solução ótima PMR: $\mathbf{x}^*$ e $\mathbf{z}^* = (z^*_1,\ldots, z^*_K)$

  – Plano corte: necessário verificar se $(\mathbf{x}^*, \mathbf{z}^*)$ factível para o PM

  – Resolver problemas auxiliares

$$
\begin{aligned}
&\mathit{min} \quad \mathbf{f}' \, \mathbf{y}_\omega \\
&\mathit{sa} \quad \mathbf{D}\, \mathbf{y}_\omega = \mathbf{d}_\omega - \mathbf{B}_\omega \mathbf{x}^* \\
&\qquad\ \mathbf{y}_\omega \geq 0
\end{aligned}
$$

1. se dual simplex indica um subproblema primal infactível então temos raio extremo $\mathbf{w}^{j(\omega)}$ do conjunto P tal que

$$(\mathbf{w}^{j(\omega)})' (\mathbf{d}_\omega - \mathbf{B}_\omega \mathbf{x}^*) > 0$$

identificamos uma restrição violada; incluí-la no PMR

2. se um subproblema primal é factível
   então método dual simplex termina com solução dual ótima $\mathbf{p}^{i(\omega)}$; se

$$(\mathbf{p}^{i(\omega)})' (\mathbf{d}_\omega - \mathbf{B}_\omega \mathbf{x}^*) > z_\omega$$

   então identificamos uma restrição violada; incluí-la no PMR

3. se todos subproblemas primais são factíveis então

$$(\mathbf{p}^{i(\omega)})' (\mathbf{d}_\omega - \mathbf{B}_\omega \mathbf{x^*}) \leq z_\omega, \ \forall \omega$$

$$(\mathbf{p})' (\mathbf{d}_\omega - \mathbf{B}_\omega \mathbf{x^*}) \leq z_\omega$$

$$(\mathbf{w}^j)' (\mathbf{d}_\omega - \mathbf{B}_\omega \mathbf{x^*}) \leq 0, \ \forall \mathbf{w}^j$$

solução ótima PMR é solução ótima PM; terminar

Algoritmo de Benders

1. Iniciar com PM relaxado. Determinar uma solução ótima ($\mathbf{x}^*$, $\mathbf{z}^*$);
2. Para cada ω, resolver o subproblema

$$\begin{aligned} & \min\ \mathbf{f}'\mathbf{y}_\omega \\ & sa\ \ \mathbf{D}\mathbf{y}_\omega = \mathbf{d}_\omega - \mathbf{B}_\omega \mathbf{x}^* \\ & \qquad \mathbf{y}_\omega \geq 0 \end{aligned}$$

   usando o método simplex dual;

3. Subproblemas factíveis para todo ω e custo ótimo $\leq z^*_\omega$ então todas as restrições são satisfeitas e temos uma solução ótima para PM; algoritmo termina;

4. Se subproblema correspondente a um ω tem uma solução ótima com custo maior que z^*_ω , uma solução básica factível $\mathbf{p}^{i(\omega)}$ para o subproblema dual é identificada e a restrição

$$(\mathbf{p}^{i(\omega)})'\left(\mathbf{d}_\omega - \mathbf{B}_\omega \mathbf{x}^*\right) > z^*_\omega$$

é adicionada ao PM relaxado;

5. Se o subproblema correspondente a algum ω é infactível, seu dual tem custo infinito e um raio extremo $\mathbf{w}^{j(\omega)}$ é identificado e a restrição

$$(\mathbf{w}^{j(\omega)})'\left(\mathbf{d}_\omega - \mathbf{B}_\omega \mathbf{x}^*\right) > 0$$

é adicionada ao PM relaxado.

Observação

Este material refere-se às notas de aula do curso IA 718 Tópicos em Sistemas Inteligentes da Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação da Unicamp. Não substitui o livro texto, as referências recomendadas e nem as aulas expositivas. Este material não pode ser reproduzido sem autorização prévia dos autores. Quando autorizado, seu uso é exclusivo para atividades de ensino e pesquisa em instituições sem fins lucrativos.