EA 044 Planejamento e Análise
de Sistemas de Produção

Modelos de Otimização e Simulação

©DCA-FEEC-Unicamp

Tópicos

1-Introdução

2-Modelos de otimização

3-Modelos de simulação

4-Busca numérica e tipos de soluções

5-Análise (parcial) de resultados

6-Modelos e simulação estocástica

©DCA-FEEC-Unicamp

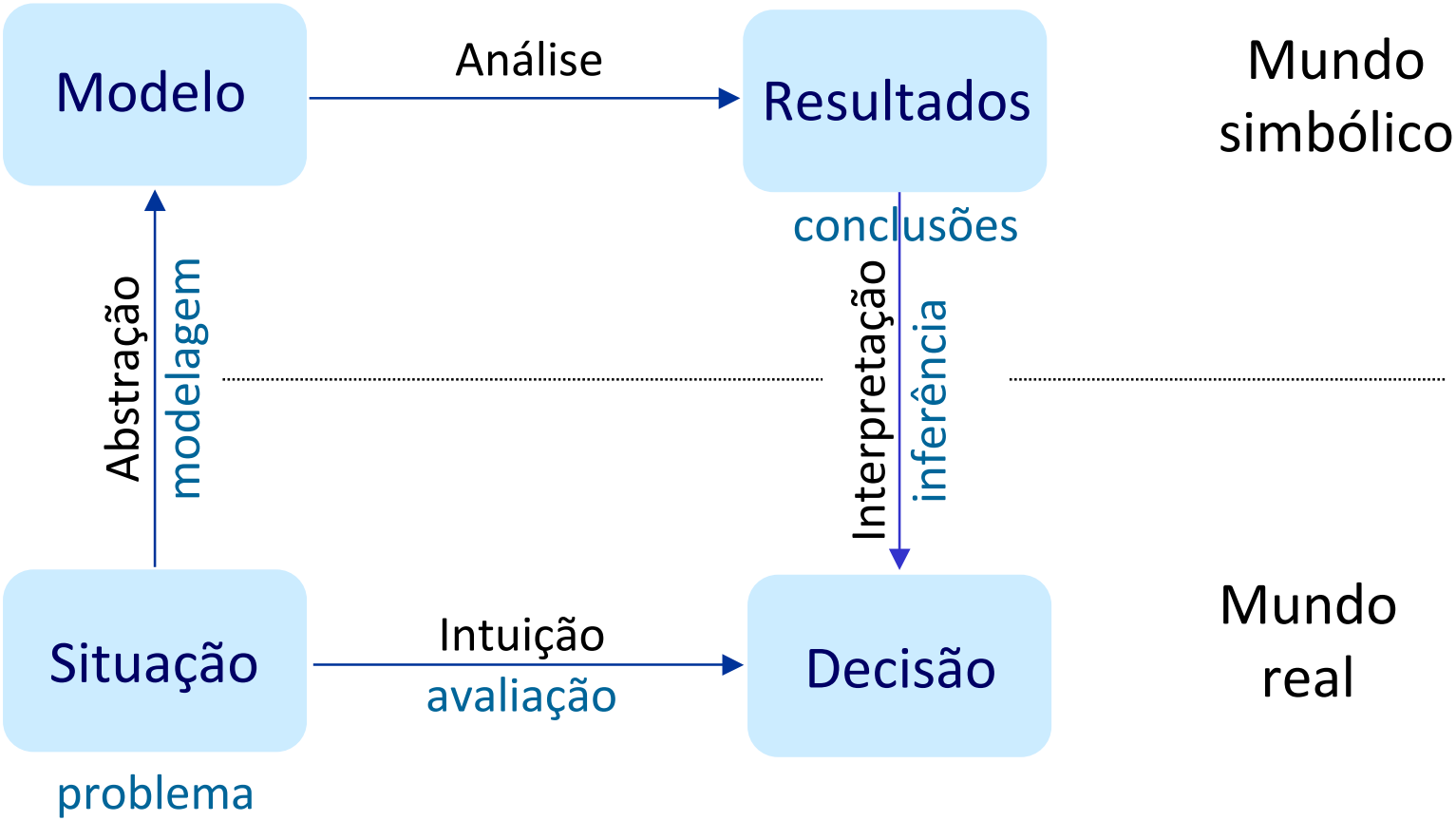
1-Introdução

- Modelos prescritivos
  - modelos que recomendam decisões/alternativas
  - modelos de otimização

- Modelos descritivos
  - modelos que avaliam decisões específicas
  - modelos de simulação

©DCA-FEEC-Unicamp

2-Modelos de otimização



©DCA-FEEC-Unicamp

- Modelo de otimização $\equiv$ modelo matemático
- Componentes do modelo matemático
  - variáveis de decisão
  - função objetivo
  - restrições:
    - principais
    - natureza da variável
- Forma de modelos de otimização

$$\begin{aligned} \max \quad & f(x) \\ \text{sa} \quad & x \in \Omega \end{aligned}$$

$$\Omega = \{g, h, q, S\}$$

©DCA-FEEC-Unicamp

Etapas de modelagem

1. Formular problema
2. Observar sistema
3. Formular modelo (matemático)
4. Verificar modelo
5. Selecionar alternativa apropriada
6. Apresentar resultados
7. Implementar e avaliar recomendações

©DCA-FEEC-Unicamp

Otimização

Em PO e programação matemática:

otimizar = resolver modelo de otimização

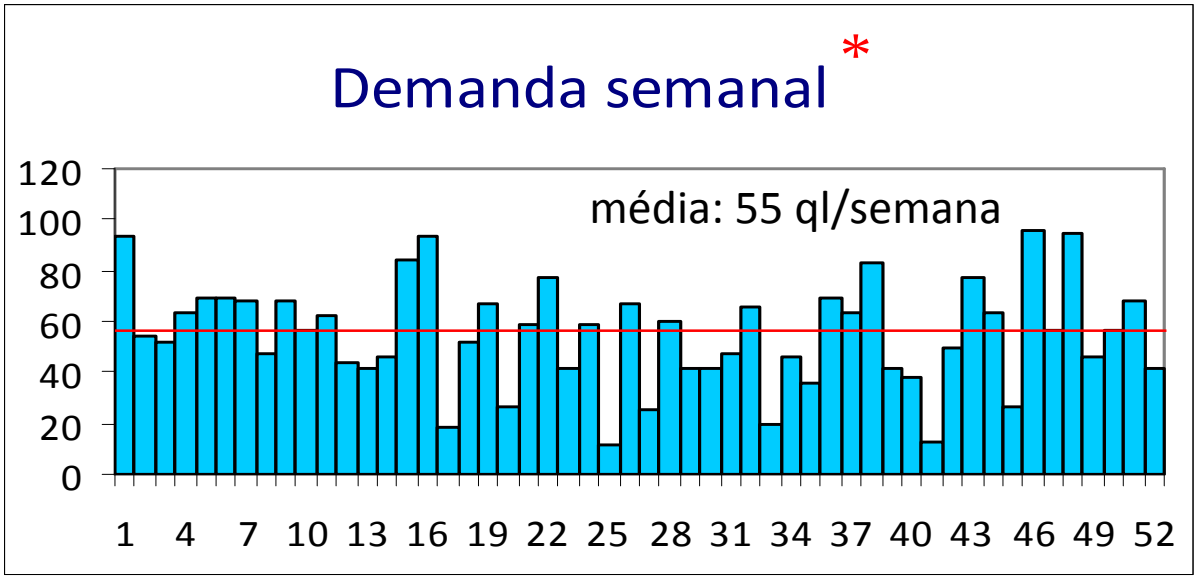
determinar valores das variáveis de decisão que satisfaçam todas as restrições e produzam o máximo (mínimo) valor da função objetivo

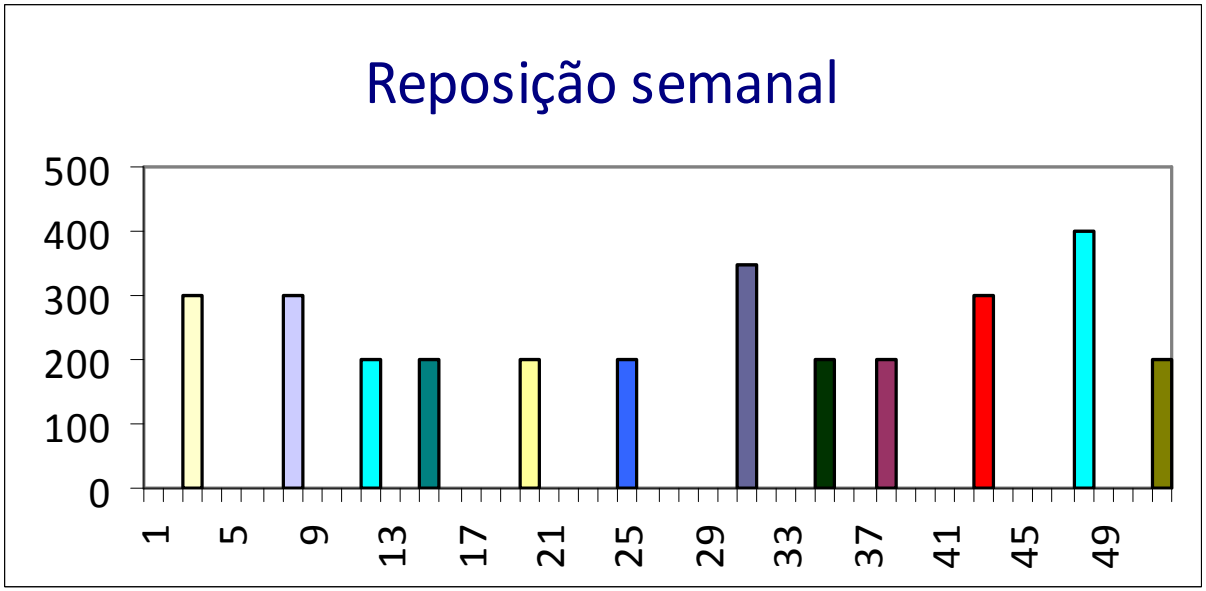
©DCA-FEEC-Unicamp

Exemplo

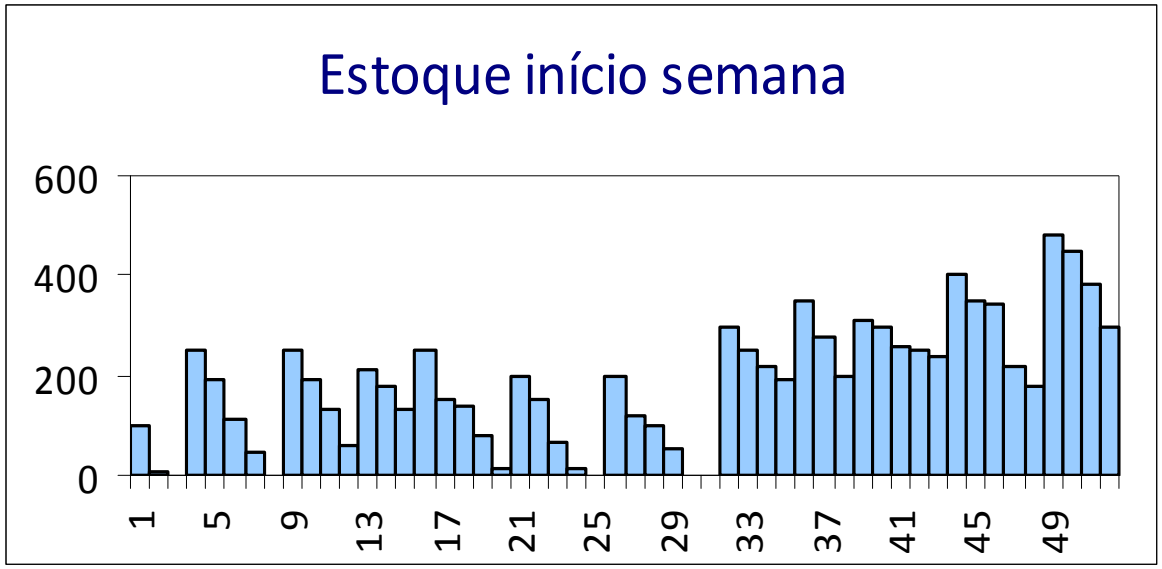
P.Drosa Ltda (PE) comercializa pedras preciosas. Para repor o estoque a empresa envia um funcionário várias vezes durante o ano a Diamantina. O preço médio das pedras no atacado é de aproximadamente $700 por quilate(ql), mas o mercado de Diamantina requer que seja adquirido no mínimo 100 quilates de pedras por viagem. As pedras são revendidas a joalheiros com um lucro de $200 por quilate. Cada viagem de compras a Diamantina requer uma semana e custa $2000. A demanda atingiu a média de 55 quilates por semana no ano passado.

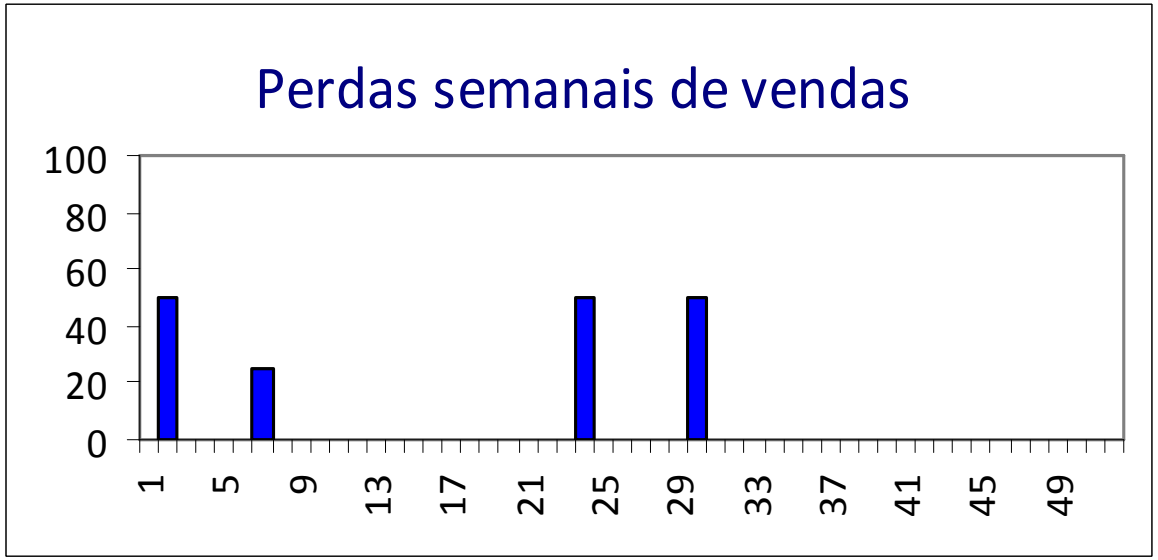
©DCA-FEEC-Unicamp





©DCA-FEEC-Unicamp





©DCA-FEEC-Unicamp

- Custo estoque (seguro + capital) = 0.5% do preço no atacado
- Custo estoque = 0.05×$700=3.50 por quilate, por semana
- Perdas de vendas (estoque vazio): $200
- Resumo estimativas de custos:
  - Custo estoque: $38.409
  - Perda vendas: $31.600
  - Reposição: $24.000
- Questão: é possível melhorar o desempenho anual?

©DCA-FEEC-Unicamp

Modelo (determinístico) de otimização

- Variáveis de decisão

  q : quantidade de reposição

  r : nível de reposição

- Restrições

  $q \geq 100$

  $r \geq 0$

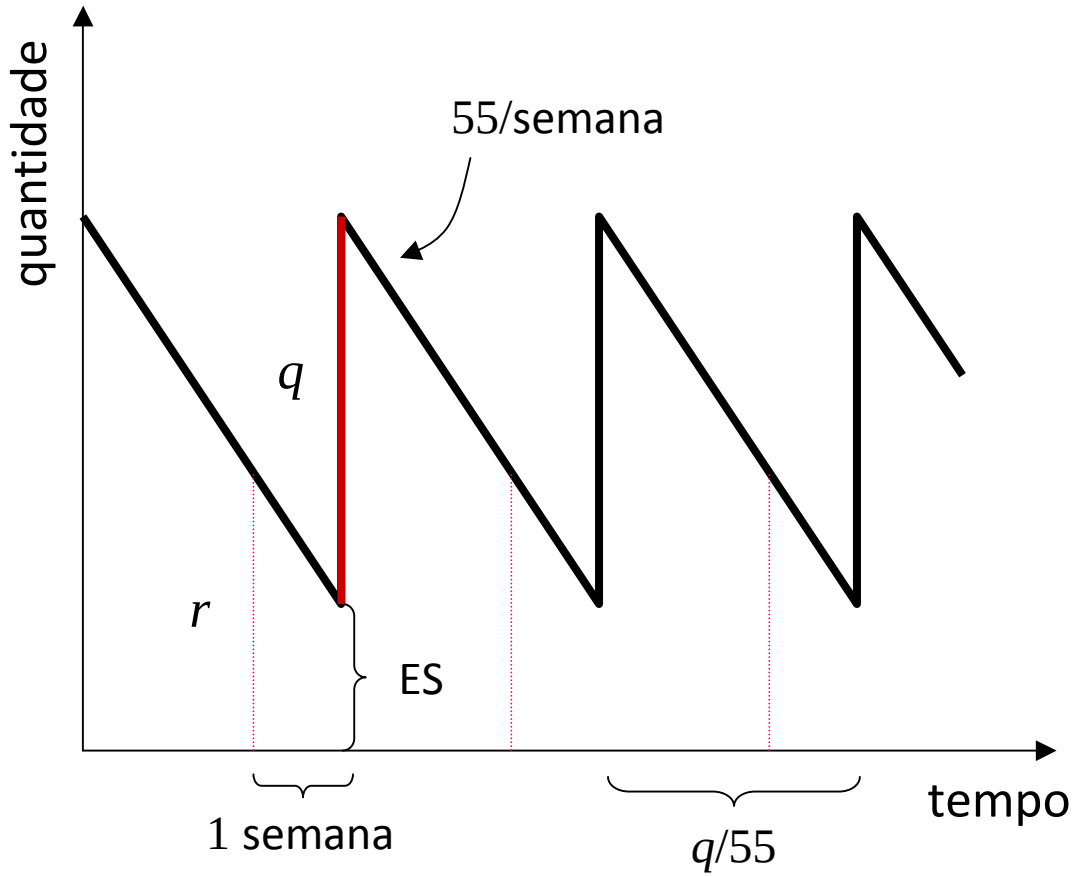
- Função objetivo

  $c(q,r)$: custo total (estoque+reposição+perdas)

- Ideia: minimizar custo total

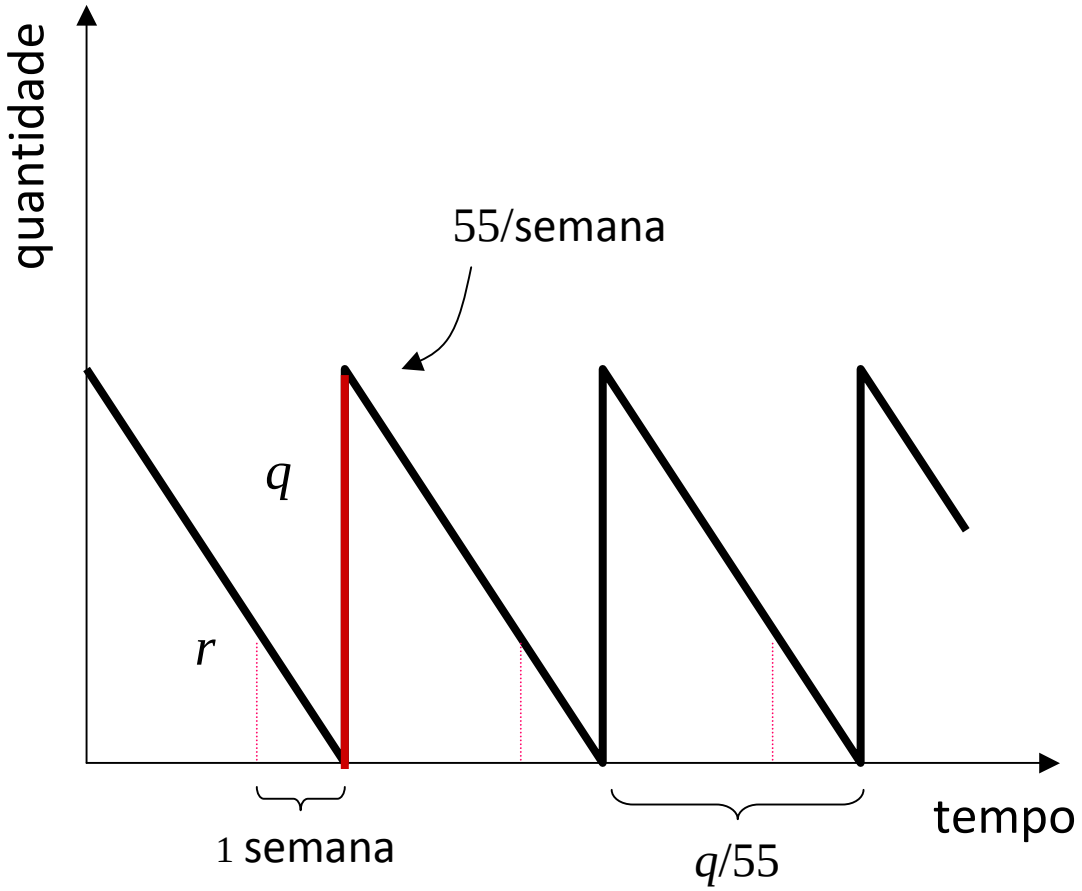
©DCA-FEEC-Unicamp

- hipótese: demanda constante = 55 quilates/semana



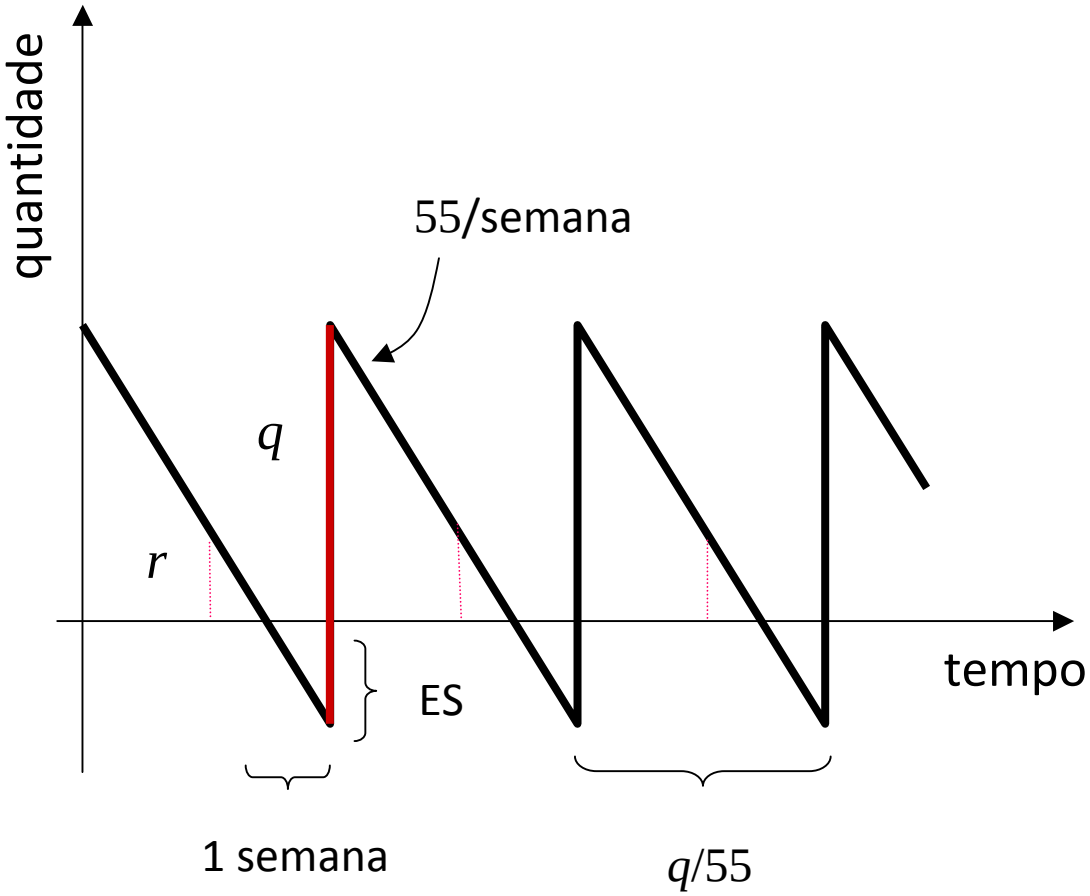
Estoque segurança (ES) $\neq 0$

©DCA-FEEC-Unicamp



Estoque segurança (ES) = 0

©DCA-FEEC-Unicamp



ES < 0 = perdas

©DCA-FEEC-Unicamp

Análise e modelagem

- Hipótese: não há perdas de vendas
  - custo perdas/custo estoque = 200/3.5 = 57.1 semanas
- Se $r \leq 55$ perdas de $(55 - r)$ em cada ciclo
- Se $r \geq 55$ $(r - 55)$ é o estoque de segurança
- Estoque varia entre $(r - 55)$ e $(r - 55) + q$
- Custo de estocagem por semana: \$3.50
- Custo de reposição: \$ 2000 por vez

$r \geq 0$

$r \geq 55$ para evitar perdas

Ciclo = $q/55$

Média = $(r - 55) + q/2$

Total = $3.50\ [\ (r - 55) + q/2)\ ]$

Total = $2000\ /\ (q/55)$

©DCA-FEEC-Unicamp

Modelo (determinístico)de otimização

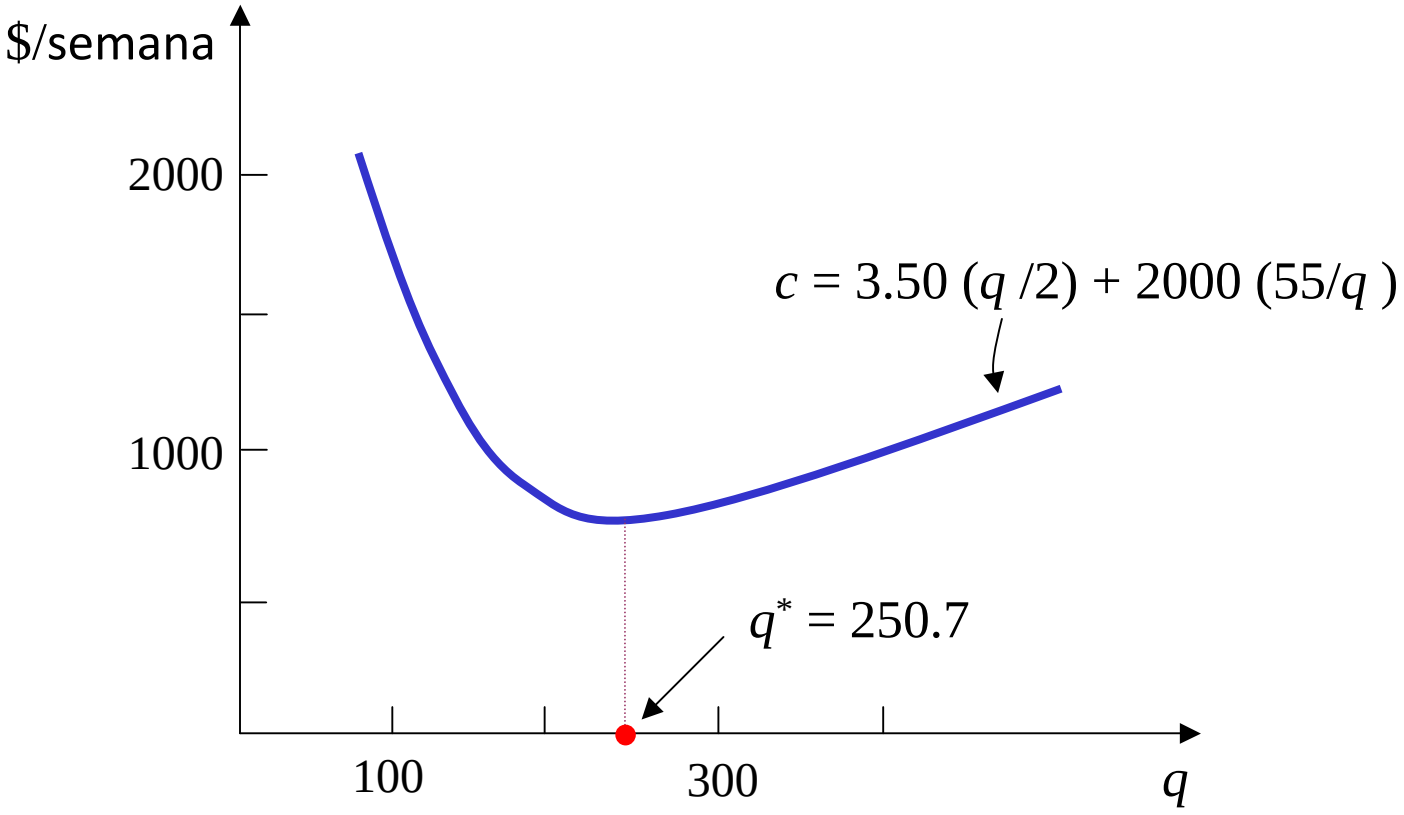
$$\min \; c = 3.50 \, [\, (r - 55) + q/2 \,] + 2000 \, / \, (q/55)$$

$$\text{sa} \quad q \geq 100$$

$$r \geq 55$$

Objetivo é determinar quando e quanto repor para que os custos de estoque, de reposição e as perdas sejam mínimos. Isto é, minimizar custo total.

©DCA-FEEC-Unicamp



$r^* = 55$

$c = 3.50\,(q/2) + 2000\,(55/q)$

$\partial c/\partial q = 0$

$q^* = \pm\sqrt{[\,2\,(2000)\,(55)\,]}/\,3.50 \approx 250.7$

$c = \$\ 45.630$

solução ótima

©DCA-FEEC-Unicamp

Controle de estoque com demanda constante

$$q^* = \sqrt{\frac{2fd}{h}}$$ reposição

$$r^* = ld$$ nível de reposição

$$q^* \geq m, q^* \geq ld$$

parâmetros do modelo

f : custo (fixo) de reposição

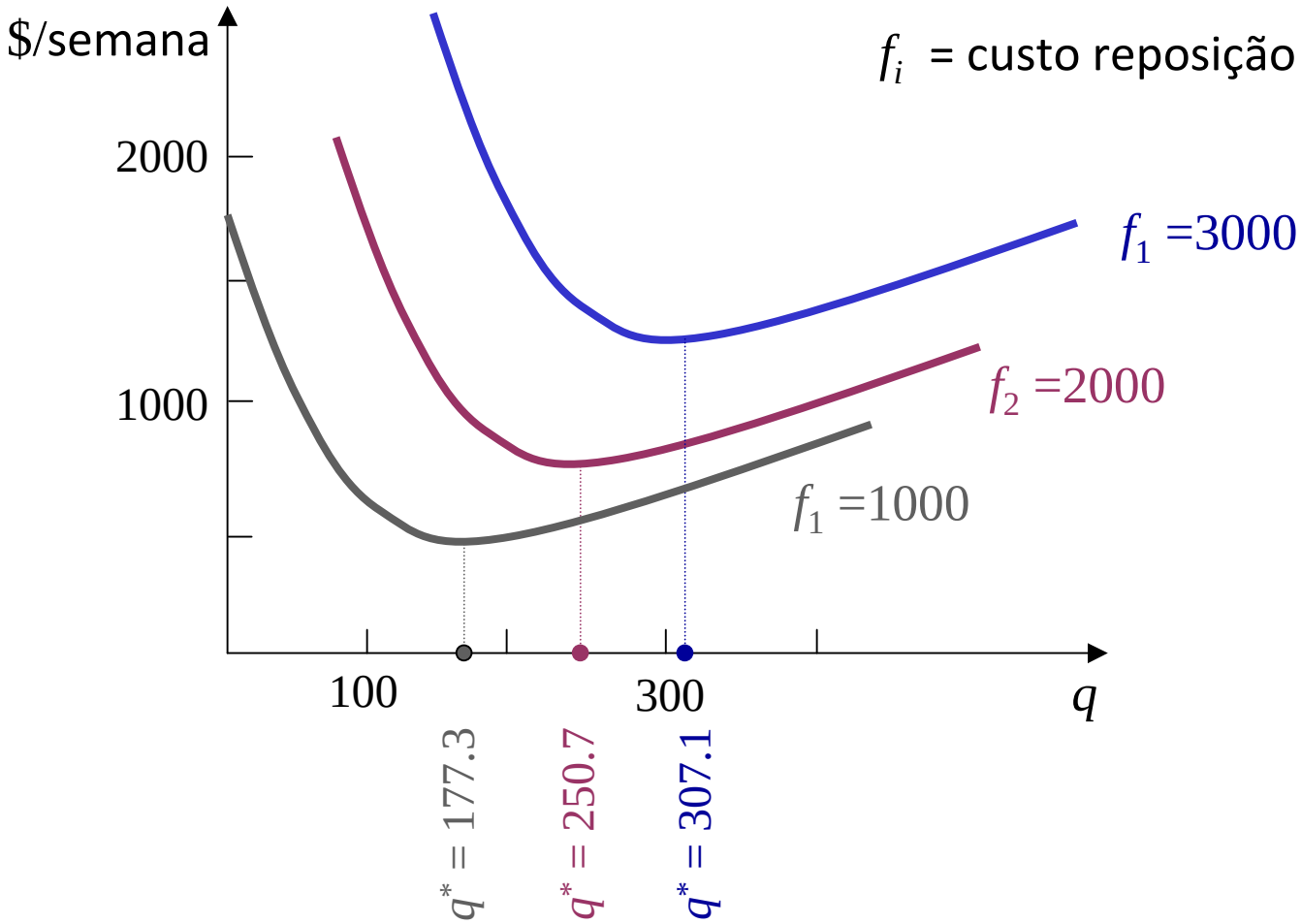
d : demanda por unidade de tempo

h : custo do estoque por unidade de demanda e tempo

l : período de tempo para reposição (*lead time*)

©DCA-FEEC-Unicamp

Análise de sensibilidade



©DCA-FEEC-Unicamp

- Análise de sensibilidade

  uma exploração de resultados de modelos matemáticos para avaliar como eles dependem dos valores escolhidos para os parâmetros

- Tratabilidade

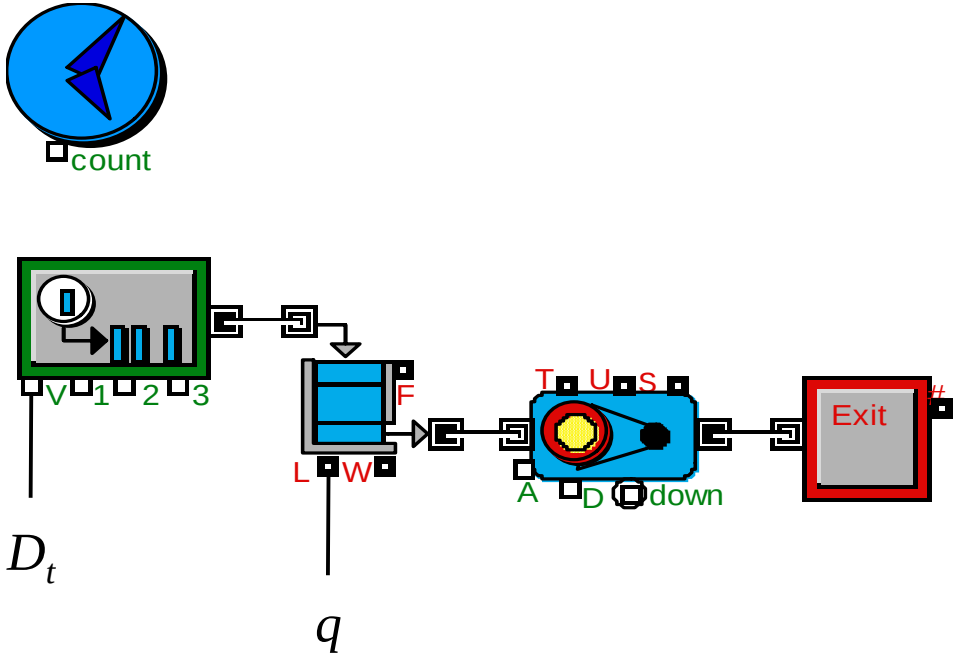
  em modelagem significa o grau com que o modelo admite uma análise conveniente, o quanto a análise é prática

- Validade

  de um modelo é o grau em que inferências derivadas do modelo são consistentes com o sistema/situação real

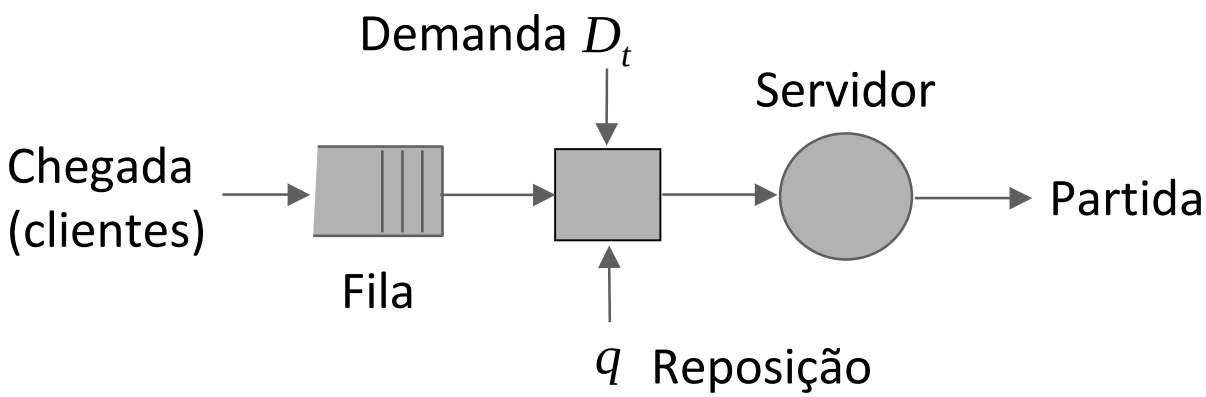
©DCA-FEEC-Unicamp

3-Modelos de simulação



©DCA-FEEC-Unicamp

Exemplo: simulação determinística



inicio

para t = 0,....,T

se qtde reposição q chegar então atualizar estoque

verificar se nível reposição r foi atingido e iniciar viagem

reduzir estoque de acordo com demanda

fim

©DCA-FEEC-Unicamp

Semana	Estoque	Demanda	Ação	Custo	Custo	Perdas
t	(início de t)		simulada	estocagem	reposição	$
1	100	94	vender 94	185.5	0	0
2	6	54	menor que 55, repor, vender 6	1.2	2.000	9.600
3	0	52	q=251 reposto, vender 52	787.5	0	0
4	199	64	vender 64	584.5	0	0
5	135	69	vender 69	353.5	0	0
6	66	69	vender 66	110.5	0	600
7	0	68	menor que 55, repor, vender 0	0	2000	13.600
8	0	47	q=251 reposto, vender 47	798.0	0	0
9	204	68	vender 68	595	0	0
10	136	56	vender 56	378	0	0
11	80	62	vender 62	171.5	0	0
12	18	44	menor que 55, repor, vender 18	12.9	2000	5.200
13	0	41	q=251 reposto, vender 41	808.5	0	0
14	210	46	vender 46	654.5	0	0
15	164	84	vender 84	427.0	0	0
16	80	94	vender 80	119.1	0	2.800
17	0	18	menor que 55, repor, vender 0	0	2.000	3.600
18	0	52	q=251 reposto, vender 52	787.5	0	0
19	199	67	vender 67	581.0	0	0
20	132	26	vender 26	416.5	0	0
21	106	59	vender 59	269.5	0	0
22	47	77	menor que 55, repor, vender 47	50.2	2.000	6.000
23	0	42	q=251 reposto, vender 42	805.0	0	0
24	209	59	vender 59	630	0	0
25	150	11	vender 11	507.5	0	0
26	139	67	vender 67	371.0	0	0
27	72	25	vender 25	210.0	0	0
28	47	60	menor que 55, repor, vender 47	64.4	2.000	0
29	0	41	q=251 reposto, vender 41	808.5	0	0
30	210	42	vender 42	661.6	0	0
31	168	47	vender 47	507.5	0	0
32	121	66	vender 66	308.0	0	0
33	55	20	igual a 55, repor, vender 20	157.5	2.000	0
34	35	46	q=251 reposto, vender 46	920.5	0	0
35	240	36	vender 36	777.0	0	0
36	204	69	vender 69	595.0	0	0
37	135	64	vender 64	360.5	0	0
38	71	83	vender 71	106.3	0	0
39	0	42	menor que 55, repor, vender 0	0.0	2.000	8.400
40	0	38	q=251 reposto, vender 38	812.0	0	0
41	213	13	vender 13	724.5	0	0
42	200	50	vender 50	612.5	0	0
43	150	77	vender 77	392.0	0	0
44	73	64	vender 64	143.5	0	0
45	9	27	menor que 55, repor, vender 9	5.2	2.000	3.600
46	0	96	q=251 reposto, vender 96	710.5	0	0
47	155	57	vender 57	444.5	0	0
48	98	95	vender 95	178.5	0	0
49	3	46	menor que 55, repor, vender 3	0.3	2.000	8.600
50	0	56	q=251 reposto, vender 56	780.5	0	0
51	195	68	vender 68	563.5	0	0
52	127	42	vender 42	371.0	0	0

Simulação determinística

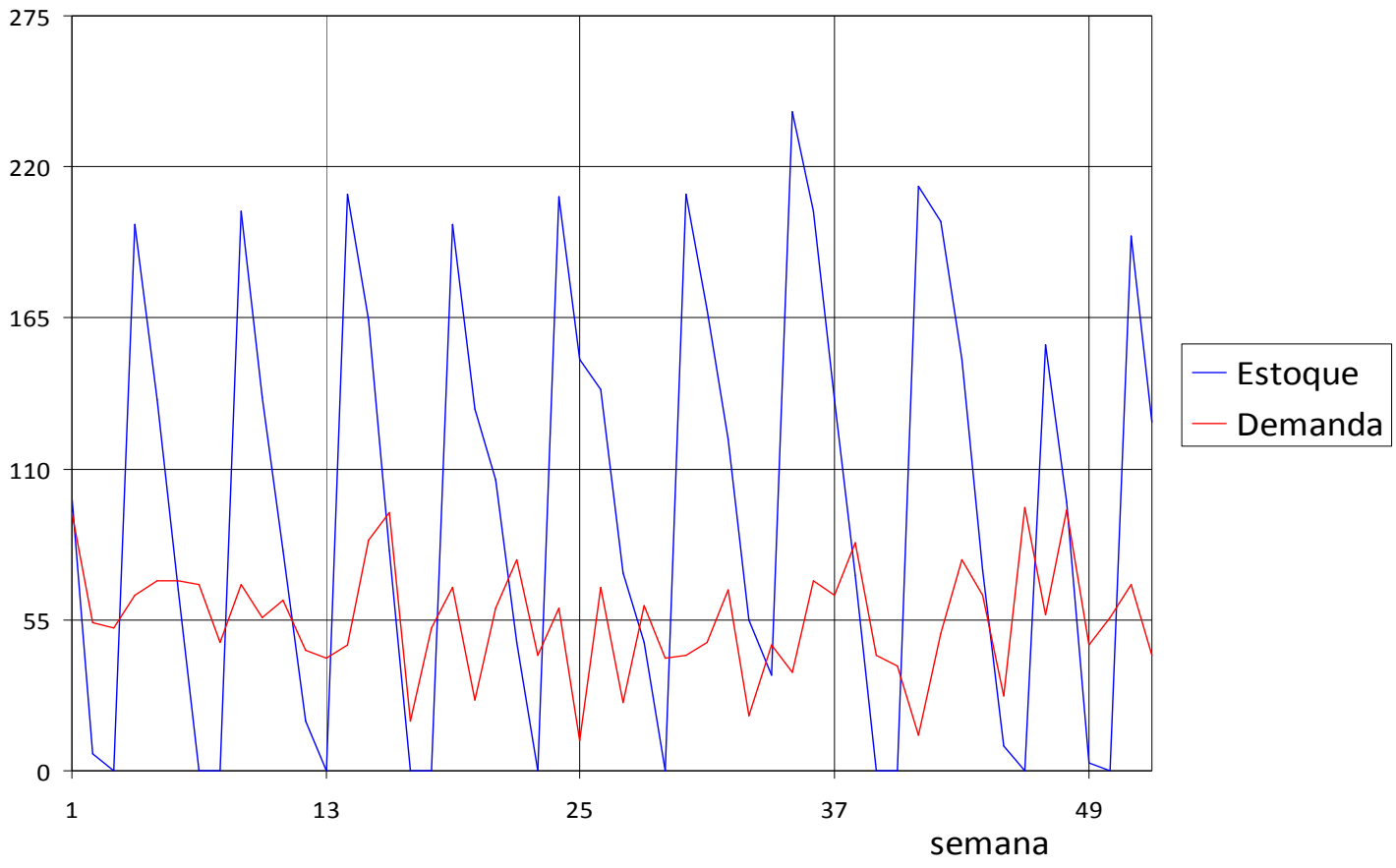
demanda semanal *

r = 55 e q = 251

custo: $108.621

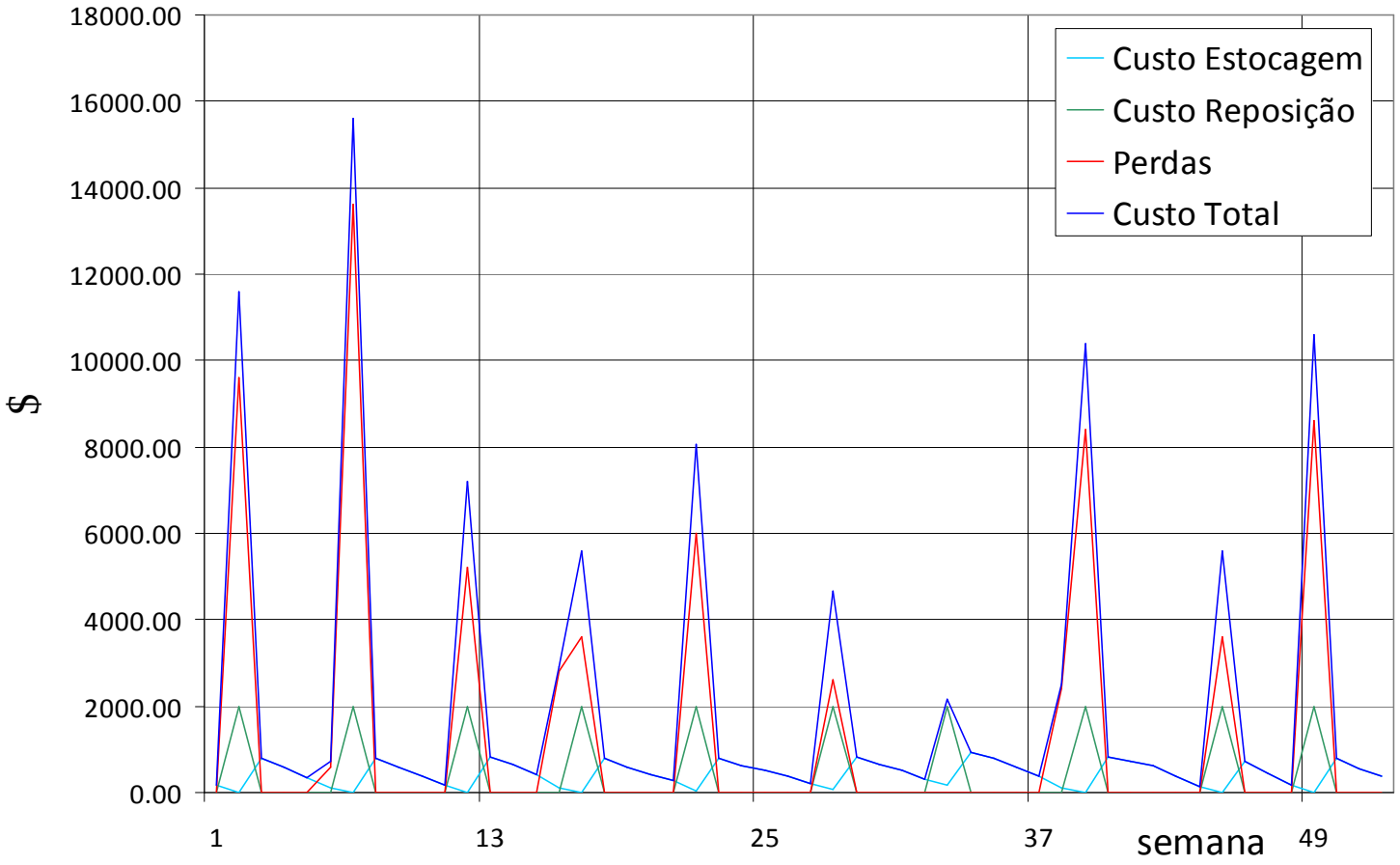
©DCA-FEEC-Unicamp

Dados simulação



©DCA-FEEC-Unicamp

Resultado de simulação



©DCA-FEEC-Unicamp

4-Busca numérica e tipos de soluções

- Solução ótima exata

  solução ótima de um modelo de otimização

- Heurística (aproximada)

  solução factível derivada de análise prescritiva, mas sem a garantia de ser a ótima exata.

©DCA-FEEC-Unicamp

Otimização heurística $\times$ exata

Passo	q	r	custo
0	251	55	108,621
1	251	65	108,421
2	251	75	63,254
3	251	85	63,054
4	251	95	64,242
5	261	85	95,193

©DCA-FEEC-Unicamp

Passo	q	r	custo
0	251	145	56,904
1	251	155	59,539
2	251	135	56,900
3	251	125	59,732
4	261	135	54,193
5	271	135	58,467

©DCA-FEEC-Unicamp

5- Análise (parcial) de resultados

Controle de estoque com demanda constante

Custo estimado:	$94.009
Custo modelo de otimização:	$45.630
Custo modelo de simulação:	$108.621
Custo solução heurística 1:	$63.054
Custo solução heurística 2:	$54.193

©DCA-FEEC-Unicamp

6- Modelos e simulação estocástica

- Modelos determinísticos

  parâmetros do modelos são precisos, exatos.

- Modelos estocásticos

  parâmetros do modelo são densidades de probabilidade.

- Variável aleatória

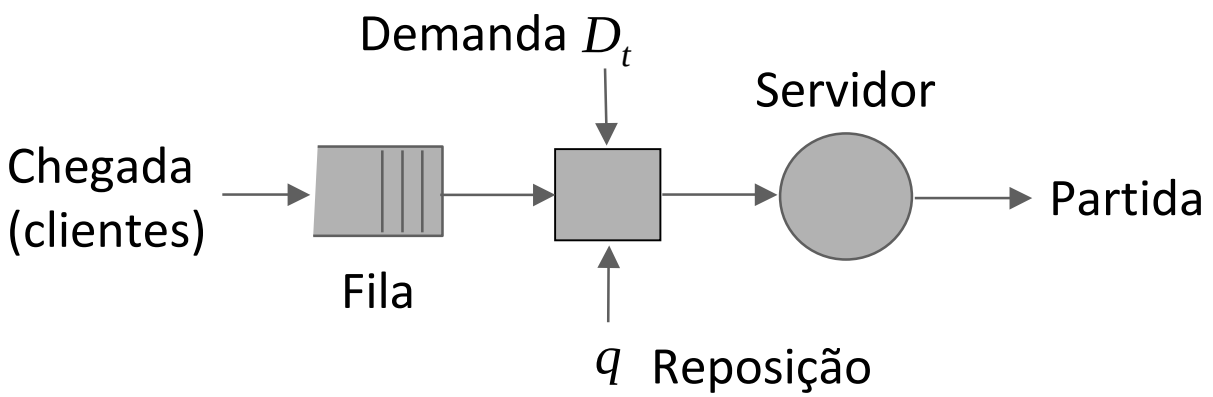
  grandeza que assume diferente valores, cada um deles associado a uma probabilidade

- Realização

  ocorrência (valor) particular de uma variável aleatória

©DCA-FEEC-Unicamp

Simulação estocástica (Monte Carlo)



inicio

para t = 0,....,T

se qtde reposição q chegar então atualizar estoque

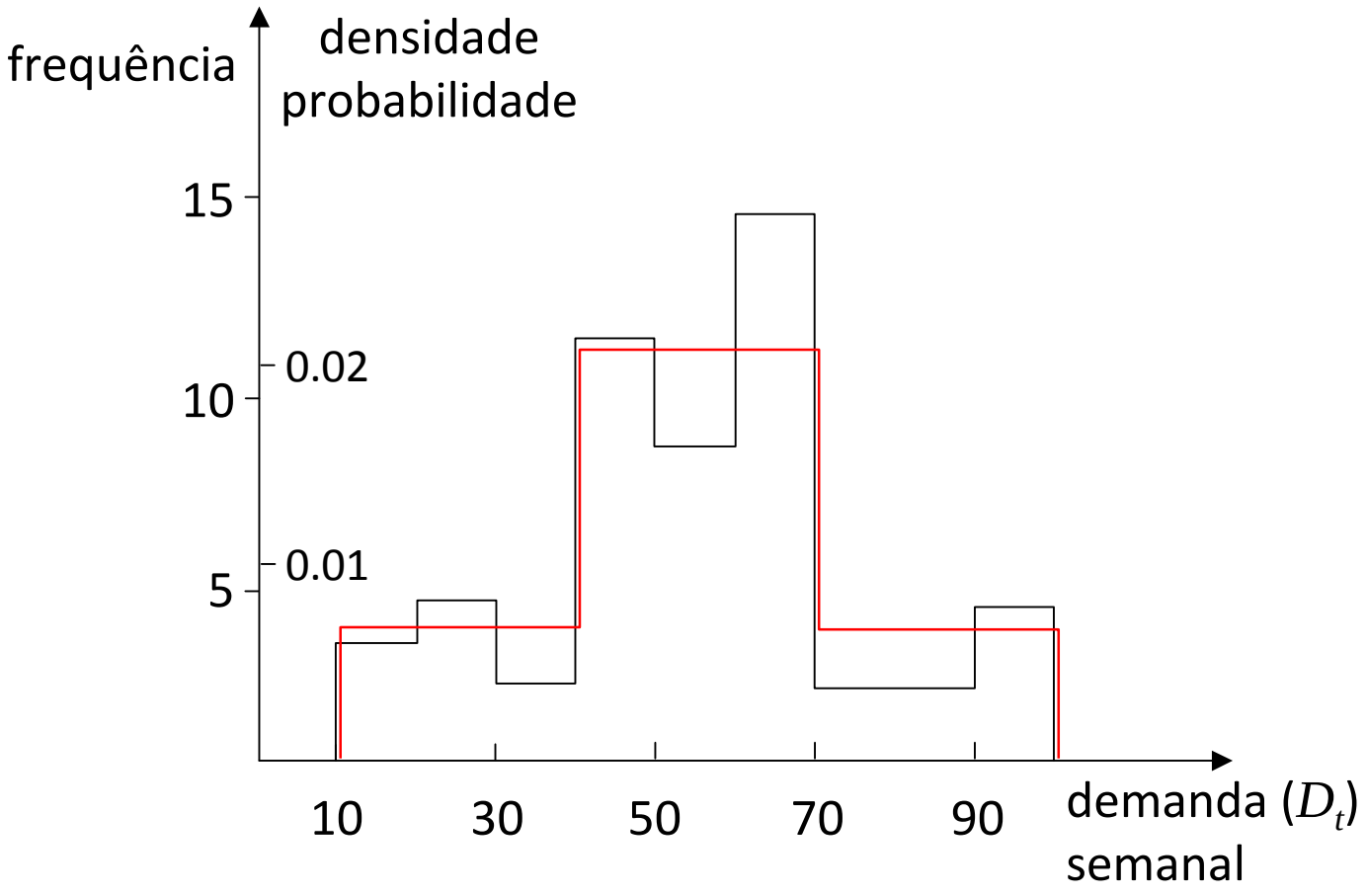
verificar se nível reposição r foi atingido e iniciar viagem

reduzir estoque de acordo com demanda D_t

fim

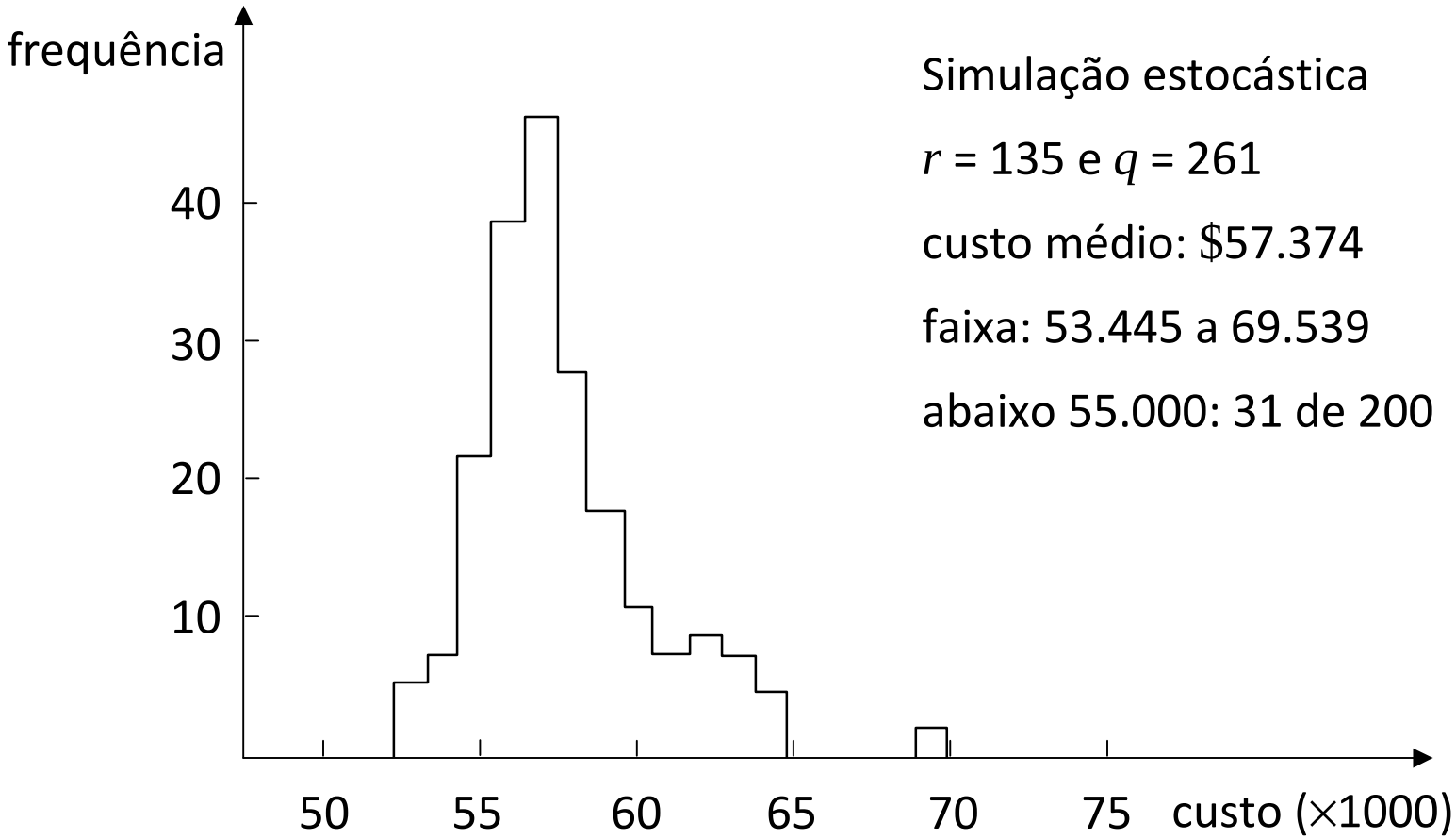
©DCA-FEEC-Unicamp

Demanda



©DCA-FEEC-Unicamp

Distribuição frequência do custo



Simulação estocástica

r = 135 e q = 261

custo médio: \$57.374

faixa: 53.445 a 69.539

abaixo 55.000: 31 de 200

©DCA-FEEC-Unicamp

Observação

Este material refere-se às notas de aula do curso EA 044 Planejamento e Análise de Sistemas de Produção da Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação da Unicamp. Não substitui o livro texto, as referências recomendadas e nem as aulas expositivas. Este material não pode ser reproduzido sem autorização prévia dos autores. Quando autorizado, seu uso é exclusivo para atividades de ensino e pesquisa em instituições sem fins lucrativos.

©DCA-FEEC-Unicamp