EA 044 Planejamento e Análise
de Sistemas de Produção

Programação
Não Linear Restrita

©DCA-FEEC-Unicamp

Tópicos

1-Introdução

2-Modelos convexos

3-Método dos multiplicadores de Lagrange

4-Condições de Karush-Kuhn-Tucker

©DCA-FEEC-Unicamp

1-Introdução

- Modelos de programação não linear

$$\begin{aligned} \max\ (\min) \quad & f(x) \\ \text{sa} \quad & x \in D = R^n \end{aligned}$$

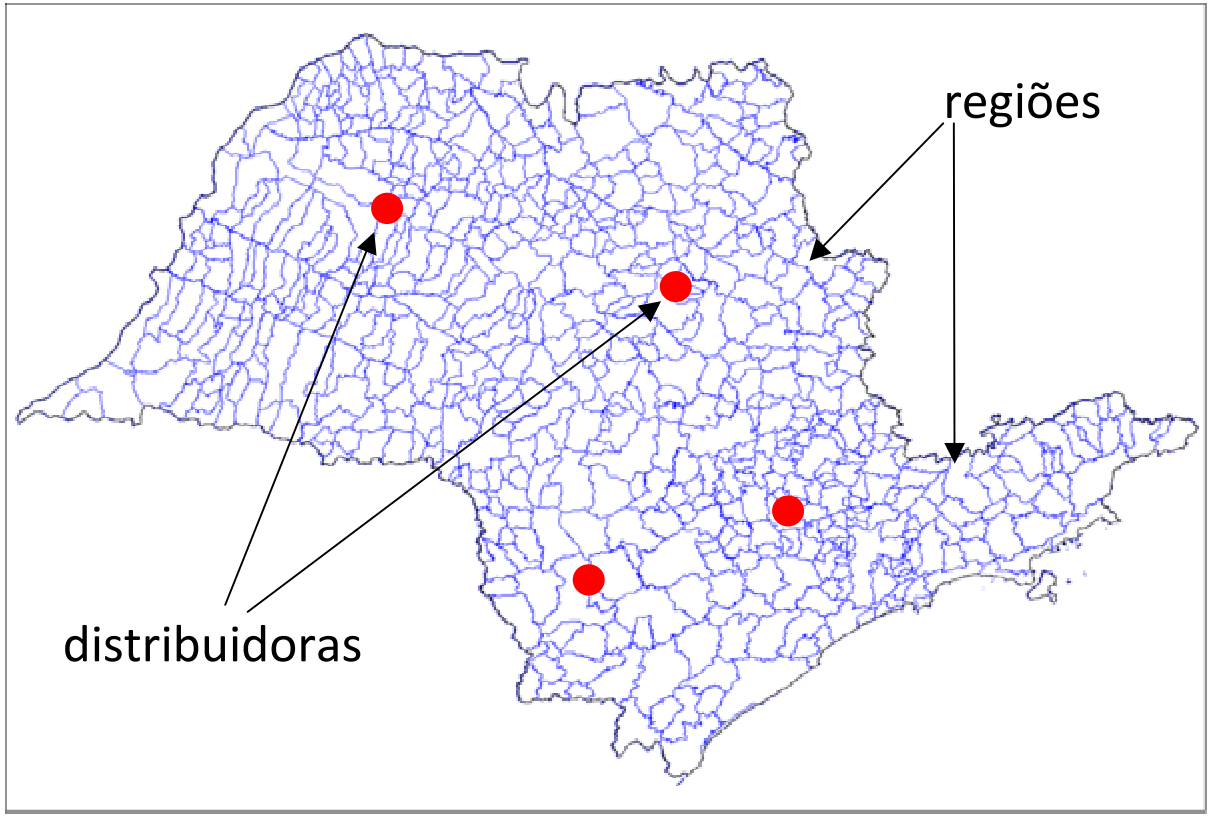
irrestritos

$$\begin{aligned} \max\ (\min) \quad & f(x) \\ \text{sa} \quad & x \in D \subset R^n \end{aligned}$$

restritos

©DCA-FEEC-Unicamp

Exemplo: localização e alocação

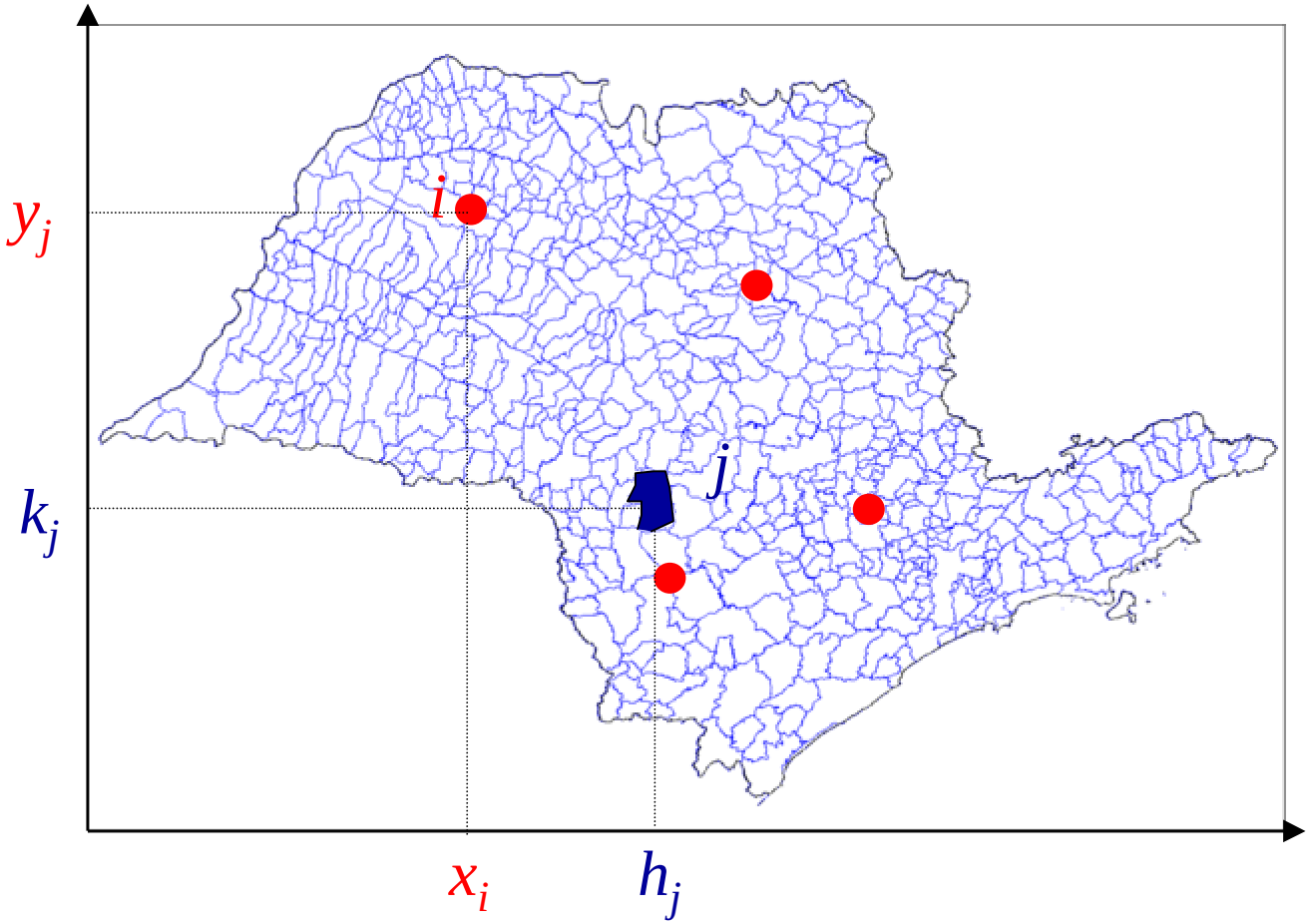


Distribuidores: 17
Regiões: 650 agrupando 24.000 clientes

©DCA-FEEC-Unicamp

i = distribuidor, i = 1,....,17

j = região, j = 1,...,650



d_j = número de viagens por ano para entregas à j-ésima região

©DCA-FEEC-Unicamp

- Ideia: minimizar custo de transporte
  - minimizar número de viagens (w_{ij}) de $i \rightarrow j$
  - minimizar distância entre i e j

$$\min \sum_{i=1}^{17} \sum_{j=1}^{650} w_{ij} \sqrt{(x_i - h_j)^2 + (y_i - h_j)^2}$$

$$\text{sa} \quad \sum_{i=1}^{17} w_{ij} = d_j, \quad j = 1, \ldots, 650$$

$$w_{ij} \geq 0, \; 1 = 1, \ldots, 17; \quad j = 1, \ldots, 650$$

modelo PNL

©DCA-FEEC-Unicamp

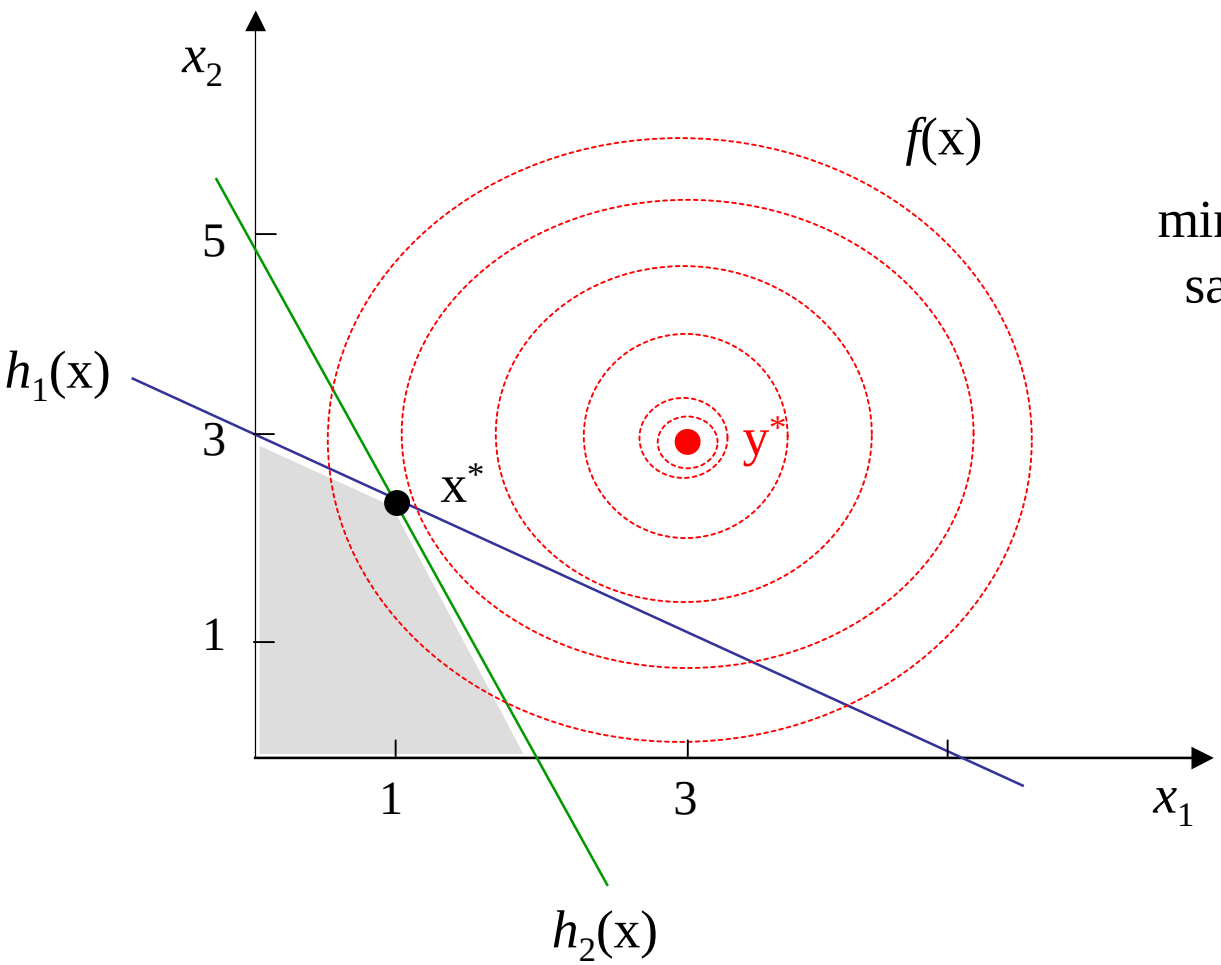
2-Modelos convexos

$$\begin{aligned} \min \quad & f(\mathrm{x}) \\ \text{sa} \quad & g_i(\mathrm{x}) \geq a_i, \;\; i = 1, \ldots, I \\ & h_j(\mathrm{x}) \leq b_j, \;\; j = 1, \ldots, J \\ & l_k(\mathrm{x}) = c_k, \;\; k = 1, \ldots, K \end{aligned}$$

$f(\mathrm{x})$ convexa, $g_i(\mathrm{x})$ côncava $\forall i$, $h_j(\mathrm{x})$ convexa $\forall j$, $l_k(\mathrm{x})$ linear $\forall k$

©DCA-FEEC-Unicamp

Exemplo



$$\min \quad (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 3)^2$$

$$\text{sa} \quad 3x_1 + 5x_2 \leq 15$$

$$5x_1 + 2x_2 \leq 10$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

©DCA-FEEC-Unicamp

$$
\begin{aligned}
\max \quad & f(\mathrm{x}) \\
\text{sa} \quad & g_i(\mathrm{x}) \geq a_i, \;\; i = 1, \ldots, I \\
& h_j(\mathrm{x}) \leq b_j, \;\; j = 1, \ldots, J \\
& l_k(\mathrm{x}) = c_k, \;\; k = 1, \ldots, K
\end{aligned}
$$

$f(\mathrm{x})$ côncava, $g_i(\mathrm{x})$ côncava $\forall i$, $h_j(\mathrm{x})$ convexa $\forall j$, $l_k(\mathrm{x})$ linear $\forall k$

©DCA-FEEC-Unicamp

Exemplo

$$\max \quad 3\, w_1 - w_2 + 8 \ln w_1$$

$$\text{sa} \quad 4\, w_1^2 - w_1\, w_2 + w_2^2 \leq 100$$

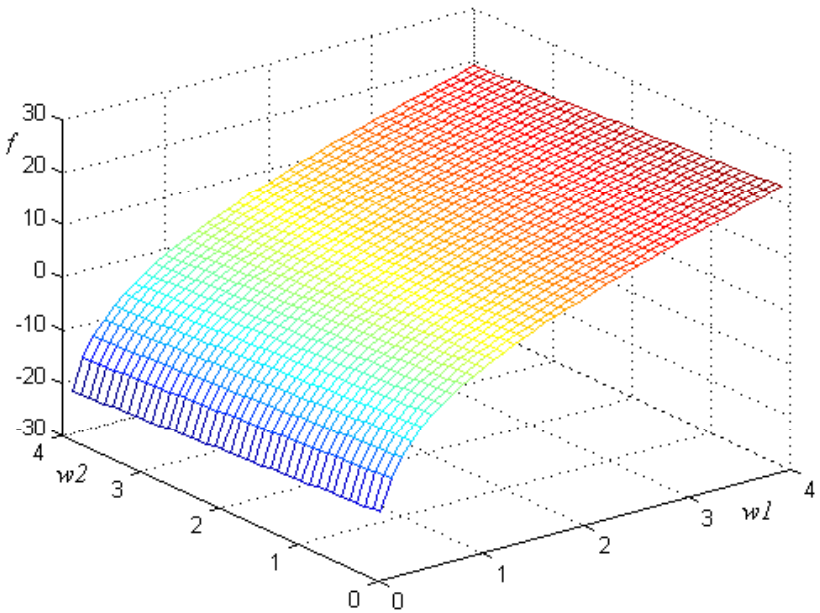
$$w_1 + w_2 = 4$$

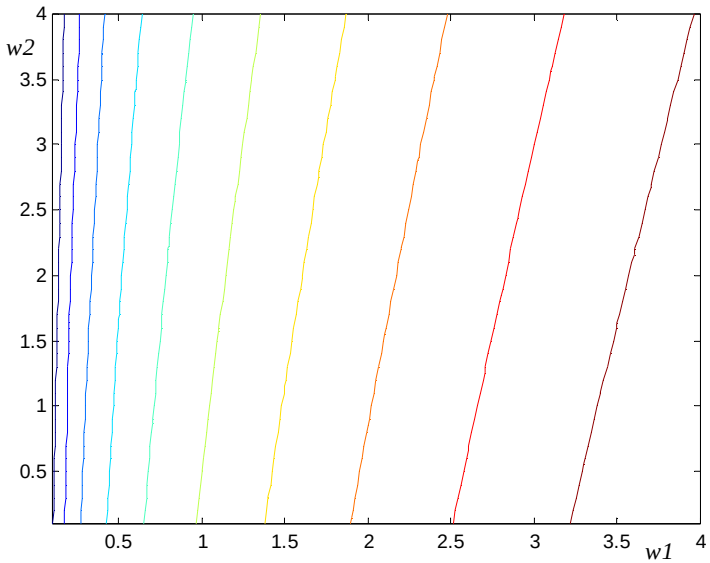
$$w_1, w_2 \geq 0$$

©DCA-FEEC-Unicamp

Função objetivo

$$f(w_1, w_2) = 3\,w_1 - w_2 + 8 \ln w_1$$

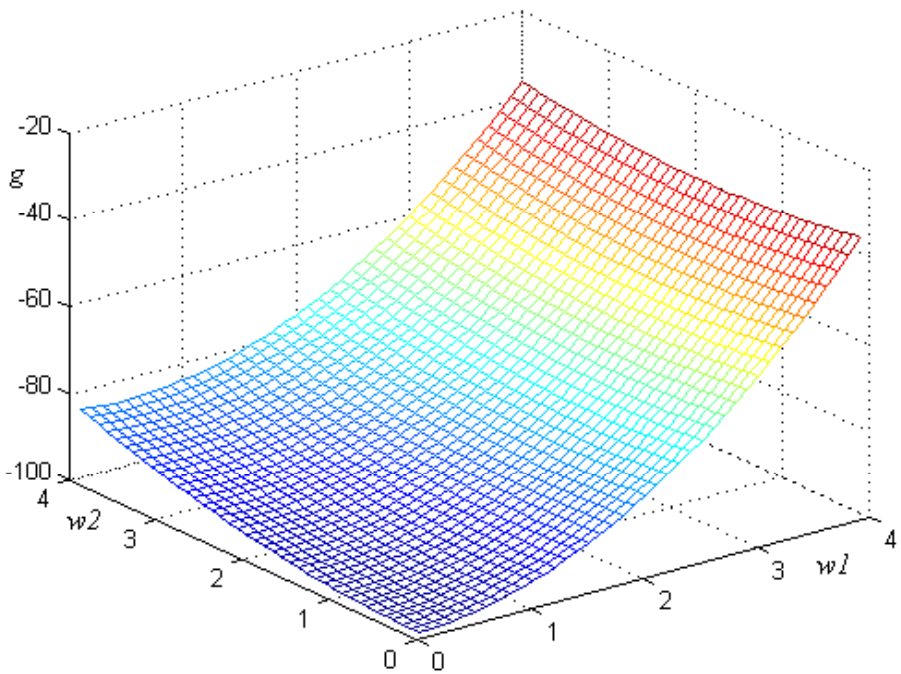


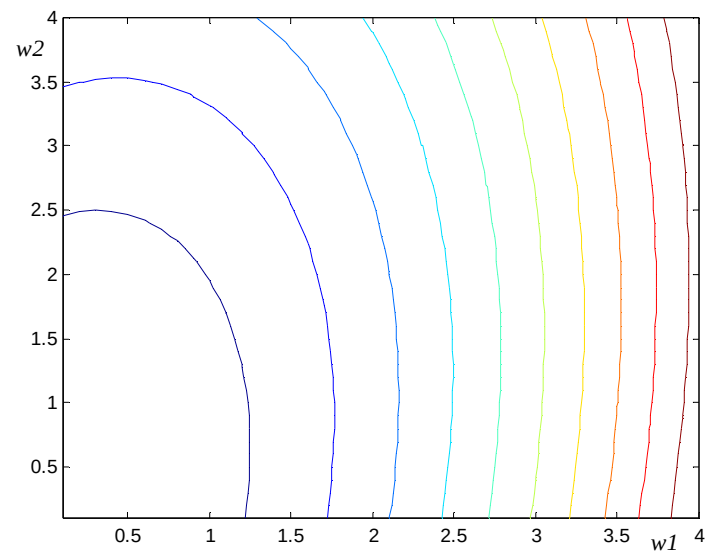


©DCA-FEEC-Unicamp

Restrições principais

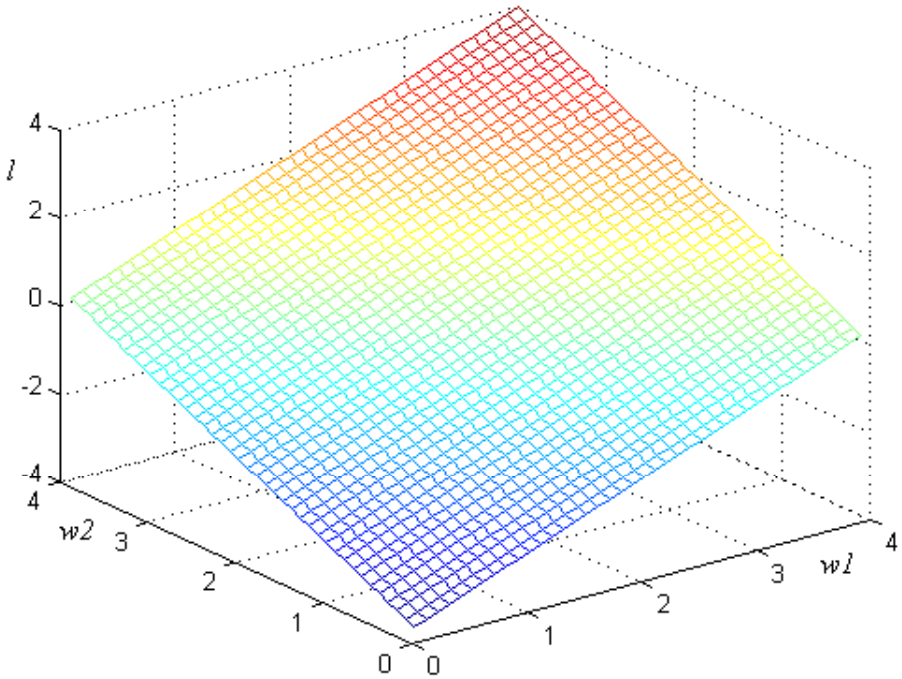
$$h(w_1, w_2) = 4\, w_1^2 - w_1\, w_2 + w_2^2 \quad \leq \quad 100$$

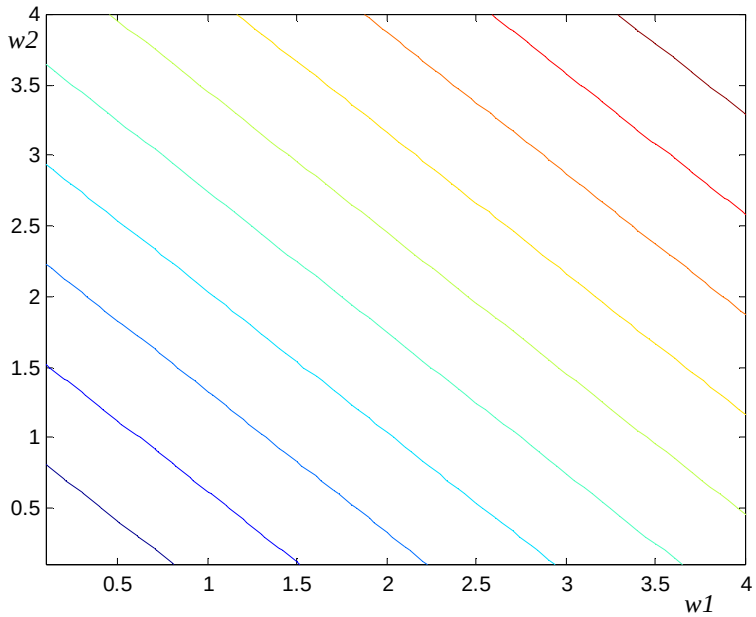




©DCA-FEEC-Unicamp

$$l(w_1, w_2) = w_1 + w_2 = 4$$





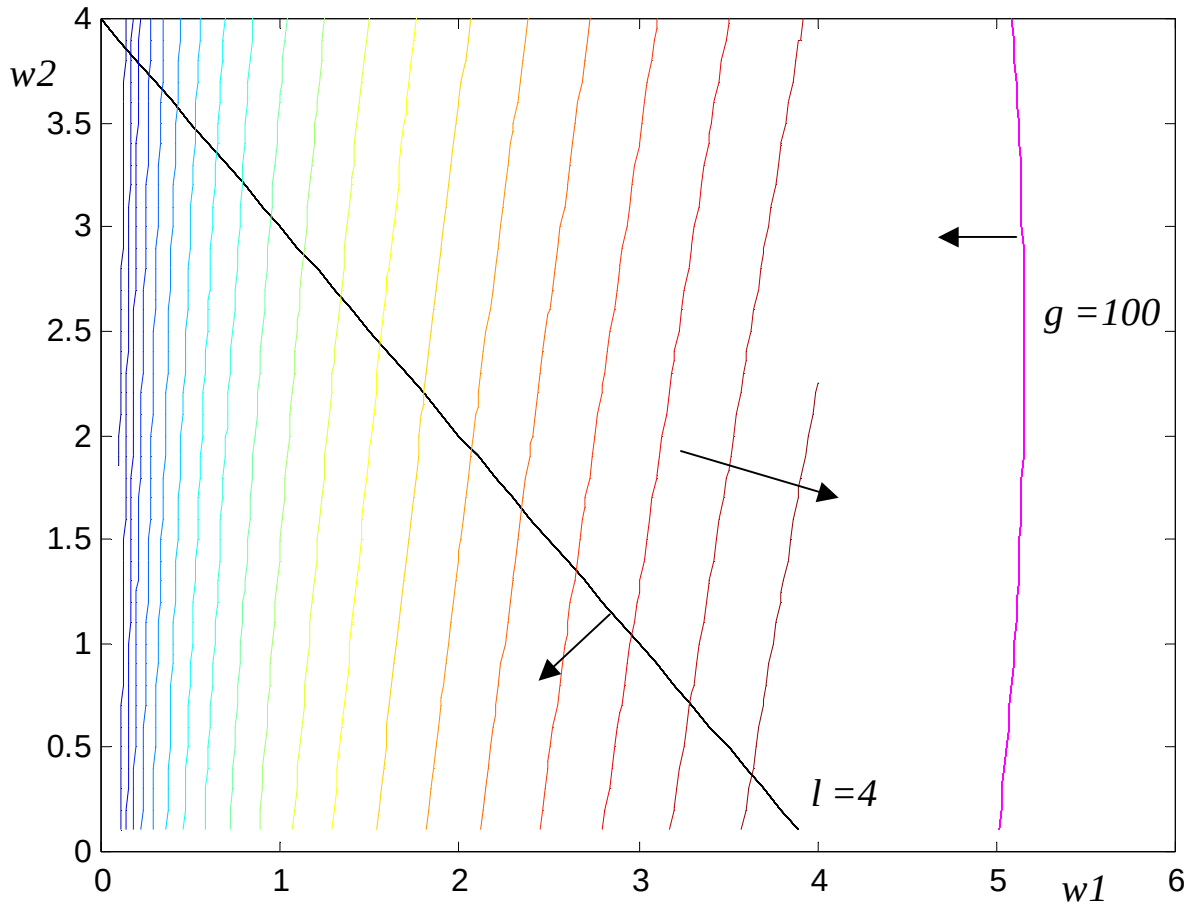
©DCA-FEEC-Unicamp

$$\max \quad 3\,w_1 - w_2 + 8 \ln w_1$$

$$\text{sa} \quad 4\,w_1^2 - w_1\,w_2 + w_2^2 \leq 100$$

$$w_1 + w_2 = 4$$

$$w_1,\, w_2 \geq 0$$



©DCA-FEEC-Unicamp

Modelos separáveis

- Função $f(x_1,\ldots,x_n)$ separável se $f(x_1,\ldots,x_n)=\sum_{j=1}^{n} f_j(x_j)$

- Modelo separável

$$
\begin{aligned}
\max \quad & f(\mathrm{x}) \\
\text{sa} \quad & g_i(\mathrm{x}) \geq a_i, \; i=1,\ldots,I \\
& h_j(\mathrm{x}) \leq b_j, \; j=1,\ldots,J \\
& l_k(\mathrm{x}) = c_k, \; k=1,\ldots,K
\end{aligned}
$$

f, g_i, h_j, l_k são funções separáveis

©DCA-FEEC-Unicamp

Propriedade de modelos convexos

Se a função objetivo do modelo é convexa e as restrições produzem um conjunto convexo factível, então toda solução ótima local é uma solução ótima global.

$g_i(\mathrm{x})$ côncava $\forall i$

$h_j(\mathrm{x})$ convexa $\forall j$ conjunto convexo

$l_k(\mathrm{x})$ linear $\forall k$

f convexa (côncava) função unimodal

©DCA-FEEC-Unicamp

3-Método dos multiplicadores de Lagrange

$$\min(\max) \quad f(\mathrm{x})$$

$$\text{sa} \qquad g_i(\mathrm{x}) = b_i$$

$$i = 1, \ldots, m$$

restrições ativas

$$L(\mathrm{x}, \nu) = f(\mathrm{x}) + \sum_{i=1}^{m} \nu_i [b_i - g_i(\mathrm{x})]$$

função Lagrangeana

v_i = multiplicador de Lagrange associado à restrição i

©DCA-FEEC-Unicamp

Pontos estacionários da função Lagrangeana

(x^*, v^*) é um ponto estacionário de $L(\mathrm{x},v)$ se $\nabla L(\mathrm{x}^*,v^*) = 0$

$$\nabla f(\mathrm{x}^*) = \sum_{i=1}^{m} \nu_i^* \nabla g_i(\mathrm{x}^*)] \rightarrow \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial g_i}{\partial x_j} v_i = \frac{\partial f}{\partial x_j}, \forall j$$

$$g_i(\mathrm{x}^*) = b_i, \forall i$$

Se (x^*, v^*) é um ponto estacionário de $L(\mathrm{x},v)$ e x^* é uma solução ótima irrestrita de $L(\mathrm{x},v)$, então x^* é uma solução ótima do modelo com restrições de igualdade correspondente.

©DCA-FEEC-Unicamp

Exemplo

$$\begin{aligned} \min \quad & 6x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 \\ \text{sa} \quad & 24x_1 + 24x_2 = 360 \\ & x_3 = 1 \end{aligned}$$

$$L(\mathrm{x}, v) = 6x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + v_1[360 - 24x_1 - 24x_2] + v_2[1 - x_3]$$

$$\nabla f(\mathrm{x}) = (12x_1, 8x_2, 2x_3)$$

$$\nabla g_1(\mathrm{x}) = (24, 24, 0)$$

$$\nabla g_2(\mathrm{x}) = (0, 0, 1)$$

©DCA-FEEC-Unicamp

$$
\begin{aligned}
24v_1 \qquad\qquad &= 12x_1 \\
24v_1 \qquad\qquad &= \ \ 8x_2 \\
1v_2 &= \ \ 2x_3 \\
24x_1 + 24x_2 &= 360 \\
1x_3 \qquad\qquad &= 1
\end{aligned}
$$

$$(x_1^*, x_2^*, x_3^*, v_1^*, v_2^*) = (6, 9, 1, 3, 2)$$

$$L(\mathrm{x}, v) = 6x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 - 72x_1 - 72x_2 - 2x_3 + 1082$$

$$\Downarrow$$

convexa

$$\Downarrow$$

$(x_1^*, x_2^*, x_3^*, v_1^*, v_2^*) = (6, 9, 1, 3, 2) \quad \Rightarrow$ mínimo de $L(\mathrm{x}, v)$

©DCA-FEEC-Unicamp

Multiplicadores de Lagrange: interpretação

v_i = variação valor ótimo f quando b_i aumenta de uma unidade

v_i = variável dual

$$v_i^* = \frac{\partial L}{\partial b_i}$$

- Limitações
  - condições de estacionariedade difíceis de resolver
  - restrições de desigualdade aumenta a complexidade
  - soluções ótimas globais somente para modelos tratáveis

©DCA-FEEC-Unicamp

4-Condições de Karush-Kuhn-Tucker

- Forma geral PNL diferenciáveis

$$
\begin{aligned}
&\min(\max) \quad f(\mathrm{x}) \\
&\text{sa} \qquad\qquad g_i(\mathrm{x}) \geq b_i, \ \forall i \in G \\
&\qquad\qquad\quad g_i(\mathrm{x}) \leq b_i, \ \forall i \in L \\
&\qquad\qquad\quad g_i(\mathrm{x}) = b_i, \ \forall i \in E
\end{aligned}
$$

f, g_i : funções diferenciáveis

G, L, E : conjuntos de índices

©DCA-FEEC-Unicamp

Condições das folgas complementares

$\nu_i[b_i - g_i(\mathrm{x})] = 0$ para todas desigualdades i

Restrições nos sinais dos multiplicadores

objetivo	i é $\leq$	i é $\geq$	i é $=$
min	$v_i \leq 0$	$v_i \geq 0$	irrestrito
max	$v_i \geq 0$	$v_i \leq 0$	irrestrito

©DCA-FEEC-Unicamp

Condições de Karush-Kuhn-Tucker

Soluções (x, v) satisfazem as condições de KKT se

1. f, g_i são funções diferenciáveis
2. condições das folgas complementares
3. restrições no sinais dos multiplicadores
4. restrições primais
5. equação dos gradientes $\sum_i \nabla g_i(\mathrm{x}) v_i = \nabla f(\mathrm{x})$

Ponto de KKT: qualquer x para o qual existe um v que satisfaça as condições de KKT

©DCA-FEEC-Unicamp

Característica da direção de busca Δx

objetivo	$\nabla f(x)\Delta x > 0$	$\nabla f(x)\Delta x < 0$
min	não melhora	melhora
max	melhora	não melhora

(14.23)

$\nabla f(x)\Delta x = 0 \Rightarrow$ necessitamos de mais informação

Factibilidade da direção de busca Δx

$$\nabla g_i(x)\Delta x \begin{cases} \geq 0 & \text{restrições} \geq \textit{ativas} \\ \leq 0 & \text{restrições} \leq \textit{ativas} \\ = 0 & \text{todas restrições} \quad = \end{cases} \tag{14.24}$$

©DCA-FEEC-Unicamp

Condições suficientes de KKT

- As condições de KKT fornecem um teste de primeira ordem para determinar a ausência de direções factíveis que melhoram o valor da função objetivo
- Isto é, x é um ponto de KKT se e somente se não existe uma direção Δx em x que satisfaz as condições de primeira ordem (14.23) e (14.24)

$$\Downarrow$$

- Condições KKT são suficientes para ótimo local: x ponto KKT $\Rightarrow$ x ótimo local
- PNL convexo $\Rightarrow$ condições de KKT são suficientes para ótimo global

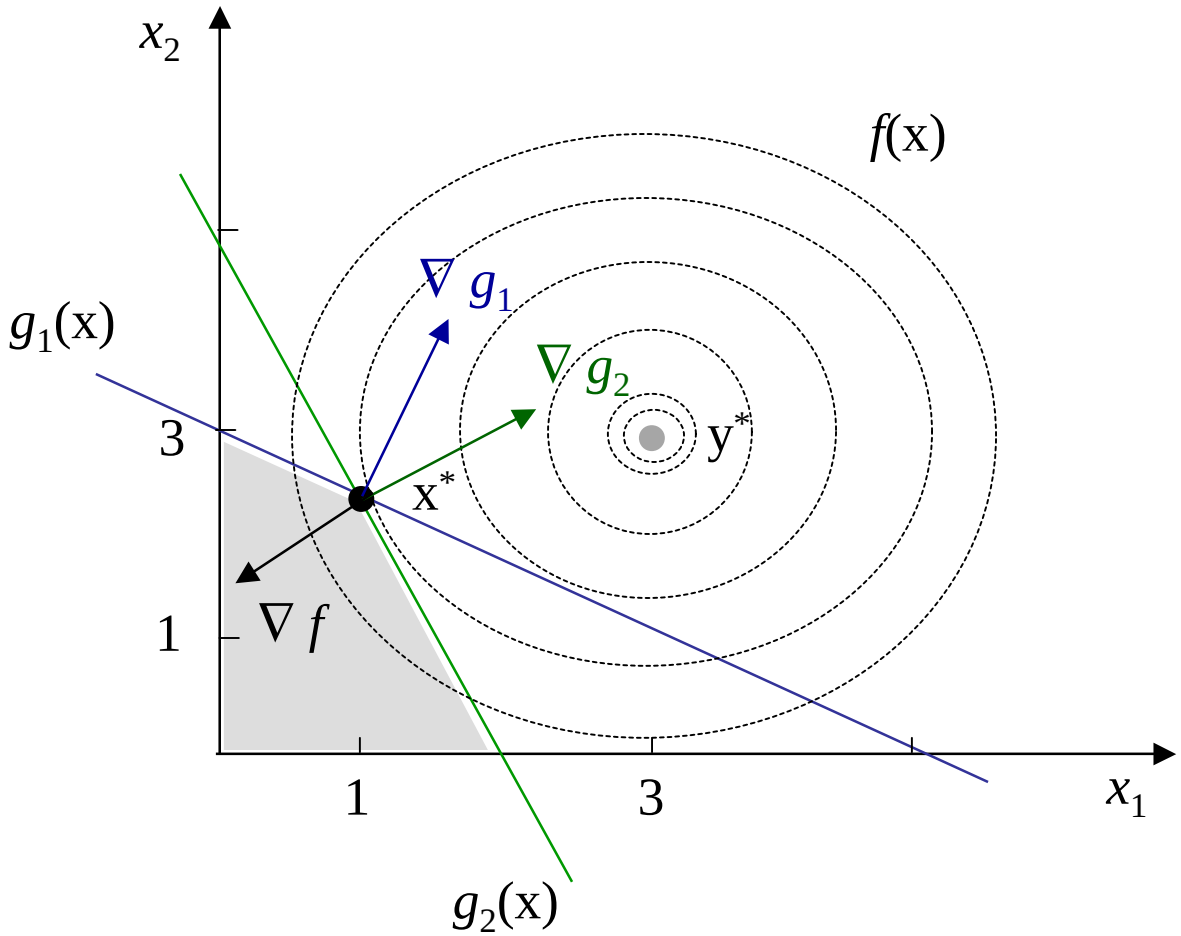
©DCA-FEEC-Unicamp

Condições necessárias de KKT

- Necessidade: se x é uma solução ótima, então x satisfaz KKT
- Solução ótima local é um ponto de KKT se
  - todas as restrições são lineares
  - os gradientes de todas as restrições ativas no ponto ótimo local são linearmente independentes (qualificação de restrição)

©DCA-FEEC-Unicamp

Exemplo



$$\min \quad (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 3)^2$$

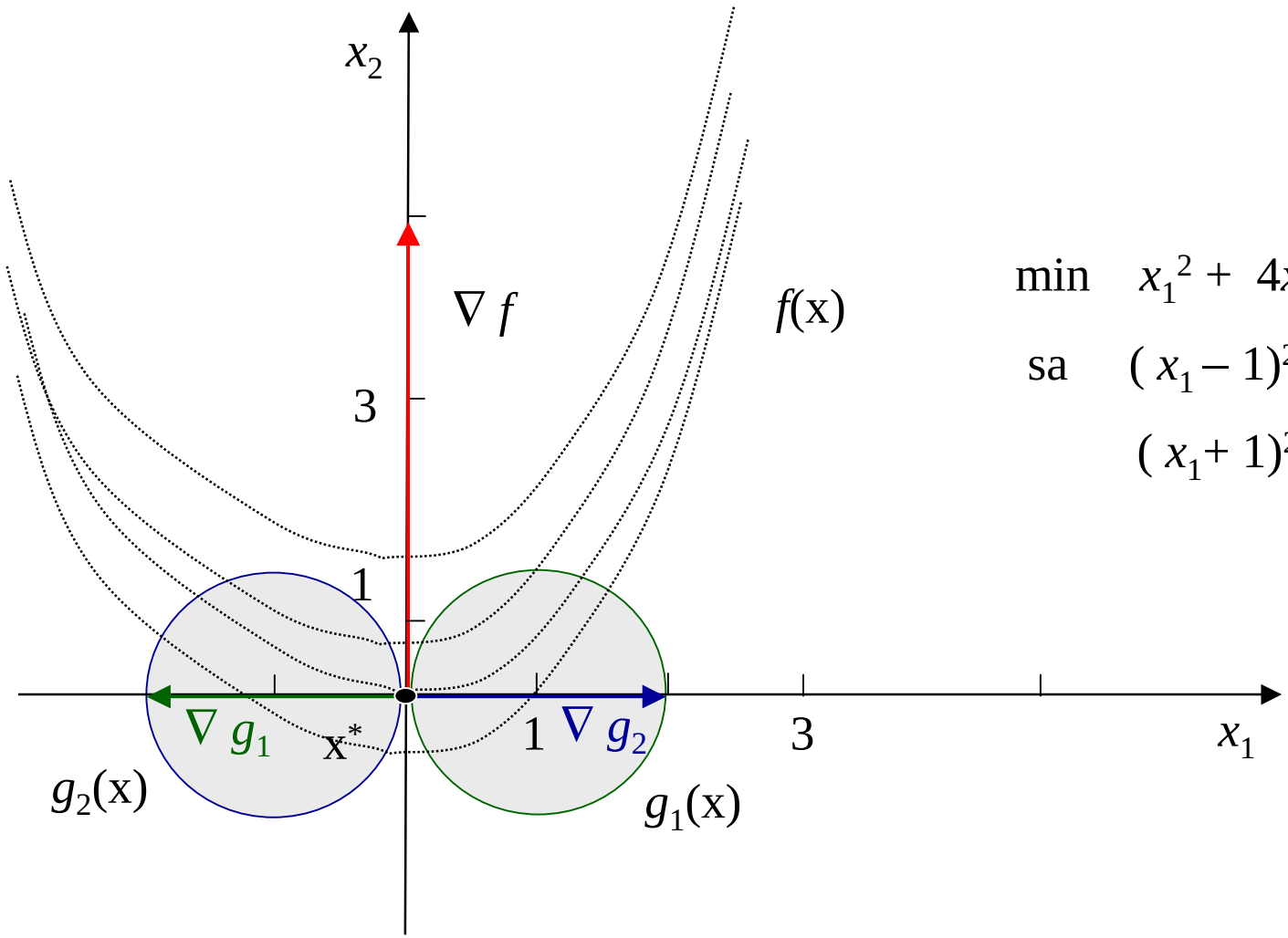
$$\text{sa} \quad 3x_1 + 5x_2 \leq 15$$

$$5x_1 + 2x_2 \leq 10$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

©DCA-FEEC-Unicamp

Exemplo



$$\min \quad x_1^2 + 4x_2$$

$$\text{sa} \quad (x_1 - 1)^2 + x_2^2 \leq 1$$

$$(x_1 + 1)^2 + x_2^2 \leq 1$$

©DCA-FEEC-Unicamp

Observação

Este material refere-se às notas de aula do curso EA 044 Planejamento e Análise de Sistemas de Produção da Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação da Unicamp. Não substitui o livro texto, as referências recomendadas e nem as aulas expositivas. Este material não pode ser reproduzido sem autorização prévia dos autores. Quando autorizado, seu uso é exclusivo para atividades de ensino e pesquisa em instituições sem fins lucrativos.

©DCA-FEEC-Unicamp