



EA 072 Inteligência Artificial em Aplicações Industriais

5-Lógica Matemática

Representação e Inferência

Lógica de Primeira Ordem

Lógica proposicional

- assume que o mundo contém fatos

Lógica de primeira ordem

- assume (similar à linguagem natural) que o mundo contém
 - objetos: pessoas, casas, números, cores,...
 - relações: irmão de, maior que, parte de,...
 - funções: pai de, melhor amigo,....

Lógica proposicional

- expressões lógicas são sentenças

Lógica de primeira ordem:

- expressões também são sentenças
- sentenças contêm termos que representam objetos
 - símbolos constantes
 - variáveis
 - símbolos funcionais
- símbolos predicativos que representam relações
- quantificadores \forall, \exists

Predicados, termos e quantificadores:

- utilizados para construir sentenças

$Senten\c{c}a \rightarrow Senten\c{c}a_Atomica$
| $(Senten\c{c}a \text{ Conectivo } Senten\c{c}a)$
| $Quantificador \ Vari\acute{a}vel \ \dots \ Senten\c{c}a$
| $\neg \ Senten\c{c}a$

$Senten\c{c}a_Atomica \rightarrow Predicado (Termo, \dots) \mid Termo = Termo$

$Termo \rightarrow Fun\c{c}\tilde{a}o(Termo, \dots) \mid Constante \mid Vari\acute{a}vel$

$Conectivo \rightarrow \wedge \mid \vee \mid \Rightarrow \mid \Leftrightarrow$

$Quantificador \rightarrow \forall \mid \exists$

$Constante \rightarrow A \mid B \mid X_1 \mid John$

$Vari\acute{a}vel \rightarrow x \mid y \mid s \mid \dots$

$Predicado \rightarrow True \mid False \mid Antes_De \mid Cor \mid \dots$

$Fun\c{c}\tilde{a}o \rightarrow M\tilde{a}e \mid f \mid g \mid$

sintaxe
(BNF)

Interpretação

- específica, precisamente, quais objetos, relações e funções são referenciadas pelos símbolos constantes, predicativos, funcionais

Constantes

- interpretação específica objeto do universo referenciado por cada constante

Exemplo: *Richard, John, A, B*

Predicados

- interpretação específica relação entre o modelo do mundo e o predicado a que se refere

Exemplo: *Brother (Richard, John), $P(t_1, \dots, t_n)$*

Funções

- um objeto se relaciona exatamente com um outro objeto

Exemplo: *seno* (x), *FatherOff* (*Richard*)

Termos

- expressão lógica que se refere a um objeto: variável, constante, função

Exemplo: *LeftLegOf* (*King John*), $F(x,y,z)$

Sentença atômica

- símbolo predicativo seguido por uma lista de termos entre parêntesis
- representam fatos

Exemplo: *Brother (Richard, John)*

Married (FatherOf (Richard), MotherOf (John))

LeftOf (Joe, Bin)

Sentença complexa

- utiliza conectivos lógicos (similar ao caso proposicional)

Exemplo: \neg *Brother (LeftLeg (Richard), John)*

Brother (Richard, John) \wedge Brother (John, Richard)

King (Richard) \vee King (John)

\neg *King (Richard) \Rightarrow King (John)*

Verdade em lógica primeira ordem

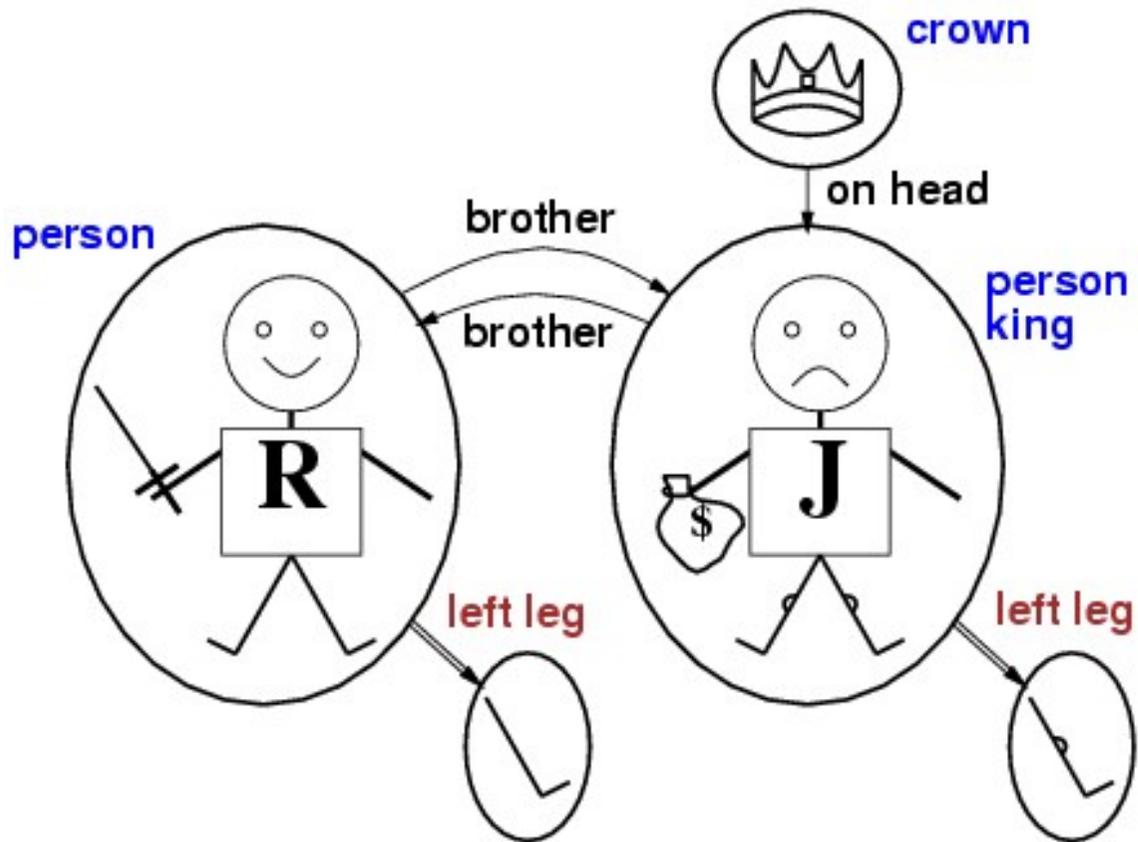
Veracidade de sentenças

- depende da definição de
 - um modelo
 - uma interpretação

Modelo

- objetos (elementos do domínio)
- relações entre estes objetos

Exemplo modelo para LPO



Interpretação específica referências para

- símbolos constantes → objetos
- símbolos predicativos → relações
- símbolos funcionais → relações funcionais

Veracidade de sentenças atômicas

sentença atômica $Predicado(termo_1, termo_2, \dots, termo_n)$ é verdadeira em um modelo e sob uma interpretação se e somente se os objetos referenciados por $termo_1, \dots, termo_n$ estão na relação referenciada por $Predicado$

Quantificadores

- permitem expressar propriedades de uma coleção de objetos

Exemplo: \forall (universal), \exists (existencial)

Quantificador universal: \forall

- $\forall x \text{ King}(x) \Rightarrow \text{Person}(x)$ (todos reis são pessoas)
- intuitivamente: $\forall x P(x)$ verdadeira se $P(x)$ é verdadeira para todo objeto x
- formalmente: $\forall x P(x)$ verdadeira em um modelo, sob uma interpretação se P é verdadeira em todas interpretações estendidas possíveis construídas da interpretação, onde cada interpretação estendida especifica o elemento do domínio ao qual x se refere

Exemplo

Modelo e interpretação pretendida

Interpretações estendidas

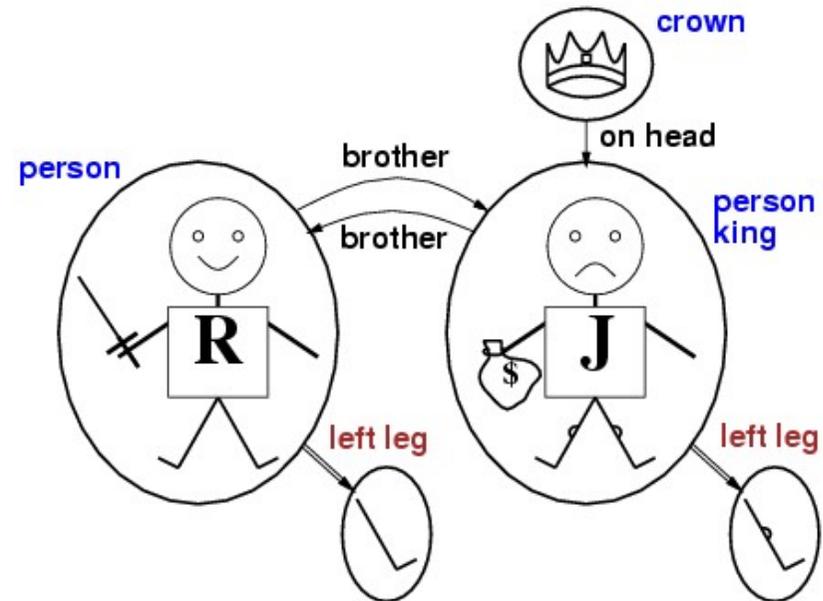
$x \rightarrow$ Richard the Lionheart

$x \rightarrow$ King John

$x \rightarrow$ Richard's left leg

$x \rightarrow$ John's left leg

$x \rightarrow$ The crown



$\forall x \text{ King}(x) \Rightarrow \text{Person}(x)$ verdadeira

se

$\text{King}(x) \Rightarrow \text{Person}(x)$ verdadeira em cada uma das interpretações estendidas

$\forall x \text{ King}(x) \Rightarrow \text{Person}(x)$ é equivalente às seguintes sentenças:

Richard the Lionheart is a king \Rightarrow Richard the Lionheart is a person

King John is a king \Rightarrow King John is a person

Richard's left leg is a king \Rightarrow Richard's left leg is a person

John's left leg is a king \Rightarrow John's left leg is a person

The crown is a king \Rightarrow The crown is a person

todas as 5 sentenças são verdadeiras para modelo e interpretação

só a 2ª sentença expressa o fato que um rei é uma pessoa

lembrar que: $A \Rightarrow B$ é verdadeira sempre que A é falsa

$\forall x \text{ King } (x) \Rightarrow \text{Person } (x)$ OK

$\forall x \text{ King } (x) \wedge \text{Person } (x)$ \neg OK

Richard the Lionheart is a king \wedge Richard the Lionheart is a person

King John is a king \wedge King John is a person

Richard's left leg is a king \wedge Richard's left leg is a person

John's left leg is a king \wedge John's left leg is a person

The crown is a king \wedge The crown is a person

este não é o significado pretendido (Rei é uma pessoa)

Quantificador existencial: \exists

- $\exists x \text{ Crown}(x) \wedge \text{OnHead}(x, \text{John})$
- intuitivamente: $\exists x P(x)$ é verdadeira se P é verdadeira para algum objeto x
- formalmente: $\exists x P(x)$ verdadeira em um modelo, sob uma interpretação, se P é verdadeira em pelo menos uma das interpretações estendidas que atribui x a um elemento do domínio

Exemplo

Modelo e interpretação pretendida

Interpretações estendidas

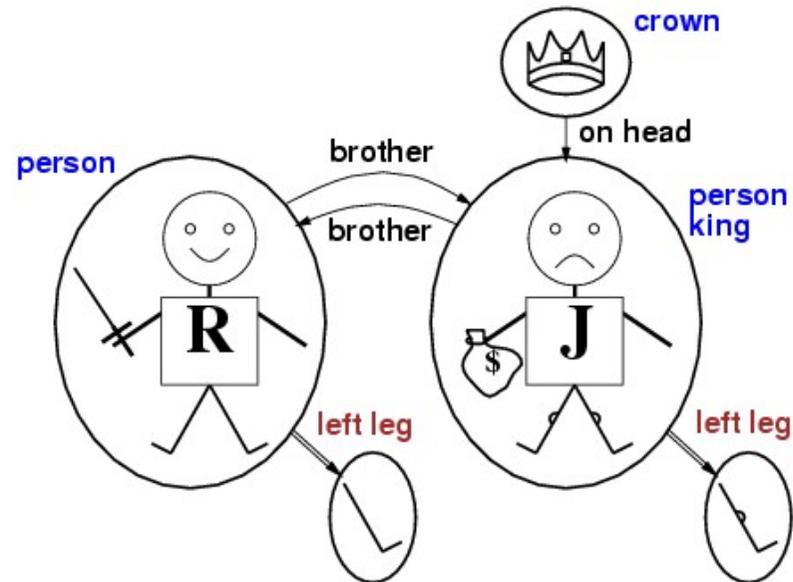
$x \rightarrow$ Richard the Lionheart

$x \rightarrow$ King John

$x \rightarrow$ Richard's left leg

$x \rightarrow$ John's left leg

$x \rightarrow$ The crown



$\exists x \text{ Crown}(x) \wedge \text{OnHead}(x, \text{John})$ verdadeira

se

$\text{Crown}(x) \wedge \text{OnHead}(x, \text{John})$ verdadeira em pelo menos uma das interpretações estendidas

$\exists x \text{Crown}(x) \wedge \text{OnHead}(x, \text{John})$ verdadeira se uma das sentenças abaixo:

Richard the Lionheart is a crown \wedge Richard the Lionheart is on John's head

King John is a crown \wedge King John is on John's head

Richard's left leg is a crown \wedge Richard's left leg is on John's head

John's left leg is a crown \wedge John's left leg is on John's head

The crown is a crown \wedge the crown is on John's head

for verdadeira

a 5ª sentença é verdadeira para o modelo e a interpretação dada

a 5ª sentença também verdadeira se John tem duas coroas na cabeça ($\exists!$)

$\exists x \text{Crown}(x) \wedge \text{OnHead}(x, \text{John})$ OK

$\exists x \text{Crown}(x) \Rightarrow \text{OnHead}(x, \text{John})$ \neg OK

Richard the Lionheart is a crown \Rightarrow Richard the Lionheart is on John's head

King John is a crown \Rightarrow King John is on John's head

Richard's left leg is a crown \Rightarrow Richard's left leg is on John's head

John's left leg is a crown \Rightarrow John's left leg is on John's head

The crown is a crown \Rightarrow the crown is on John's head

lembrar que: $A \Rightarrow B$ é verdadeira se A é falsa

$A \Rightarrow B$ é verdadeira se A e B verdadeiras

Quantificadores aninhados

– $\forall x \forall y \text{ Brother}(x, y) \Rightarrow \text{Sibling}(x, y)$

– $\forall x, y \text{ Sibling}(x, y) \Rightarrow \text{Sibling}(y, x)$

– $\forall x \exists y \text{ Loves}(x, y)$ *Everybody loves somebody*

– $\exists y \forall x \text{ Loves}(x, y)$ *There is someone who is loved by everyone*

– $\forall x [\text{Crown}(x) \vee (\exists x \text{ Brother}(\text{Richard}, x))]$

$\forall x [\text{Crown}(x) \vee (\exists y \text{ Brother}(\text{Richard}, y))]$

Relações entre quantificadores \forall e \exists

$$\forall x \neg P \equiv \neg \exists x P \quad \neg P \wedge \neg Q \equiv \neg(P \vee Q)$$

$$\neg \forall x P \equiv \exists x \neg P \quad \neg(P \wedge Q) \equiv \neg P \vee \neg Q$$

$$\forall x P \equiv \neg \exists x \neg P \quad P \wedge Q \equiv \neg(\neg P \vee \neg Q)$$

$$\exists x P \equiv \neg \forall x \neg P \quad P \vee Q \equiv \neg(\neg P \wedge \neg Q)$$

Exemplo: $\forall x \neg \text{Likes}(x, \text{PaulMalouf}) \equiv \neg \exists y \text{Likes}(x, \text{PaulMalouf})$

$$\forall x \text{Likes}(x, \text{Money}) \equiv \neg \exists y \neg \text{Likes}(x, \text{Money})$$

Igualdade

- função/relação identidade

Exemplo: *Father (John) = Henry*

Notação livro texto

- variáveis: letras minúsculas
- predicados e funções: letras maiúsculas

Prolog `car (X) :- has (X, motor), has (X, wheels), numWheels (four)`

Lisp `(forall ?x
 (implies (and (has ?x motor)
 (has ?x wheels)
 (numWheels four)))`

Usando a lógica primeira ordem

Asserções

TELL (*KB*, *King (John)*)

TELL (*KB*, $\forall x \text{ King } (x) \Rightarrow \text{Person } (x)$)

Consultas

ASK (*KB*, *King (John)*) *true*

ASK (*KB*, *Person (John)*) *true*

ASK (*KB*, $\exists x \text{ Person } (x)$) *true* {*x* / *John*} substituição

Representação de conhecimento

Exemplo: domínio das relações familiares

$$\forall m, c \text{ Mother}(c) = m \Leftrightarrow \text{Female}(m) \wedge \text{Parent}(m, c)$$

$$\forall w, h \text{ Husband}(h, w) \Leftrightarrow \text{Male}(h) \wedge \text{Spouse}(h, w)$$

$$\forall x \text{ Male}(x) \Leftrightarrow \neg \text{Female}(x)$$

$$\forall p, c \text{ Parent}(p, c) \Leftrightarrow \text{Child}(c, p)$$

$$\forall g, c \text{ Grandparent}(g, c) \Leftrightarrow \exists p \text{ Parent}(g, p) \wedge \text{Parent}(p, c)$$

$$\forall x, y \text{ Sibling}(x, y) \Leftrightarrow x \neq y \wedge \exists p \text{ Parent}(p, x) \wedge \text{Parent}(p, y)$$

Observações

- sentenças do exemplo relações familiares são axiomas (ou definições)
- nem todas sentenças são axiomas, podem ser teoremas

Exemplo: $\forall x, y \text{ Sibling}(x, y) \Rightarrow \text{Sibling}(y, x)$

- nem todos axiomas são definições, podem ser fatos

Exemplo: $\text{Male}(\text{Jim}), \text{Spouse}(\text{Jim}, \text{Laura})$

- $\text{Male}(\text{George}), \text{Spouse}(\text{George}, \text{Laura})$ não permite deduzir $\text{Female}(\text{Laura})$ (a menos que se acrescente um axioma no exemplo; ver lista exercício)

Representação de conhecimento

Exemplo: mundo do wumpus

Percept ([*Stench*, *Breeze*, *Glitter*, *None*, *None*], 5)

function KB-AGENT (*percept*) **returns** an *action*

static: *KB*, a knowledge base

t, a counter, initially 0, indicating time

TELL (*KB*, MAKE-PERCEPT-SENTENCE (*percept*, *t*))

action ← ASK (*KB*, MAKE-ACTION-QUERY (*t*))

TELL (*KB*, MAKE-ACTION-SENTENCE (*action*, *t*))

t ← *t* + 1

return *action*

Ações: *Turn (Right)*, *Turn (Left)*, *Forward*, *Shoot*, *Grab*, *Release*, *Climb*

MAKE-ACTION-QUERY cria consultas do tipo $\exists a \text{ BestAction } (a, 5)$

ASK retorna instâncias do tipo $\{a/ \text{Grab}\}$

Sentenças síncronas (*synchronic*)

- sentenças relacionam propriedades do mesmo estado (mesmo tempo)
- percepção → ação

$$\forall t \text{ Glitter } (t) \Rightarrow \text{BestAction } (\text{Grab}, t)$$

- percepção → descrição percepção → fatos sobre estado atual

$$\forall t, b, g, m, c \text{ Percept } ([\text{Stench}, b, g, m, c], t) \Rightarrow \text{Stench } (t)$$

$$\forall t, s, g, m, c \text{ Percept } ([s, \text{Breeze}, g, m, c], t) \Rightarrow \text{Breeze } (t)$$

$$\forall t, s, b, m, c \text{ Percept } ([s, b, \text{Glitter}, m, c], t) \Rightarrow \text{Glitter } (t)$$

– ambiente

$$\forall x, y, a, b \text{ Adjacent}([x, y], [a, b]) \Leftrightarrow \\ [a, b] \in \{[x + 1, y], [x - 1, y], [x, y + 1], [x, y - 1]\}$$

$$\forall s, t \text{ At}(\text{Agent}, s, t) \wedge \text{Breeze}(t) \Rightarrow \text{Breezy}(s)$$

regras diagnóstico: levam de fatos observados à causas não explícitas

$$\forall s \text{ Breezy}(s) \Rightarrow \exists r \text{ Adjacent}(r, s) \wedge \text{Pit}(r)$$

$$\forall s \neg \text{Breezy}(s) \Rightarrow \neg \exists r \text{ Adjacent}(r, s) \wedge \text{Pit}(r)$$

↓

$$\forall s \text{ Breezy}(s) \Leftrightarrow \exists r \text{ Adjacent}(r, s) \wedge \text{Pit}(r)$$

regras causais: propriedades do mundo geram percepções

$$\forall r \text{ Pity}(r) \Rightarrow [\forall s \text{ Adjacent}(r, s) \Rightarrow \text{Breezy}(s)]$$

$$\forall s [\forall r \text{ Adjacent}(r, s) \Rightarrow \neg \text{Pit}(r)] \Rightarrow \neg \text{Breezy}(s)$$

↓

$$\forall s \text{ Breezy}(s) \Leftrightarrow \exists r \text{ Adjacent}(r, s) \wedge \text{Pit}(r)$$

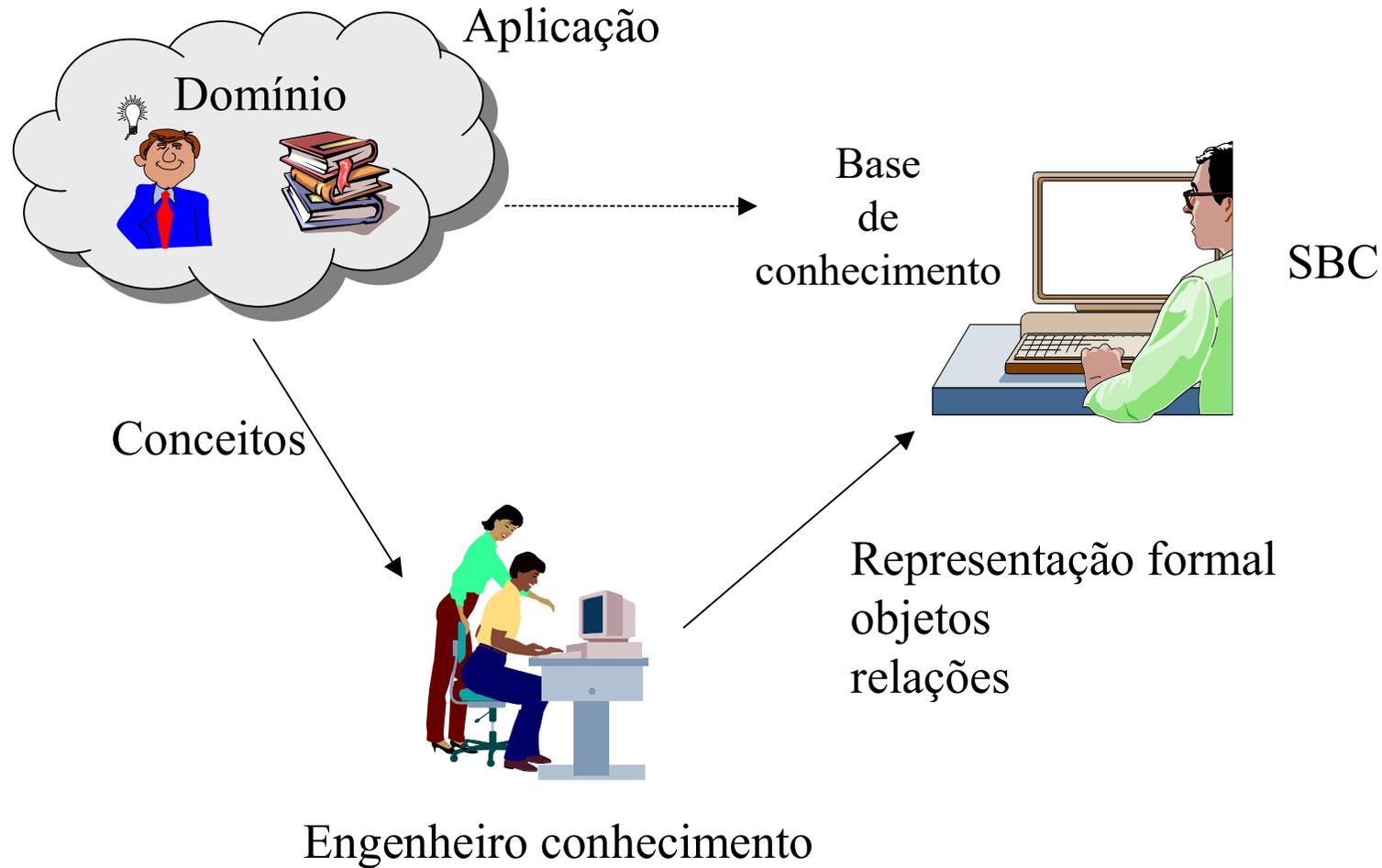
– *model-based reasoning systems*: sistemas que utilizam regras causais

Sentenças assíncronas (*diachronic*)

– sentenças relacionam propriedades entre instantes de tempo distintos

$$\forall t \text{ Arrow}(t) \Leftrightarrow \text{Arrow}(t-1) \wedge \neg \text{Shoot}(t)$$

Engenharia de conhecimento e LPO



Etapas do processo de engenharia de conhecimento

1. Identificar a tarefa
 - análogo ao PEAS
2. Aquisição de conhecimento
 - escopo da KB, domínio, funcionamento
3. Escolher vocabulário: predicados, funções, constantes
 - ontologia
4. Representar conhecimento sobre o domínio
 - axiomas
5. Criar instância específica
6. Fazer consultas
7. Consultar procedimento inferência
8. Verificar e validar

Observação

Este material refere-se às notas de aula do curso EA 072 Inteligência Artificial em Aplicações Industriais da Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação da Unicamp. Não substitui o livro texto, as referências recomendadas e nem as aulas expositivas. Este material não pode ser reproduzido sem autorização prévia dos autores. Quando autorizado, seu uso é exclusivo para atividades de ensino e pesquisa em instituições sem fins lucrativos.