EA 044 Planejamento e Análise de Sistemas de Produção

Modelos de Programação Linear

Tópicos

1-Introdução

2-Modelos de alocação

3-Modelos de *blending*

4-Planejamento de operações

5-Modelos multi-estágios

6-Modelos linearizáveis

1-Introdução

- Modelo de programação linear (PL)
  - variáveis contínuas
  - função objetivo única e linear
  - restrições desigualdade são todas lineares
  - restrições igualdade são todas lineares
- Formato

$$
\begin{array}{ll}
\max & cx \\
\text{sa} & Ax \leq b \\
 & x \geq 0
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{ll}
\min & cx \\
\text{sa} & Ax \geq b \\
 & x \geq 0
\end{array}
$$

2-Modelos de alocação

Gestão florestal: madeira, criação, recreação, ambiental, preservação.

Área geográfica dividida em áreas homogeneas para análise. Políticas de exploração e preservação são propostas para cada uma das áreas. Problema: determinar a melhor alocação das terras das áreas de análise às politicas particulares, sujeita às restrições de uso da terra.

Área: 788 mil acres
Números áreas em análise: 7 áreas
Políticas: exploração de madeira, criação gado, conservação

A alocação visa maximizar a receita, produzir no mínimo 40 milhões de metros de madeira, 5 mil animais mês, e manter índice de preservação de no mínimo 70.

Notação

i = área em análise $i = 1,\ldots,7$

j = política $j = 1,\ldots,3$

x_{ij} = quantidade acres (x 1000) da área i sob a política j

s_i = tamanho área de análise (x 1000 acres)

p_{ij} = valor presente/acre do uso área i adotando política j

t_{ij} = produção esperada de madeira (m/acre) na área i adotando j

g_{ij} = produção esperada de gado (animais mês/acre) na área i adotando j

w_{ij} = índice de preservação (0 a 100) da área i adotando j

Modelo PL

$$\max \sum_{i=1}^{7} \sum_{j=1}^{3} p_{ij} x_{ij}$$ receita

$$\text{sa} \quad \sum_{j=1}^{3} x_{ij} = s_i \qquad i = 1, \ldots, 7$$ alocação

$$\sum_{i=1}^{7} \sum_{j=1}^{3} t_{ij} x_{ij} \geq 40.000$$ madeira

$$\sum_{i=1}^{7} \sum_{j=1}^{3} g_{ij} x_{ij} \geq 5$$ criação

$$\frac{1}{788} \sum_{i=1}^{7} \sum_{j=1}^{3} w_{ij} x_{ij} \geq 70$$ preservação

$$x_i \geq 0 \qquad i = 1, \cdots, 7 \qquad j = 1, \cdots, 3$$

3-Modelos de *Blending*

Produção de um novo tipo de minério requer uma quantidade mínima de três insumos básicos A, B e C, conforme o seguinte:

Elemento básico	Qtde mínima (kg)
A	5
B	100
C	30

Elementos básicos: provenientes de quatro minas, com composição distintas dos elementos básicos. As composições são as seguintes:

Elemento básico	Mina (kg/ton)			
	1	2	3	4
A	10	3	8	2
B	90	150	75	175
C	45	25	20	37

Custos dos elementos básicos são diferentes, para as diferentes minas:

Mina	Custo ($/ton)
1	800
2	400
3	600
4	500

Idea: mistura (factível) que tem custo mínimo ?

Variáveis de decisão

x_1 = fração tonelada mina 1

x_2 = fração tonelada mina 2

x_3 = fração tonelada mina 3

x_4 = fração tonelada mina 4

Modelo PL

$$
\begin{array}{lll}
\min & 800x_1 + 400x_2 + 600x_3 + 500x_4 & \text{custo} \\
\text{sa} & 10x_1 + 3x_2 + 8x_3 + 2x_4 \geq 5 & \text{elemento A} \\
 & 90x_1 + 150x_2 + 75x_3 + 175x_4 \geq 100 & \text{elemento B} \\
 & 45x_1 + 25x_2 + 20x_3 + 37x_4 \geq 30 & \text{elemento C} \\
 & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 & \text{balanço} \\
 & x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 \geq 0 &
\end{array}
$$

4-Planejamento de operações

Indústria produz tubos de aço com uma variedade de tamanho e uso. Atualmente são três usinas. Problema: como uma quarta usina, com configuração diferente das atuais, afeta a distribuição do trabalho (e custos associados) entre as usinas.

p = tipo de produto $p = 1,\ldots,16$

m = usina $m = 1,\ldots,4$

x_{pm} = quantidade de p produzida na usina m (ton/semana)

c_{pm} = custo unitário produção p na usina m

t_{pm} = unidade tempo para produzir produto p em m

d_p = demanda semanal do produto p

b_m = capacidade produção usina m

Modelo PL

$$\min \sum_{p=1}^{16}\sum_{m=1}^{4} c_{pm}x_{pm}$$ custo

$$\text{sa} \quad \sum_{m=1}^{4} x_{pm} \geq d_p \qquad p = 1,\cdots,16$$ demanda

$$\sum_{p=1}^{16} t_{pm}x_{pm} \leq b_m \qquad m = 1,\cdots,4$$ capacidade

$$x_{pm} \geq 0 \quad p = 1,\cdots,16 \quad m = 1,\cdots,4$$

Programação de turnos de trabalho

Funcionários de empresa nacional trabalham quatro 10-horas dias por semana de acordo com o seguinte esquema:

$j = 1$ Segunda - Quarta - Quinta - Sexta

$j = 2$ Segunda - Terça - Quinta - Sexta

$j = 3$ Segunda - Terça - Quarta - Sexta

Determinar o menor número total de funcionários necessário para se ter no mínimo 10 trabalhando nas Segundas, 9 nas sextas, e 7 de terças às sextas.

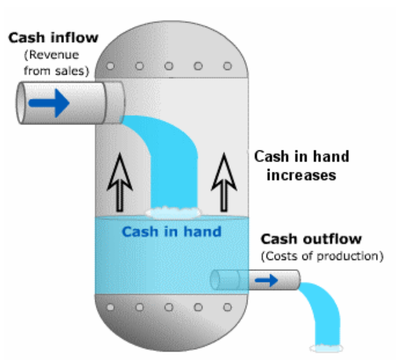
x_j = número de funcionários que trabalham no esquema j

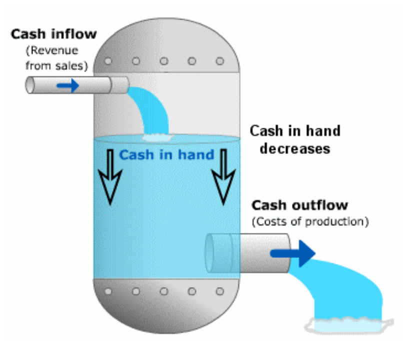
Modelo PL

min	$x_1 + x_2 + x_3$	número total funcionários
sa	$x_1 + x_2 + x_3 \geq 10$	cobre segunda
	$x_2 + x_3 \geq 7$	cobre terça
	$x_1 + x_3 \geq 7$	cobre quarta
	$x_1 + x_2 \geq 7$	cobre quinta
	$x_1 + x_2 + x_3 \geq 9$	cobre sexta
	$x_1,\ x_2, x_3 \geq 0$	

5-Modelos multiestágios

- Exemplo: gestão financeira (fluxo de caixa)
- Fluxo em um horizonte de tempo
- Acompanhar entradas e saídas de capital
  - fazer empréstimos quando necessário
  - investir sempre que possível





Vendas: entram de imediato na conta corrente

Contas pagas por clientes: imediato na conta corrente

Despesas: deduções imediatas da conta corrente

Contas a pagar a fornecedores:

- saldadas no máximo na semana $t + 3$
- desconto de 2% se pagas na semana t

Fluxo caixa

- empréstimo: linha de crédito de $4 milhões, juro de 0.2 %/semana
- aplicação: mercado financeiro de curto prazo, juro de 0.1%/semana
- banco: requer no mínimo 20% do empréstimo na conta corrente

Ideia do gerente

- minimizar o custo total de juros e descontos perdidos
- segurança: manter no mínimo $20.000 na conta corrente

Notação

s_t = projeção receita em t de pequenos clientes

r_t = projeção receita em t de clientes com crédito

p_t = projeção contas a pagar fornecedores em t

e_t = projeção despesas, folha pagamento, energia... em t

g_t = valor empréstimo via linha crédito na semana t

h_t = débito linha crédito pago na semana t

w_t = contas devidas em t e pagas em $t + 3$

x_t = investimento mercado curto prazo em t

y_t = débito acumulado na linha crédito semana t

z_t = capital disponível em caixa na semana t

Modelo PL

$$\min \quad 0.002\sum_{t=1}^{T} y_t + 0.02\sum_{t=1}^{T} w_t - 0.001\sum_{t=1}^{T} x_t$$ juros total

$$\text{sa} \quad z_{t-1} + g_t - h_t + x_{t-1} - x_t + 0.001x_{t-1} - 0.002y_{t-1} +$$ balanço caixa

$$+ s_t - e_t + r_t - 0.98(p_t - w_t) - w_{t-3} = z_t$$

$$y_{t-1} + g_t - h_t = y_t$$ débito

$$y_t \leq 4000$$ limite crédito

$$z_t \geq 0.20 y_t$$ regra banco

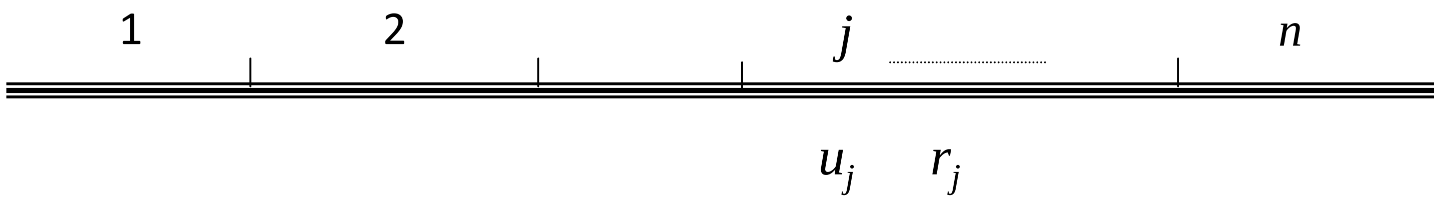
$$w_t \leq p_t$$ limite pagamento

$$z_t \geq 20$$ segurança

$$g_t, h_t, w_t, x_t, y_t, z_t \geq 0$$

$$t = 1, \ldots, T$$

6-Modelos linearizáveis



$$\max \sum_{j=1}^{n} r_j x_j$$ redução total

$$\text{sa} \quad \sum_{j=1}^{n} x_j \le 25$$ disponibilidade

$$x_j \le u_j \qquad j = 1, \cdots, n$$ limites

$$x_j \ge 0 \qquad j = 1, \cdots, n$$

Modelo (não linear)

$$\max \quad f = \min\{r_j x_j : j = 1, \cdots, n\}$$

$$\text{sa} \quad \sum_{j=1}^{n} x_j \leq 25$$

$$x_j \leq u_j \qquad j = 1, \cdots, n$$

$$x_j \geq 0 \qquad j = 1, \cdots, n$$

Linearização (modelo PL)

$$
\begin{aligned}
\max \quad & f \\
\text{sa} \quad & f \le r_j x_j & j = 1, \cdots, n \\
& \sum_{j=1}^{n} x_j \le 25 \\
& x_j \le u_j & j = 1, \cdots, n \\
& x_j \ge 0 & j = 1, \cdots, n
\end{aligned}
$$

Observação

Este material refere-se às notas de aula do curso EA 044 Planejamento e Análise de Sistemas de Produção da Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação da Unicamp. Não substitui o livro texto, as referências recomendadas e nem as aulas expositivas. Este material não pode ser reproduzido sem autorização prévia dos autores. Quando autorizado, seu uso é exclusivo para atividades de ensino e pesquisa em instituições sem fins lucrativos.