



EA 044 Planejamento e Análise de Sistemas de Produção

Programação Não Linear Restrita

Algoritmos

Tópicos

1-Introdução

2-Função e métodos de penalização

3-Função e métodos de barreira

4-Direções factíveis e gradiente reduzido

1-Introdução

- Forma geral PNL diferenciáveis

$$\min(\max) \quad f(x)$$

$$\text{sa} \quad g_i(x) \geq b_i, \quad \forall i \in G$$

$$g_i(x) \leq b_i, \quad \forall i \in L$$

$$g_i(x) = b_i, \quad \forall i \in E$$

f, g_i : funções diferenciáveis

G, L, E : conjuntos de índices

- Métodos de PNL restrita
 - métodos de transformação: penalização, barreira, ...
 - métodos de direções factíveis: gradiente reduzido, ...

2-Funções e métodos de penalização

$$\begin{array}{ll}\min & f(x) \\ \text{sa} & g(x) = b\end{array}$$

transformação em um PNL irrestrito, $\mu > 0$ e grande

$$\begin{array}{ll}\min & f(x) + \mu[g(x) - b]^2 \\ \text{sa} & x \in \mathbb{R}^n\end{array}$$

na solução ótima $[g(x) - b]^2 \approx 0$

$$\min f(x)$$

$$\text{sa } g(x) \leq b$$

transformação em um PNL irrestrito, $\mu > 0$ e grande

$\mu[g(x) - b]^2$ penaliza igualmente $g(x) - b \leq 0$ e $g(x) - b \geq 0$

penalização é desejável somente quando x é infactível

$$\min f(x) + \mu \max[0, g(x) - b]$$

$$\text{sa } x \in \mathbb{R}^n$$

na solução ótima $\max[0, g(x) - b] \approx 0$

Transformação:

$$\min f(\mathbf{x}) + \mu \sum_i p_i(\mathbf{x}) = F(\mathbf{x})$$

$$p_i(\mathbf{x}) = \begin{cases} = 0 & \text{se } \mathbf{x} \text{ é factível} \\ > 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$p_i(\mathbf{x})$ função de penalização, $\mu > 0$

Ideia: iniciar com uma solução candidata $\mathbf{x}$ qualquer e forçar o ótimo irrestrito do modelo transformado para factibilidade

Funções de penalização

$=$	$\underline{\geq}$	$\underline{\leq}$
$ g_i(\mathbf{x}) - b_i $	$\max[0, b_i - g_i(\mathbf{x})]$	$\max[0, g_i(\mathbf{x}) - b_i]$
$ g_i(\mathbf{x}) - b_i ^2$	$\max^2[0, b_i - g_i(\mathbf{x})]$	$\max^2[0, g_i(\mathbf{x}) - b_i]$

- Diferenciabilidade × exatidão da penalização
 - alternativas $[.]^2$ são diferenciáveis, mas não exatas em geral
 - alternativas não $[.]^2$ são exatas se $\mu \rightarrow \infty$ induz factibilidade

Resultados importantes

Se uma solução ótima x^* do modelo transformado é factível para o modelo original restrito, então ela é ótima para este modelo.

Se alternativas não quadradas da função de penalização são usadas com um PNL restrito que possui solução ótima, então existe um multiplicador finito μ suficientemente grande tal que um ótimo irrestrito da transformação é ótimo para o modelo original restrito.

Exemplo

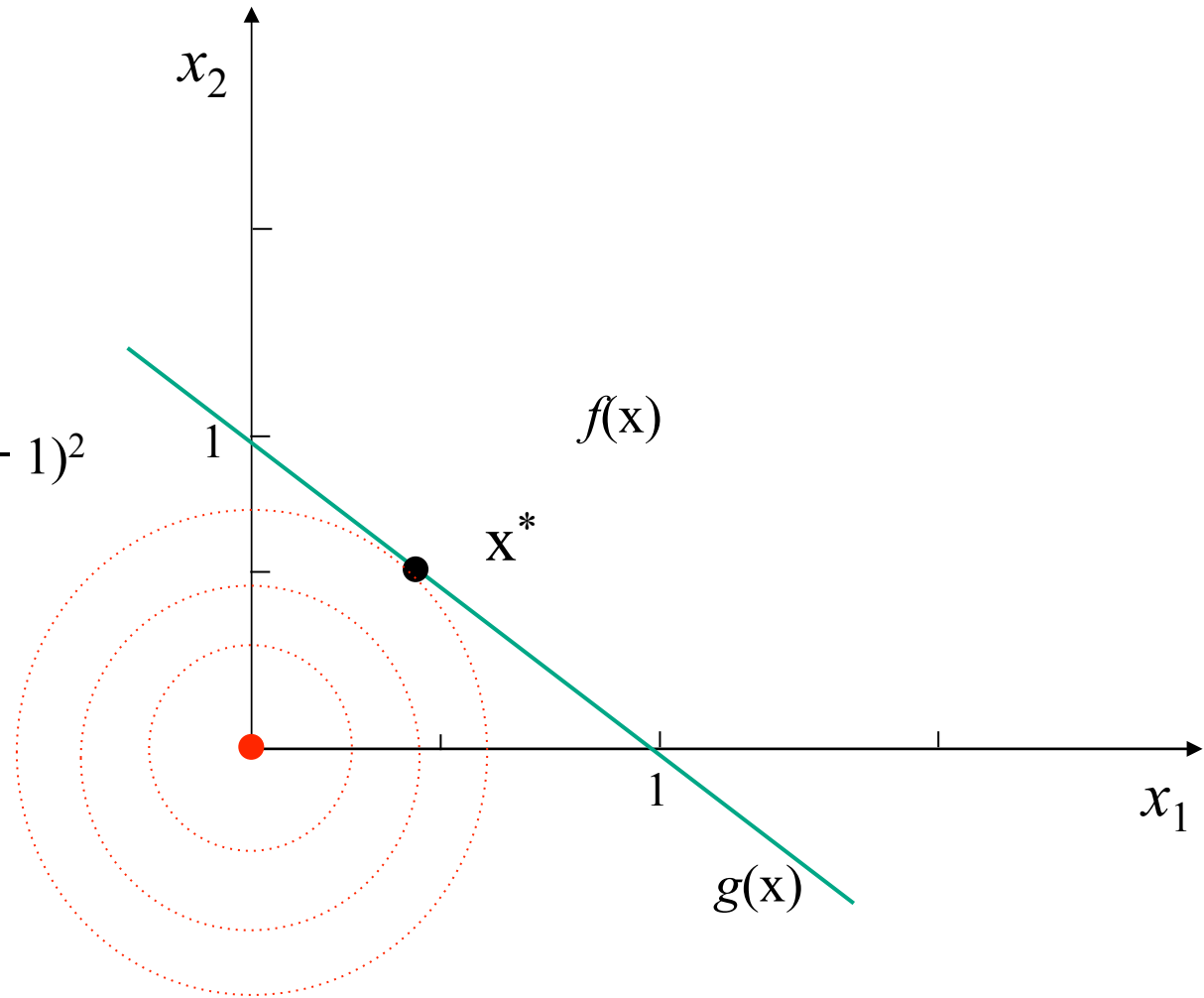
$$\begin{array}{ll} \min & x_1^2 + x_2^2 \\ \text{sa} & x_1 + x_2 = 1 \end{array}$$

$$F(x) = x_1^2 + x_2^2 + \mu (x_1 + x_2 - 1)^2$$

$$\min F(x)$$

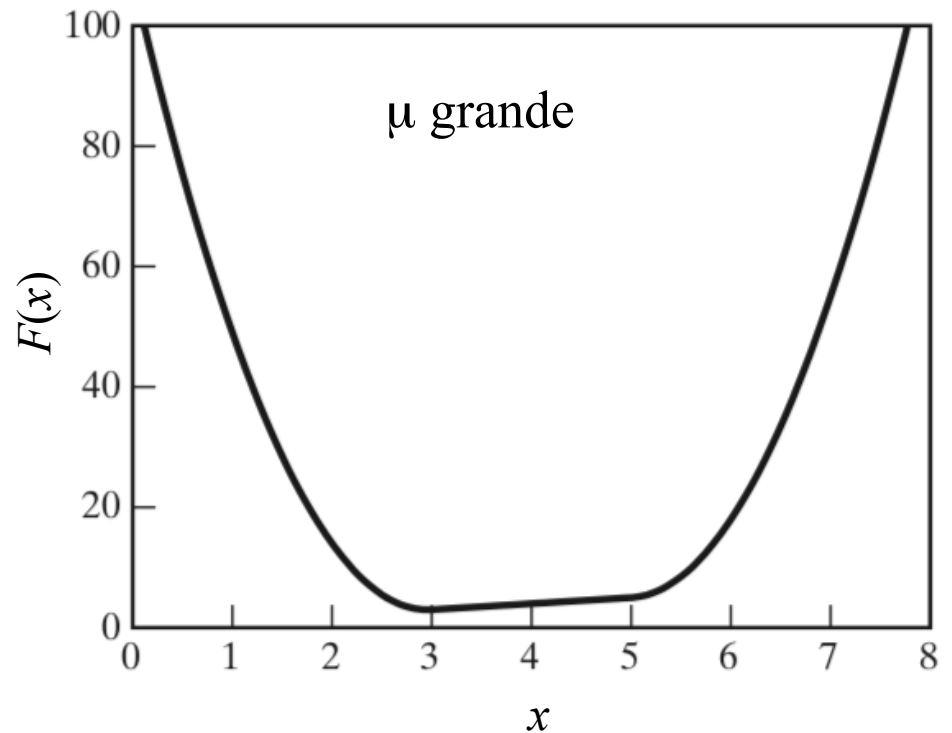
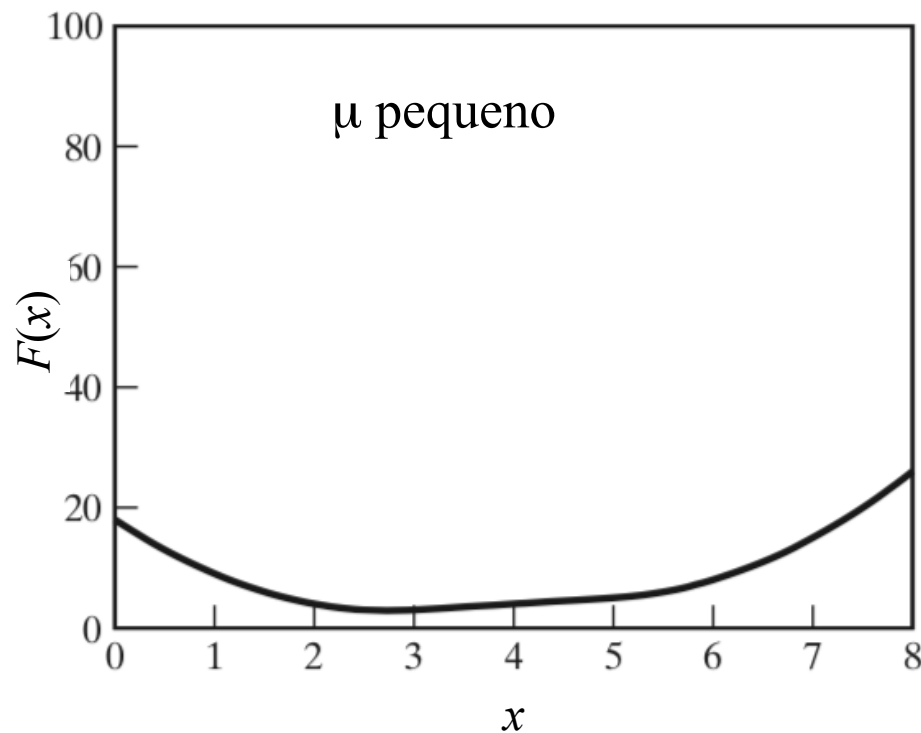
$$\nabla F(x) = 0$$

$$x_1 = x_2 = \mu / (2\mu + 1)$$



Multiplicador de penalização

$$\begin{array}{ll} \min & x \\ \text{sa} & 3 \leq x \leq 5 \end{array}$$



$\mu > 0$ iniciar pequeno, aumentar durante as iterações

Algoritmo SUMT (Sequential Unconstrained Min/Max Technique)

Passo 0 **Inicialização**: formar $F(x)$, escolher solução inicial x^0 , $\mu_0 > 0$ e pequeno, fator $\beta > 1$; $t \leftarrow 0$;

Passo 1 **Otimização irrestrita**: resolver $\min F(x)$ iniciando com x^t e μ^t para obter ótimo x^{t+1} ;

Passo 2 **Parada**: se x^t é suficientemente factível para o modelo restrito original, então parar; x^t é ótimo;

Passo 3 **Aumenta multiplicador**: $\mu_{t+1} = \beta \mu_t$; $t = t + 1$; ir para o Passo 1;

Funções de barreira

<u>$\geq$</u>	<u>$\leq$</u>
$-\ln[g_i(\mathbf{x}) - b_i]$	$-\ln[b_i - g_i(\mathbf{x})]$
$1/[g_i(\mathbf{x}) - b_i]$	$1/[b_i - g_i(\mathbf{x})]$

funções barreira $\rightarrow \infty$ quando $\geq$ ($\leq$) se aproxima da =

Transformação

$$\min f(x) + \mu \sum_i q_i(x) = F(x)$$

$q_i(x) \rightarrow \infty$ à medida que q_i se torna ativa

$q_i(x)$ função de barreira, $\mu > 0$

inicia com uma solução candidata x factível

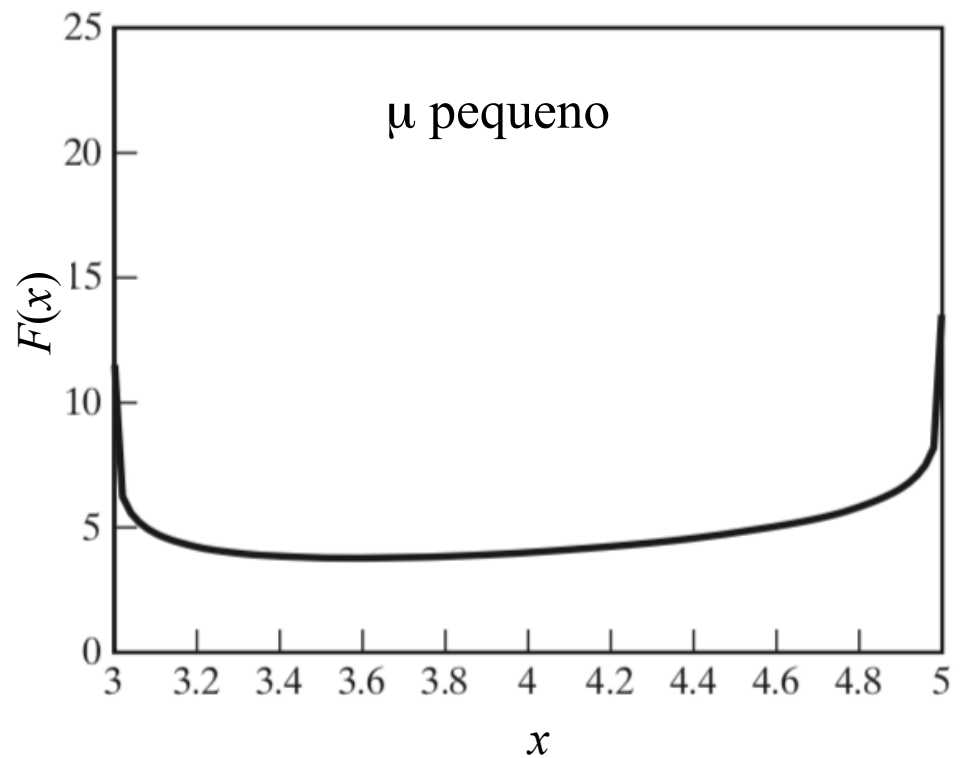
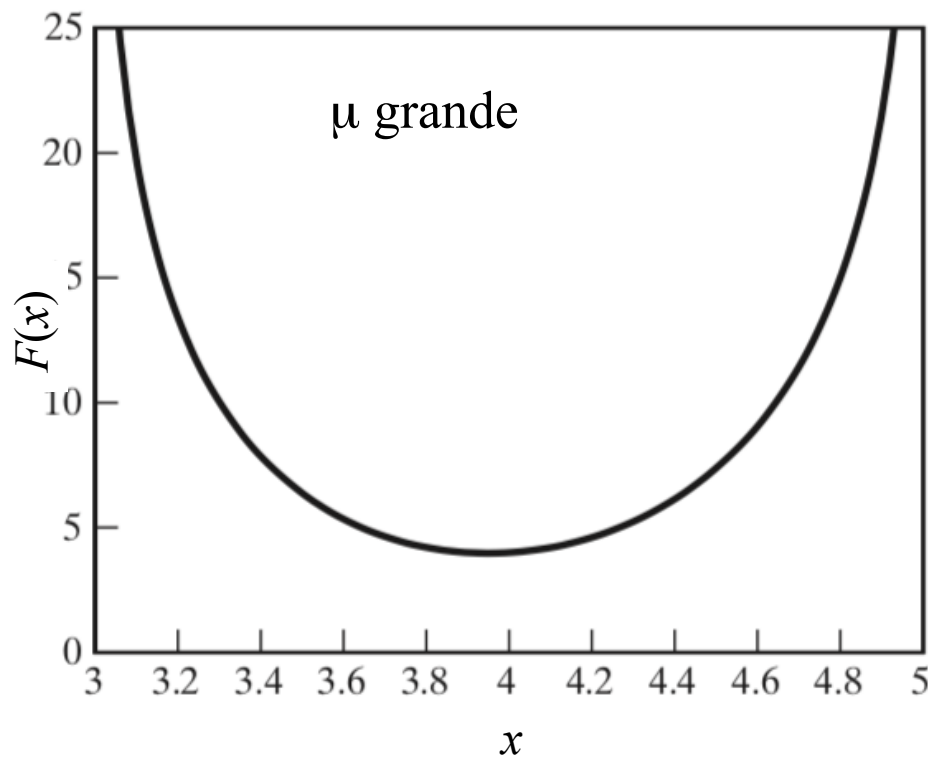
Resultados importantes

A solução ótima do modelo transformado nunca é igual à solução ótima do modelo original restrito se $\mu > 0$, e se o ótimo do modelo original ocorre na fronteira da restrição.

A sequência dos ótimos de $F(x)$ converge para uma solução ótima do modelo PNL restrito original quando $\mu \rightarrow 0$

Multiplicador de barreira

$$\begin{array}{ll} \min & x \\ \text{sa} & 3 \leq x \leq 5 \end{array}$$



$\mu > 0$ iniciar grande, diminuir durante as iterações

Algoritmo SUBT (Sequential Unconstrained Barrier Technique)

Passo 0 **Inicialização**: formar $F(x)$, escolher solução inicial x^0 factível e interior, $\mu_0 > 0$ e grande, fator $\beta < 1$; $t \leftarrow 0$;

Passo 1 **Otimização irrestrita**: resolver $\min F(x)$ iniciando com x^t e μ^t para obter ótimo x^{t+1} ;

Passo 2 **Parada**: se μ é suficientemente pequeno, então parar; x^t é ótimo local;

Passo 3 **Diminui multiplicador**: $\mu_{t+1} = \beta\mu_t$; $t = t + 1$; ir para o Passo 1;

Exemplo

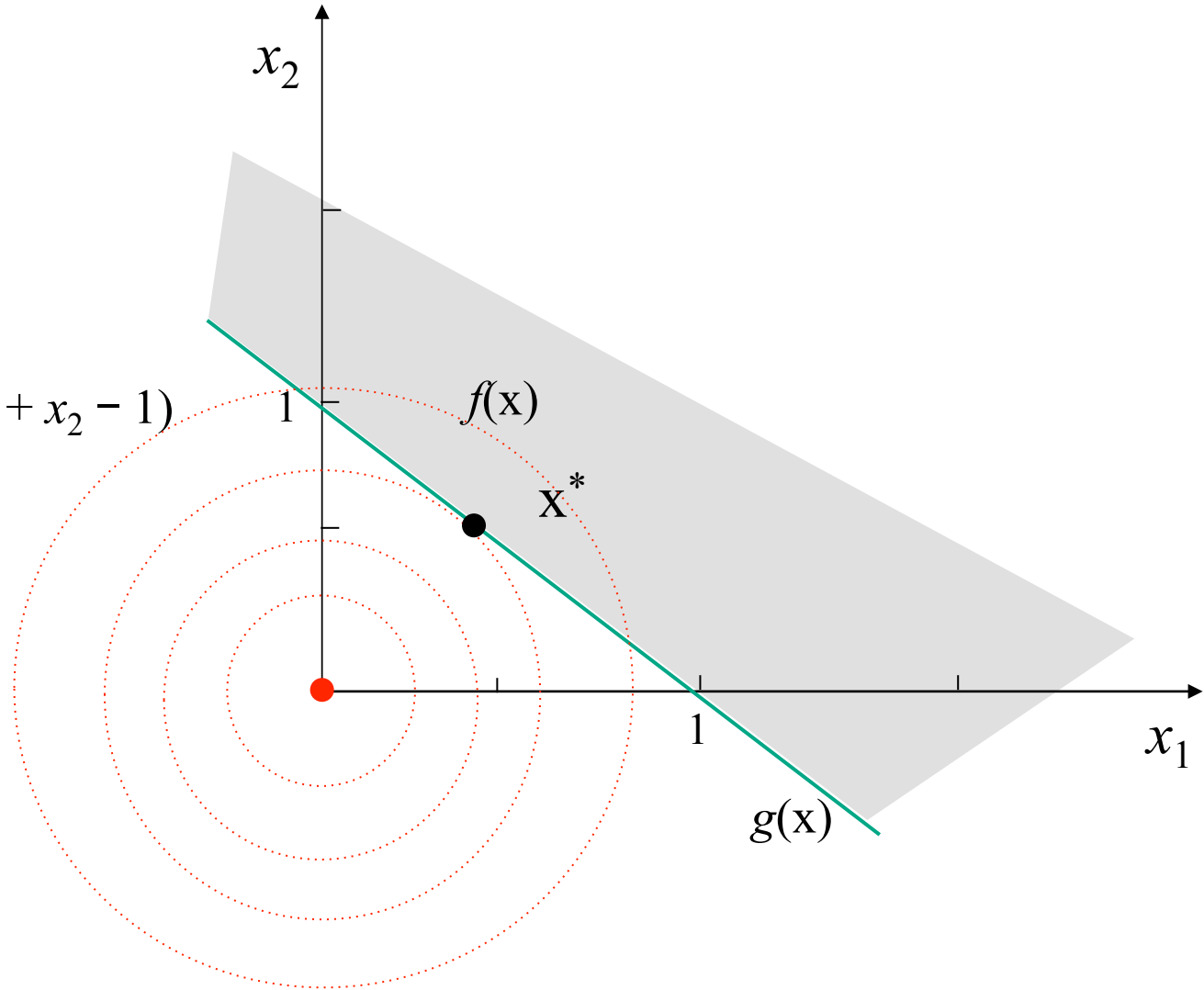
$$\begin{array}{ll} \min & x_1^2 + x_2^2 \\ \text{sa} & x_1 + x_2 \geq 1 \end{array}$$

$$F(x) = x_1^2 + x_2^2 - \mu \ln(x_1 + x_2 - 1)$$

$$\min F(x)$$

$$\nabla F(x) = 0$$

$$x_1 = x_2 = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4\mu}}{4}$$



4-Direções factíveis e gradiente reduzido

Forma padrão para PNL com restrições lineares

$$\min(\max) f(\mathbf{x})$$

$$\text{sa} \quad \mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x} \geq \underline{0}$$

linhas de $\mathbf{A}$ são LI

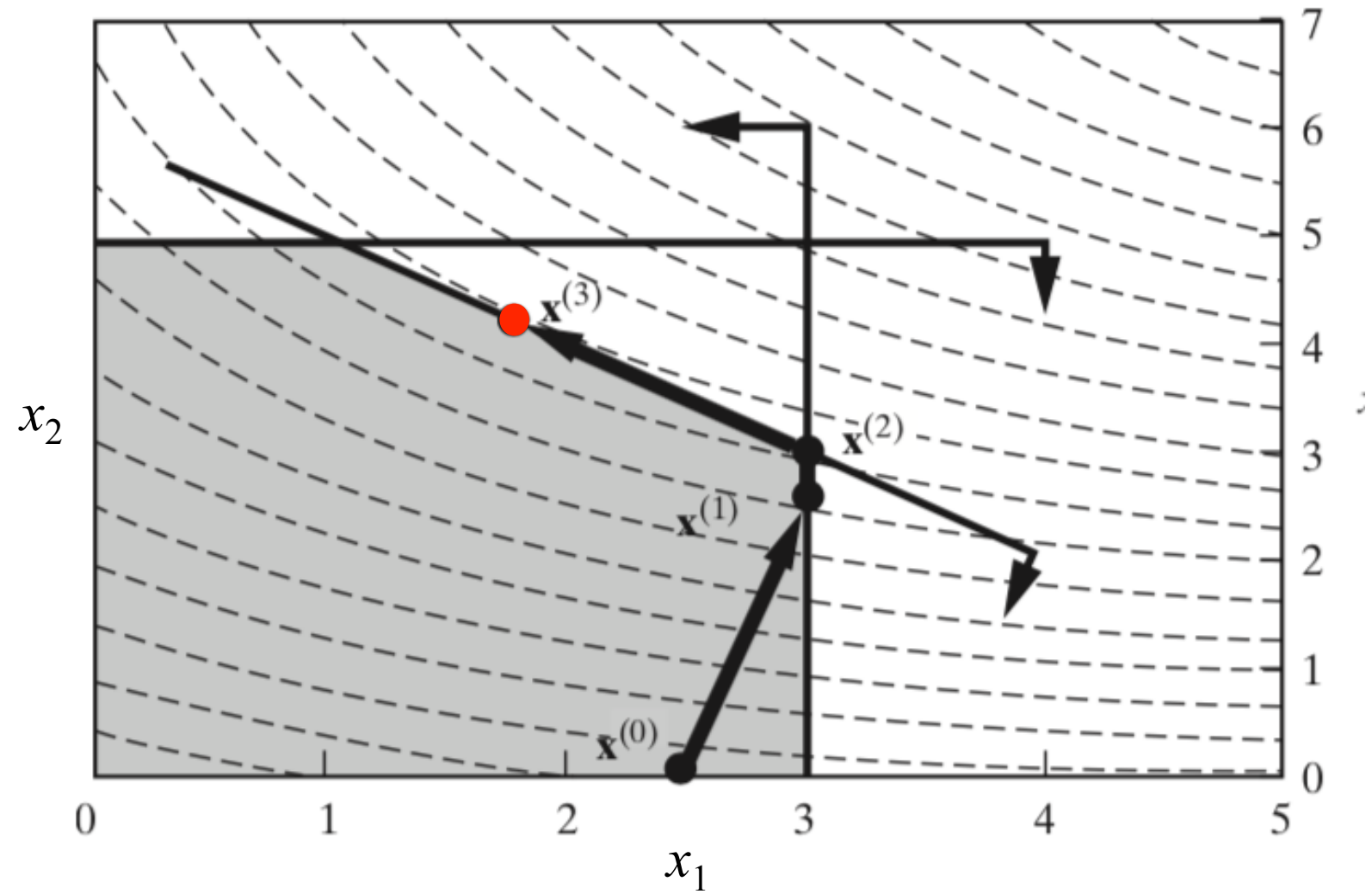
Exemplo

$$\begin{array}{ll}\min & (x_1 - 5)^2 - 2x_1x_2 + (x_2 - 10)^2 \\ \text{sa} & x_1 + x_2 \leq 6 \\ & 0 \leq x_1 \leq 3 \\ & 0 \leq x_2 \leq 5\end{array}$$

modelo original

$$\begin{array}{ll}\min & (x_1 - 5)^2 - 2x_1x_2 + (x_2 - 10)^2 \\ \text{sa} & x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ & x_1 + + x_4 = 3 \\ & + x_2 + + x_5 = 5 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0\end{array}$$

forma padrão



$$\mathbf{x}^* = (1.75, 4.25)$$

Direções factíveis

$$A\Delta x = 0$$

$$\Delta x_j \geq 0 \quad \text{para todo } j \text{ com } x_j = 0$$

$$x^{(0)} = (2.5, 0, 3.5, 0.5, 5)$$

$$\Delta x_1 + \Delta x_2 + \Delta x_3 = 0$$

$$\Delta x_1 + \quad \quad \quad + \Delta x_4 = 0$$

$$\quad + \Delta x_2 + \quad \quad \quad + \Delta x_5 = 0$$

$$\Delta x_2 \geq 0$$

Variáveis básicas, não básicas e super básicas

básicas: $x_j > 0$

não básicas: $x_j = 0$

super básicas: não básica $x_j > 0$

$$\min (x_1 - 5)^2 - 2x_1x_2 + (x_2 - 10)^2$$

$$\text{sa } x_1 + x_2 + x_3 = 6$$

$$x_1 + \quad + x_4 = 3$$

$$+ x_2 + \quad + x_5 = 5$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

não básica super básica

básicas: x_1, x_3, x_5 e solução inicial $x^{(0)} = (2.5, \mathbf{0}, 3.5, \mathbf{0.5}, 5)$

Factibilidade da direção de busca Δx

$$A = [B, N] \quad \Delta x = [\Delta x^{(B)}, \Delta x^{(N)}]$$

$$A\Delta x = B\Delta x^{(B)} + N\Delta x^{(N)} = 0$$

$$\Delta x^{(B)} = -B^{-1}N\Delta x^{(N)}$$

$\Delta x^{(B)}$ mantém factibilidade restrições igualdade forma padrão

Direção factível que melhora

$$\nabla f(\mathbf{x})\Delta\mathbf{x} > 0 \text{ para max } (< 0 \text{ para min})$$

$$\nabla f(\mathbf{x}) = [\nabla f(\mathbf{x})^{(B)}, \nabla f(\mathbf{x})^{(N)}]$$

eliminando as básicas para ver impacto nas não básicas

$$\begin{aligned}\nabla f(\mathbf{x})\Delta\mathbf{x} &= \nabla f(\mathbf{x})^{(B)} \Delta\mathbf{x}^{(B)} + \nabla f(\mathbf{x})^{(N)} \Delta\mathbf{x}^{(N)} \\ &= \nabla f(\mathbf{x})^{(B)}(-\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\Delta\mathbf{x}^{(N)}) + \nabla f(\mathbf{x})^{(N)} \Delta\mathbf{x}^{(N)} \\ &= \underbrace{(\nabla f(\mathbf{x})^{(N)} - \nabla f(\mathbf{x})^{(B)}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N})}_{\text{gradiente reduzido associado à B em x}} \Delta\mathbf{x}^{(N)}\end{aligned}$$

gradiente reduzido associado à B em x

$$\mathbf{r}^{(B)} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{r}^{(N)} = \nabla f(\mathbf{x})^{(N)} - \nabla f(\mathbf{x})^{(B)}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}$$

$$\Delta \mathbf{x}^{(N)} = \pm \mathbf{r}^{(N)} \quad + \text{max}, - \text{min} \quad \text{ajustado para evitar } x_j < 0$$

$$\Delta x_j = \begin{cases} \pm r_j & \text{se } \pm r_j > 0 \text{ ou } x_j > 0 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad x_j \text{ não básicas em N}$$

$$\Delta \mathbf{x}^{(B)} = -\mathbf{B}^{-1} \mathbf{N} \Delta \mathbf{x}^{(N)} \quad \text{básicas em B}$$

se $\Delta \mathbf{x} = 0 \Rightarrow \mathbf{x}$ é um ponto KKT e o algoritmo pára; senão

$$\nabla f(\mathbf{x}) \Delta \mathbf{x} = \mathbf{r}^{(N)} \Delta \mathbf{x}^{(N)} = \sum_{\Delta x_j = \pm r_j \neq 0} (r_j)(\pm r_j)$$

Passo λ na direção $\Delta \mathbf{x}$

busca unidimensional

$$\min(\max) \quad f(\mathbf{x} + \lambda \Delta \mathbf{x})$$

$$\text{sa} \quad 0 \leq \lambda \leq \lambda_{\max}$$

$$\lambda_{\max} = \min \left\{ \frac{x_j}{-\Delta x_j} : x_j < 0 \right\}$$

Algoritmo gradiente reduzido

Passo 0 **Inicialização**: escolher tolerância $\varepsilon > 0$, solução inicial $\mathbf{x}^0$ factível, construir uma base B correspondente com número de $x_j > 0$ maior possível; $t \leftarrow 0$;

Passo 1 **Direção gradiente reduzido**: determinar $\mathbf{r}$ em $\mathbf{x}^t$ e usar $\mathbf{r}$ para gerar a direção $\Delta \mathbf{x}^{t+1}$;

Passo 2 **Parada**: se $\|\Delta \mathbf{x}^{t+1}\| \leq \varepsilon$, então parar; $\mathbf{x}^t$ é ótimo local;

Passo 3 **Limite factibilidade**: calcular $\lambda_{\max}$; $\lambda_{\max} = \infty$ se $\Delta \mathbf{x}^{t+1} > 0$;

Passo 4 **Busca unidimensional**: $\min(\max) f(\mathbf{x} + \Delta \mathbf{x}^{t+1})$, $0 \leq \lambda \leq \lambda_{\max}$

Passo 5 **Nova solução**: $\mathbf{x}^{t+1} = \mathbf{x}^t + \lambda \Delta \mathbf{x}^{t+1}$;

Passo 6 **Mudança de base**: se uma básica $x_j^{t+1} = 0$, trocá-la por uma super básica j' : $t = t + 1$; ir para o Passo 1;

Exemplo

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
$\min f(\mathbf{x})$	$(x_1 - 5)^2 - 2x_1x_2 + (x_2 - 10)^2$					$\mathbf{b}$
$\mathbf{A}$	1	1	1	0	0	6
	1	0	0	1	0	3
	0	1	0	0	1	5
$t = 0$	B	N	B	N	B	
$\mathbf{x}^{(0)}$	2.5	0.0	3.5	0.5	5.0	$f(\mathbf{x}^{(0)}) = 106.25$
$\nabla f(\mathbf{x}^{(0)})$	-5.0	-25.0	0.0	0.0	0.0	
$\mathbf{r}$	0.0	-25.0	0.0	5.0	0.0	
$\Delta \mathbf{x}$	5.0	25.0	-30.0	-5.0	-25.0	$\lambda_{\max} = 0.1, \lambda = 0.1$
$t = 1$	B	N	B	N	B	
$\mathbf{x}^{(1)}$	3.0	2.5	0.5	0.0	2.5	$f(\mathbf{x}^{(1)}) = 42.25$
$\nabla f(\mathbf{x}^{(1)})$	-9.0	-21.0	0.0	0.0	0.0	
$\mathbf{r}$	0.0	-21.0	0.0	9.0	0.0	
$\Delta \mathbf{x}$	0.0	21.0	-21.0	0.0	-21.0	$\lambda_{\max} = 0.0238, \lambda = 0.0238$
$t = 2$	B	B	N	N	B	
$\mathbf{x}^{(2)}$	3.0	3.0	0.0	0.0	2.0	$f(\mathbf{x}^{(2)}) = 35.00$
$\nabla f(\mathbf{x}^{(2)})$	-10.0	-20.0	0.0	0.0	0.0	
$\mathbf{r}$	0.0	0.0	20.0	-10.0	0.0	
$\Delta \mathbf{x}$	-10.0	10.0	0.0	10.0	-10.0	$\lambda_{\max} = 0.2, \lambda = 0.125$
$t = 3$	B	B	N	N	B	
$\mathbf{x}^{(3)}$	1.75	4.25	0.0	1.25	0.75	$f(\mathbf{x}^{(3)}) = 28.75$
$\nabla f(\mathbf{x}^{(3)})$	-15.0	-15.0	0.0	0.0	0.0	
$\mathbf{r}$	0.0	0.0	15.0	0.0	0.0	
$\Delta \mathbf{x}$	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	Stop

Observação

Este material refere-se às notas de aula do curso EA 044 Planejamento e Análise de Sistemas de Produção da Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação da Unicamp. Não substitui o livro texto, as referências recomendadas e nem as aulas expositivas. Este material não pode ser reproduzido sem autorização prévia dos autores. Quando autorizado, seu uso é exclusivo para atividades de ensino e pesquisa em instituições sem fins lucrativos.