



EA 072 Inteligência Artificial em Aplicações Industriais

# 5-Lógica Matemática

## Representação e Inferência

# Lógica de Primeira Ordem

## Lógica proposicional

- assume que o mundo contém fatos

## Lógica de primeira ordem

- assume (similar à linguagem natural) que o mundo contém
  - objetos: pessoas, casas, números, cores,...
  - relações: irmão de, maior que, parte de,...
  - funções: pai de, melhor amigo,....

## Lógica proposicional

- expressões lógicas são sentenças

## Lógica de primeira ordem:

- expressões também são sentenças
- sentenças contêm termos que representam objetos
  - símbolos constantes
  - variáveis
  - símbolos funcionais
- símbolos predicativos que representam relações
- quantificadores  $\forall, \exists$

## Predicados, termos e quantificadores:

- utilizados para construir sentenças

*Sentença*  $\rightarrow$  *Sentença\_Atômica*  
| (*Sentença* *Conectivo* *Sentença*)  
| *Quantificador Variável* .... *Sentença*  
|  $\neg$  *Sentença*

*Sentença\_Atômica*  $\rightarrow$  *Predicado (Termo,...)* | *Termo = Termo*

*Termo*  $\rightarrow$  *Função(Termo, ...)* | *Constante* | *Variável*

*Conectivo*  $\rightarrow$   $\wedge$  |  $\vee$  |  $\Rightarrow$  |  $\Leftrightarrow$

*Quantificador*  $\rightarrow$   $\forall$  |  $\exists$

*Constante*  $\rightarrow$  *A* | *B* | *X<sub>1</sub>* | *John*

*Variável*  $\rightarrow$  *x* | *y* | *s* | ...

*Predicado*  $\rightarrow$  *True* | *False* | *Antes\_De* | *Cor* | ...

*Função*  $\rightarrow$  *Mãe* | *f* | *g* |

sintaxe  
(BNF)

## Interpretação

- específica, precisamente, quais objetos, relações e funções são referenciadas pelos símbolos constantes, predicativos, funcionais

## Constantes

- interpretação específica objeto do universo referenciado por cada constante

Exemplo: *Richard, John, A, B*

## Predicados

- interpretação específica relação entre o modelo do mundo e o predicado a que se refere

Exemplo: *Brother (Richard, John),  $P(t_1, \dots, t_n)$*

## Funções

- um objeto se relaciona exatamente com um outro objeto

Exemplo: *seno (x)*, *FatherOff (Richard)*

## Termos

- expressão lógica que se refere a um objeto: variável, constante, função

Exemplo: *LeftLegOf (King John)*, *F (x,y,z)*

## Sentença atômica

- símbolo predicativo seguido por uma lista de termos entre parêntesis
- representam fatos

Exemplo: *Brother (Richard, John)*

*Married (FatherOf (Richard), MotherOf (John))*

*LeftOf (Joe, Bin)*

## Sentença complexa

- utiliza conectivos lógicos (similar ao caso proposicional)

Exemplo:  $\neg$  *Brother (LeftLeg (Richard), John)*

*Brother (Richard, John)  $\wedge$  Brother (John, Richard)*

*King (Richard)  $\vee$  King (John)*

$\neg$ *King (Richard)  $\Rightarrow$  King (John)*

# Verdade em lógica primeira ordem

## Veracidade de sentenças

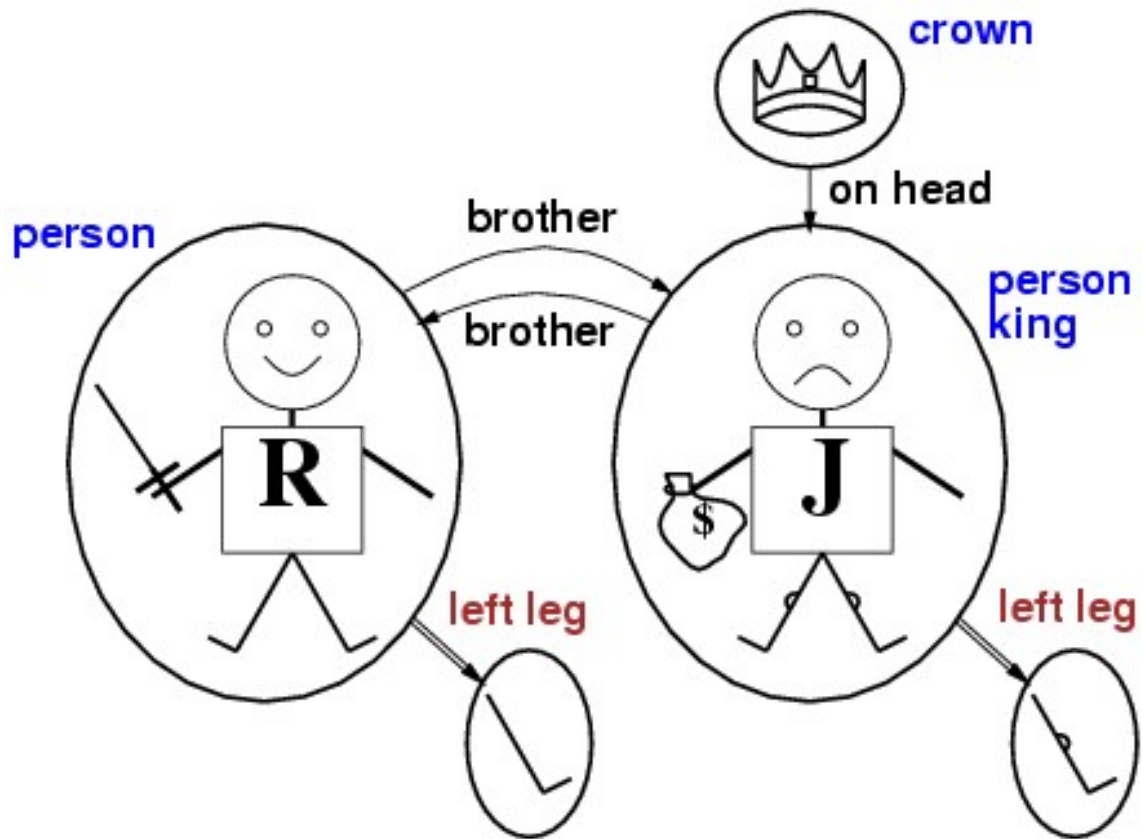
- depende da definição de
  - um modelo
  - uma interpretação

## Modelo

- objetos (elementos do domínio)
- relações entre estes objetos



# Exemplo modelo para LPO



## Interpretação específica referências para

- símbolos constantes → objetos
- símbolos predicativos → relações
- símbolos funcionais → relações funcionais

## Veracidade de sentenças atômicas

sentença atômica  $Predicado(termo_1, termo_2, \dots, termo_n)$  é verdadeira em um modelo e sob uma interpretação se e somente se os objetos referenciados por  $termo_1, \dots, termo_n$  estão na relação referenciada por  $Predicado$

## Quantificadores

- permitem expressar propriedades de uma coleção de objetos

Exemplo:  $\forall$  (universal),  $\exists$  (existencial)

### Quantificador universal: $\forall$

- $\forall x \text{ King}(x) \Rightarrow \text{Person}(x)$  (todos reis são pessoas)
- intuitivamente:  $\forall x P(x)$  verdadeira se  $P(x)$  é verdadeira para todo objeto  $x$
- formalmente:  $\forall x P(x)$  verdadeira em um modelo, sob uma interpretação se  $P$  é verdadeira em todas interpretações estendidas possíveis construídas da interpretação, onde cada interpretação estendida especifica o elemento do domínio ao qual  $x$  se refere

# Exemplo

## Modelo e interpretação pretendida

### Interpretações estendidas

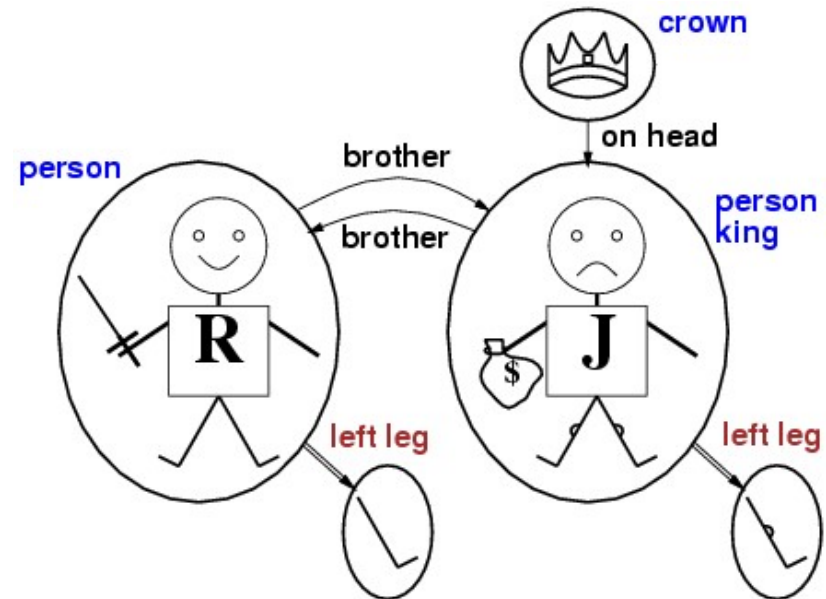
$x \rightarrow$  Richard the Lionheart

$x \rightarrow$  King John

$x \rightarrow$  Richard's left leg

$x \rightarrow$  John's left leg

$x \rightarrow$  The crown



$\forall x \text{ King}(x) \Rightarrow \text{Person}(x)$  verdadeira

se

$\text{King}(x) \Rightarrow \text{Person}(x)$  verdadeira em cada uma das interpretações estendidas

$\forall x \text{ King}(x) \Rightarrow \text{Person}(x)$  é equivalente às seguintes sentenças:

Richard the Lionheart is a king  $\Rightarrow$  Richard the Lionheart is a person

**King John is a king  $\Rightarrow$  King John is a person**

Richard's left leg is a king  $\Rightarrow$  Richard's left leg is a person

John's left leg is a king  $\Rightarrow$  John's left leg is a person

The crown is a king  $\Rightarrow$  The crown is a person

todas as 5 sentenças são verdadeiras para modelo e interpretação

só a 2ª sentença expressa o fato que um rei é uma pessoa

lembrar que:  $A \Rightarrow B$  é verdadeira sempre que  $A$  é falsa

$\forall x \text{ King } (x) \Rightarrow \text{Person } (x)$  OK

$\forall x \text{ King } (x) \wedge \text{Person } (x)$   $\neg$ OK

Richard the Lionheart is a king  $\wedge$  Richard the Lionheart is a person

King John is a king  $\wedge$  King John is a person

Richard's left leg is a king  $\wedge$  Richard's left leg is a person

John's left leg is a king  $\wedge$  John's left leg is a person

The crown is a king  $\wedge$  The crown is a person

este não é o significado pretendido (Rei é uma pessoa)

## Quantificador existencial: $\exists$

- $\exists x \text{Crown}(x) \wedge \text{OnHead}(x, \text{John})$
- intuitivamente:  $\exists x P(x)$  é verdadeira se  $P$  é verdadeira para algum objeto  $x$
- formalmente:  $\exists x P(x)$  verdadeira em um modelo, sob uma interpretação, se  $P$  é verdadeira em pelo menos uma das interpretações estendidas que atribui  $x$  a um elemento do domínio

# Exemplo

## Modelo e interpretação pretendida

### Interpretações estendidas

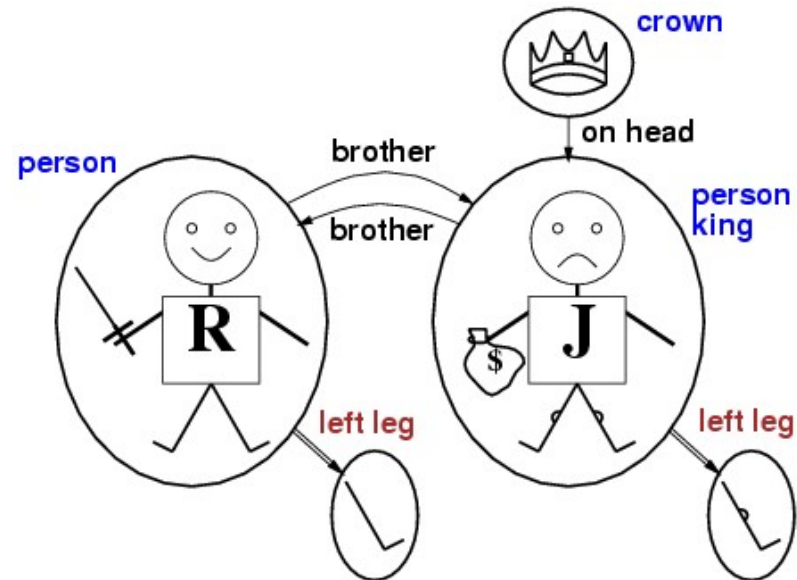
$x \rightarrow$  Richard the Lionheart

$x \rightarrow$  King John

$x \rightarrow$  Richard's left leg

$x \rightarrow$  John's left leg

$x \rightarrow$  The crown



$\exists x \text{ Crown}(x) \wedge \text{OnHead}(x, \text{John})$  verdadeira

se

$\text{Crown}(x) \wedge \text{OnHead}(x, \text{John})$  verdadeira em pelo menos uma das interpretações estendidas



$\exists x \text{Crown}(x) \wedge \text{OnHead}(x, \text{John})$  verdadeira se uma das sentenças abaixo:

Richard the Lionheart is a crown  $\wedge$  Richard the Lionheart is on John's head

King John is a crown  $\wedge$  King John is on John's head

Richard's left leg is a crown  $\wedge$  Richard's left leg is on John's head

John's left leg is a crown  $\wedge$  John's left leg is on John's head

**The crown is a crown  $\wedge$  the crown is on John's head**

for verdadeira

a 5ª sentença é verdadeira para o modelo e a interpretação dada

a 5ª sentença também verdadeira se John tem duas coroas na cabeça ( $\exists!$ )

$\exists x \text{ Crown}(x) \wedge \text{OnHead}(x, \text{John})$                       OK

$\exists x \text{ Crown}(x) \Rightarrow \text{OnHead}(x, \text{John})$                        $\neg$ OK

Richard the Lionheart is a crown  $\Rightarrow$  Richard the Lionheart is on John's head

King John is a crown  $\Rightarrow$  King John is on John's head

Richard's left leg is a crown  $\Rightarrow$  Richard's left leg is on John's head

John's left leg is a crown  $\Rightarrow$  John's left leg is on John's head

The crown is a crown  $\Rightarrow$  the crown is on John's head

lembrar que:  $A \Rightarrow B$  é verdadeira se  $A$  é falsa

$A \Rightarrow B$  é verdadeira se  $A$  e  $B$  verdadeiras

## Quantificadores aninhados

–  $\forall x \forall y \text{ Brother}(x, y) \Rightarrow \text{Sibling}(x, y)$

–  $\forall x, y \text{ Sibling}(x, y) \Rightarrow \text{Sibling}(y, x)$

–  $\forall x \exists y \text{ Loves}(x, y)$  *Everybody loves somebody*

–  $\exists y \forall x \text{ Loves}(x, y)$  *There is someone who is loved by everyone*

–  $\forall x [\text{Crown}(x) \vee (\exists x \text{ Brother}(\text{Richard}, x))]$

$\forall x [\text{Crown}(x) \vee (\exists y \text{ Brother}(\text{Richard}, y))]$

## Relações entre quantificadores $\forall$ e $\exists$

$$\forall x \neg P \equiv \neg \exists x P \quad \neg P \wedge \neg Q \equiv \neg(P \vee Q)$$

$$\neg \forall x P \equiv \exists x \neg P \quad \neg(P \wedge Q) \equiv \neg P \vee \neg Q$$

$$\forall x P \equiv \neg \exists x \neg P \quad P \wedge Q \equiv \neg(\neg P \vee \neg Q)$$

$$\exists x P \equiv \neg \forall x \neg P \quad P \vee Q \equiv \neg(\neg P \wedge \neg Q)$$

Exemplo:  $\forall x \neg \text{Likes}(x, \text{PaulMalouf}) \equiv \neg \exists y \text{Likes}(x, \text{PaulMalouf})$

$$\forall x \text{Likes}(x, \text{Money}) \equiv \neg \exists y \neg \text{Likes}(x, \text{Money})$$

## Igualdade

- função/relação identidade

Exemplo: *Father (John) = Henry*

## Notação livro texto

- variáveis: letras minúsculas
- predicados e funções: letras maiúsculas

Prolog `car (X) :- has (X, motor), has (X, wheels), numWheels (four)`

Lisp `( forall ?x  
          ( implies (and ( has ?x motor )  
                          ( has ?x wheels )  
                          ( numWheels four)))`

# Usando a lógica primeira ordem

## Asserções

TELL (*KB*, *King (John)* )

TELL (*KB*,  $\forall x \text{ King } (x) \Rightarrow \text{Person } (x)$ )

## Consultas

ASK (*KB*, *King (John)* )                      *true*

ASK (*KB*, *Person (John)* )                      *true*

ASK (*KB*,  $\exists x \text{ Person } (x)$  )                      *true* {*x* / *John*} substituição

# Representação de conhecimento

Exemplo: domínio das relações familiares

$$\forall m, c \text{ Mother}(c) = m \Leftrightarrow \text{Female}(m) \wedge \text{Parent}(m, c)$$

$$\forall w, h \text{ Husband}(h, w) \Leftrightarrow \text{Male}(h) \wedge \text{Spouse}(h, w)$$

$$\forall x \text{ Male}(x) \Leftrightarrow \neg \text{Female}(x)$$

$$\forall p, c \text{ Parent}(p, c) \Leftrightarrow \text{Child}(c, p)$$

$$\forall g, c \text{ Grandparent}(g, c) \Leftrightarrow \exists p \text{ Parent}(g, p) \wedge \text{Parent}(p, c)$$

$$\forall x, y \text{ Sibling}(x, y) \Leftrightarrow x \neq y \wedge \exists p \text{ Parent}(p, x) \wedge \text{Parent}(p, y)$$

## Observações

- sentenças do exemplo relações familiares são axiomas (ou definições)
- nem todas sentenças são axiomas, podem ser teoremas

Exemplo:  $\forall x, y \text{ Sibling}(x, y) \Rightarrow \text{Sibling}(y, x)$

- nem todos axiomas são definições, podem ser fatos

Exemplo:  $\text{Male}(\text{Jim}), \text{Spouse}(\text{Jim}, \text{Laura})$

- $\text{Male}(\text{George}), \text{Spouse}(\text{George}, \text{Laura})$  não permite deduzir  $\text{Female}(\text{Laura})$  (a menos que se acrescente um axioma no exemplo; ver lista exercício)



# Representação de conhecimento

Exemplo: mundo do wumpus

*Percept* ( [ *Stench*, *Breeze*, *Glitter*, *None*, *None* ], 5 )

**function** KB-AGENT (*percept*) **returns** an *action*

**static:** *KB*, a knowledge base

*t*, a counter, initially 0, indicating time

TELL ( *KB*, MAKE-PERCEPT-SENTENCE ( *percept*, *t* ) )

*action* ← ASK ( *KB*, MAKE-ACTION-QUERY ( *t* ) )

TELL ( *KB*, MAKE-ACTION-SENTENCE ( *action*, *t* ) )

*t* ← *t* + 1

**return** *action*

Ações: *Turn (Right)*, *Turn (Left)*, *Forward*, *Shoot*, *Grab*, *Release*, *Climb*

MAKE-ACTION-QUERY cria consultas do tipo  $\exists a \text{ BestAction } (a, 5)$

ASK retorna instâncias do tipo  $\{a/ \text{Grab}\}$

## Sentenças síncronas (*synchronic*)

- sentenças relacionam propriedades do mesmo estado (mesmo tempo)
- percepção → ação

$$\forall t \text{ Glitter } (t) \Rightarrow \text{BestAction } (\text{Grab}, t)$$

- percepção → descrição percepção → fatos sobre estado atual

$$\forall t, b, g, m, c \text{ Percept } ( [\text{Stench}, b, g, m, c], t ) \Rightarrow \text{Stench } (t)$$

$$\forall t, s, g, m, c \text{ Percept } ( [s, \text{Breeze}, g, m, c], t ) \Rightarrow \text{Breeze } (t)$$

$$\forall t, s, b, m, c \text{ Percept } ( [s, b, \text{Glitter}, m, c], t ) \Rightarrow \text{Glitter } (t)$$

– ambiente

$$\forall x, y, a, b \text{ Adjacent}([x, y], [a, b]) \Leftrightarrow \\ [a, b] \in \{[x + 1, y], [x - 1, y], [x, y + 1], [x, y - 1]\}$$

$$\forall s, t \text{ At}(\text{Agent}, s, t) \wedge \text{Breeze}(t) \Rightarrow \text{Breezy}(s)$$

regras diagnóstico: levam de fatos observados à causas não explícitas

$$\forall s \text{ Breezy}(s) \Rightarrow \exists r \text{ Adjacent}(r, s) \wedge \text{Pit}(r)$$

$$\forall s \neg \text{Breezy}(s) \Rightarrow \neg \exists r \text{ Adjacent}(r, s) \wedge \text{Pit}(r)$$

↓

$$\forall s \text{ Breezy}(s) \Leftrightarrow \exists r \text{ Adjacent}(r, s) \wedge \text{Pit}(r)$$

regras causais: propriedades do mundo geram percepções

$$\forall r \text{ Pity}(r) \Rightarrow [\forall s \text{ Adjacent}(r, s) \Rightarrow \text{Breezy}(s)]$$

$$\forall s [\forall r \text{ Adjacent}(r, s) \Rightarrow \neg \text{Pit}(r)] \Rightarrow \neg \text{Breezy}(s)$$

↓

$$\forall s \text{ Breezy}(s) \Leftrightarrow \exists r \text{ Adjacent}(r, s) \wedge \text{Pit}(r)$$

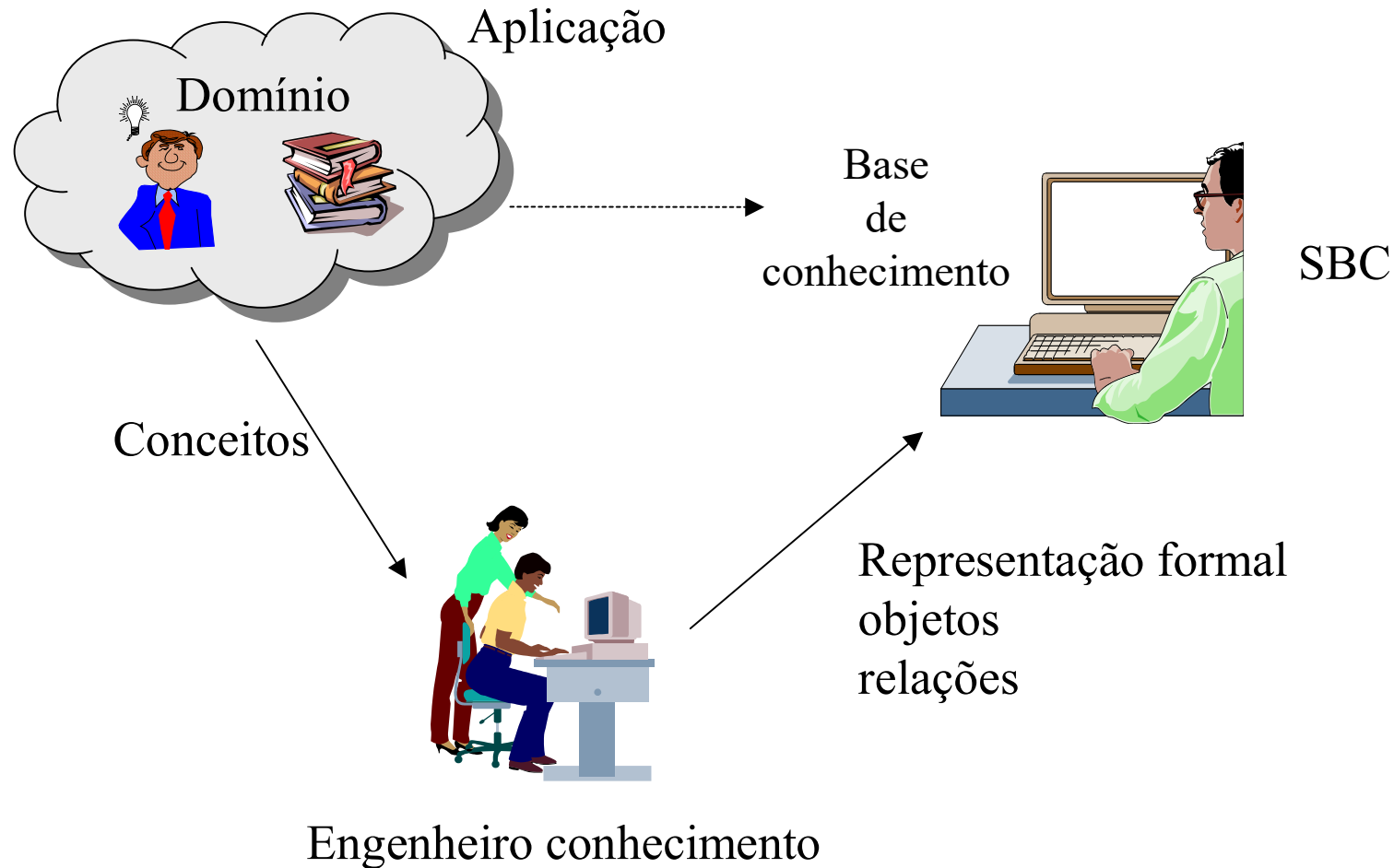
– *model-based reasoning systems*: sistemas que utilizam regras causais

Sentenças assíncronas (*diachronic*)

– sentenças relacionam propriedades entre instantes de tempo distintos

$$\forall t \text{ Arrow}(t) \Leftrightarrow \text{Arrow}(t-1) \wedge \neg \text{Shoot}(t)$$

# Engenharia de conhecimento e LPO



# Etapas do processo de engenharia de conhecimento

1. Identificar a tarefa
  - análogo ao PEAS
2. Aquisição de conhecimento
  - escopo da KB, domínio, funcionamento
3. Escolher vocabulário: predicados, funções, constantes
  - ontologia
4. Representar conhecimento sobre o domínio
  - axiomas
5. Criar instância específica
6. Fazer consultas
7. Consultar procedimento inferência
8. Verificar e validar

## Observação

Este material refere-se às notas de aula do curso EA 072 Inteligência Artificial em Aplicações Industriais da Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação da Unicamp. Não substitui o livro texto, as referências recomendadas e nem as aulas expositivas. Este material não pode ser reproduzido sem autorização prévia dos autores. Quando autorizado, seu uso é exclusivo para atividades de ensino e pesquisa em instituições sem fins lucrativos.