EA 044 Planejamento e Análise
de Sistemas de Produção

Modelos Determinísticos de Otimização

©DCA-FEEC-Unicamp

Tópicos

1-Introdução e motivação

2-Definições e solução gráfica

3-Modelos de grande porte: indexação

4-Classes de modelos de otimização

1-Introdução e motivação

Brasil Petróleo (Refinaria de Petrolinea)

Origem Petróleo	Gasolina (%/barril)	Gas Aviação (%/barril)	Lubrificante (%/barril)	Perdas (%/barril)	Oferta (barris)	Custo ($)
Nacional	40	20	30	10	6000	15
Importado	30	40	20	10	9000	20
Demanda (barris/dia)	2000	1500	500			

- Dados exatos
- Variáveis de decisão

x_1 = petróleo importado a ser refinado/ dia ($\times$1000 barris)

x_2 = petróleo nacional a ser refinado/dia ($\times$1000 barris)

©DCA-FEEC-Unicamp

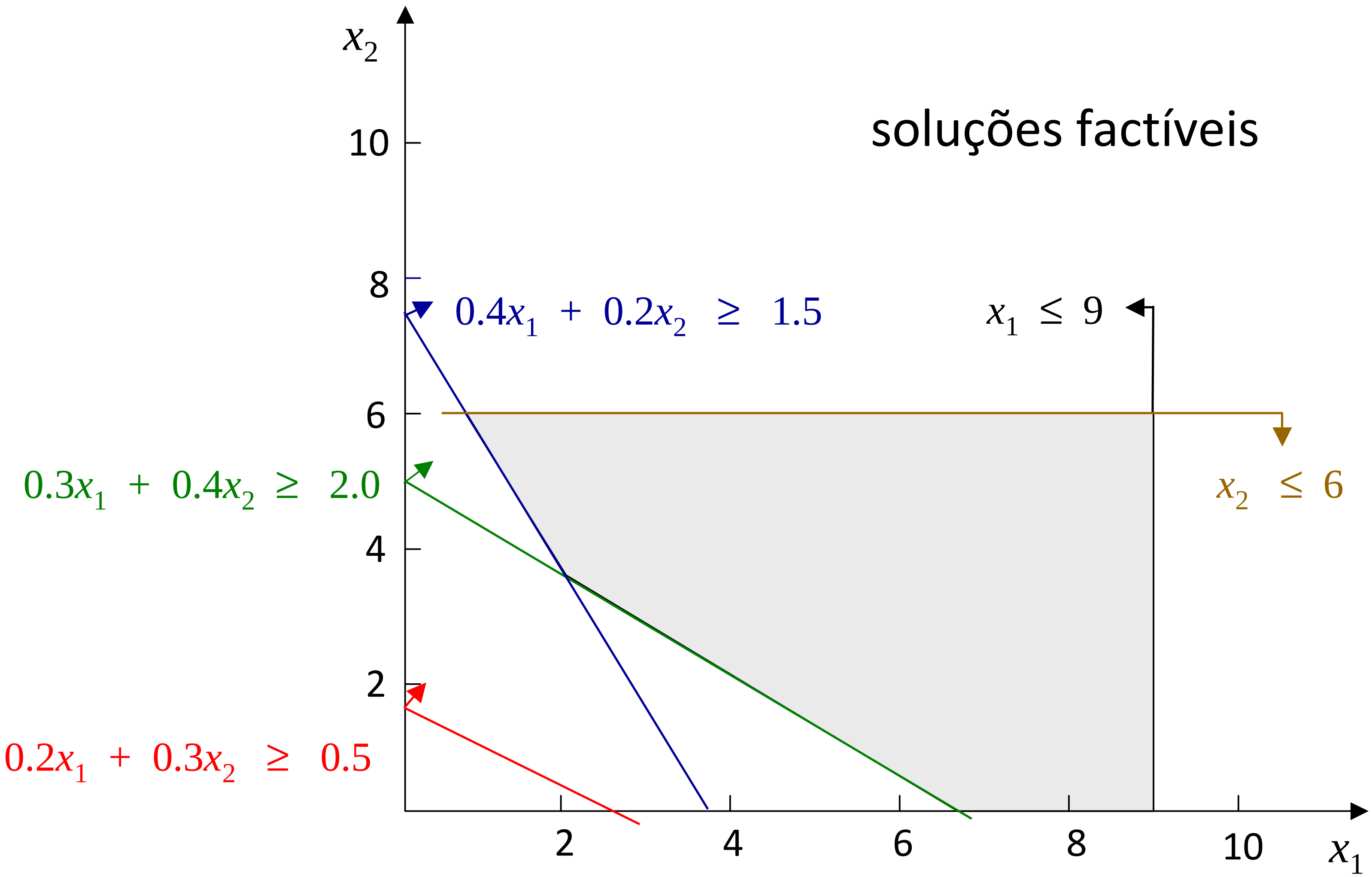
- Itens essenciais em modelos de otimização
  - decisões: escolhas de quem toma decisão
  - restrições: limitam escolhas
  - objetivo: determina preferência entre decisões

- Modelo da Refinaria de Petrolinea

$$
\begin{array}{lll}
\min & 20x_1 + 15x_2 & \text{função objetivo} \\
\text{sa} & 0.3x_1 + 0.4x_2 \geq 2.0 & \\
& 0.4x_1 + 0.2x_2 \geq 1.5 & \\
& 0.2x_1 + 0.3x_2 \geq 0.5 & \text{restrições principais} \\
& x_1 \leq 9.0 & \\
& x_2 \leq 6.0 & \\
& x_1, x_2 \geq 0 & \text{natureza da variável}
\end{array}
$$

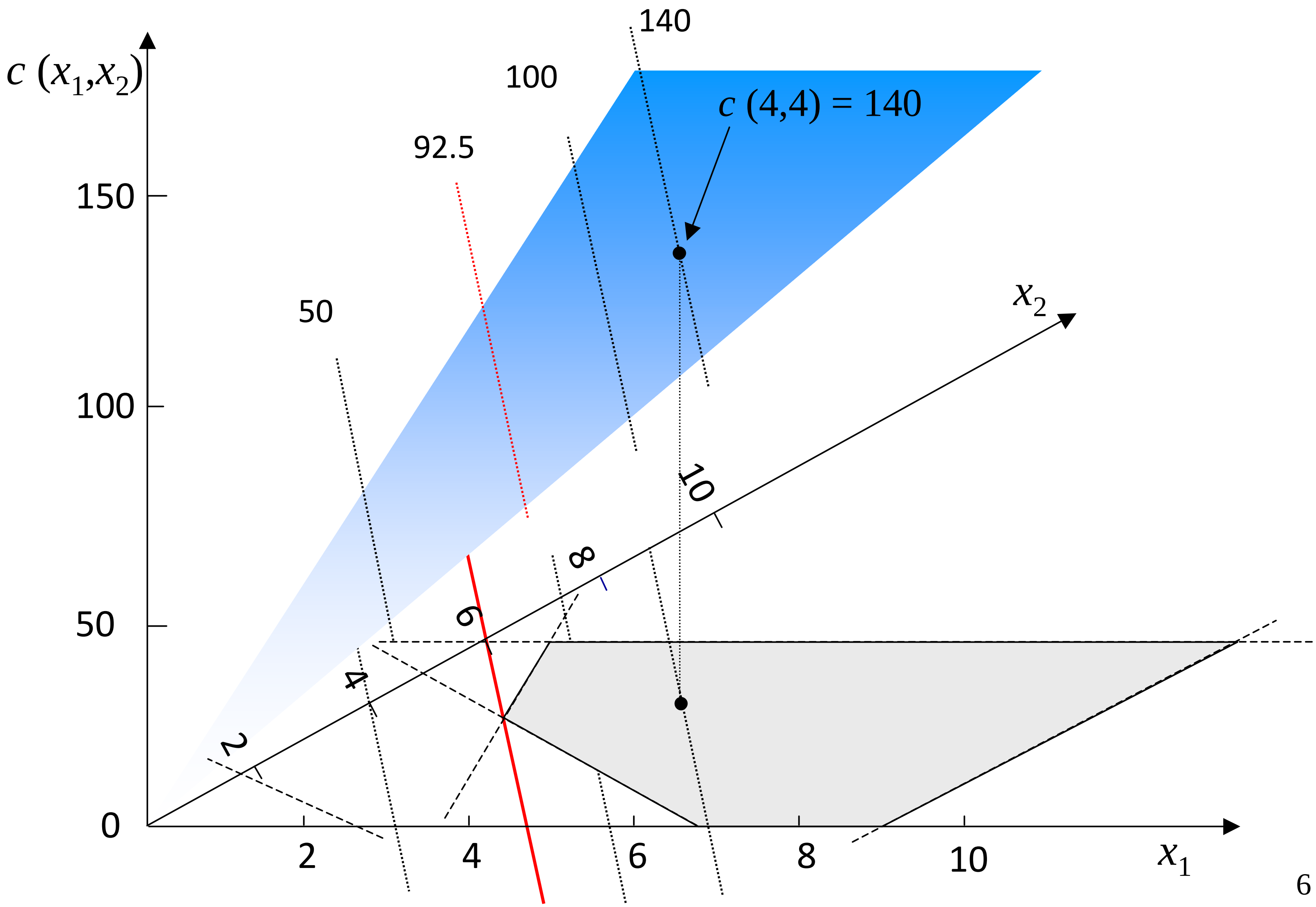
©DCA-FEEC-Unicamp

2-Definições e solução gráfica



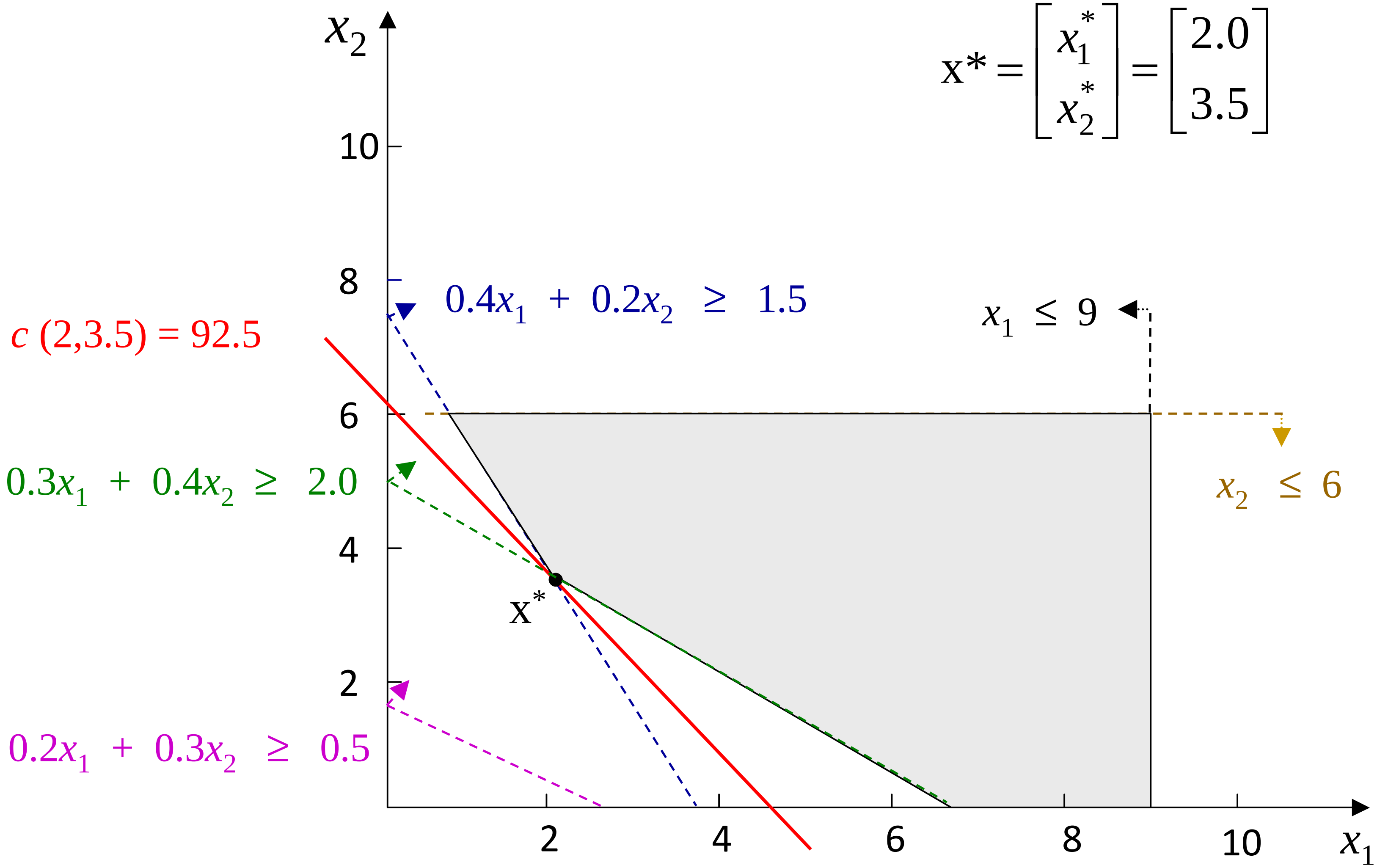
©DCA-FEEC-Unicamp

Função objetivo



©DCA-FEEC-Unicamp

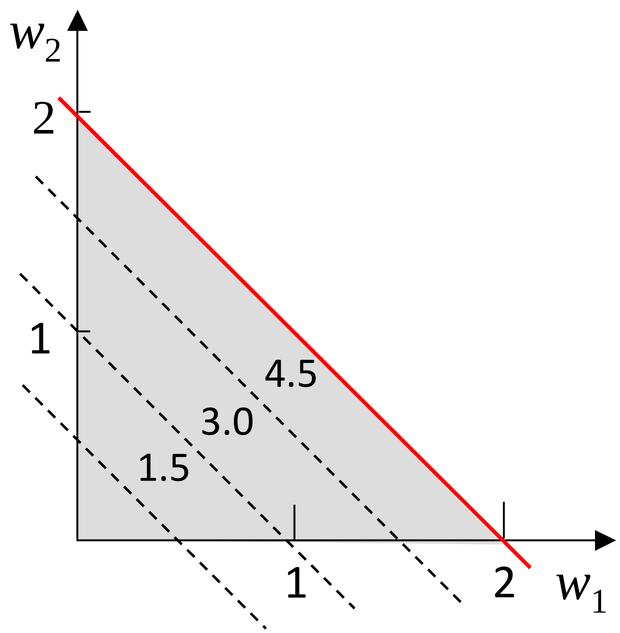
Solução ótima



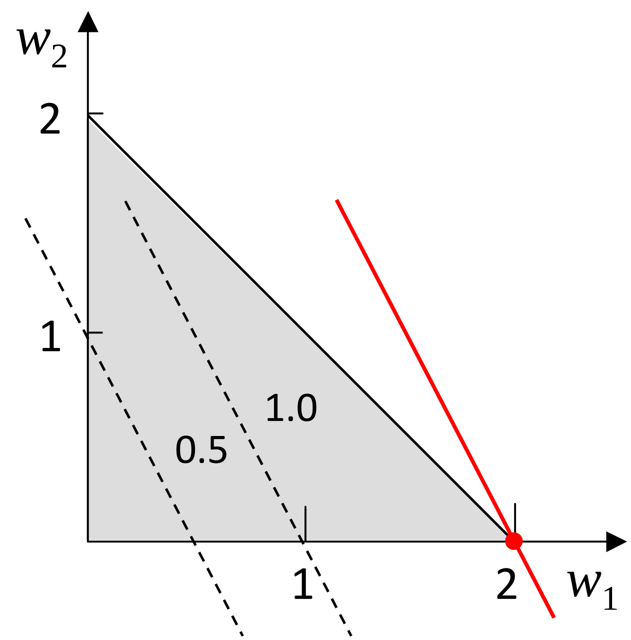
©DCA-FEEC-Unicamp

$$\begin{aligned} \max \quad & 3w_1 + 3w_2 \\ \text{sa} \quad & w_1 + w_2 \le 2 \\ & w_1, w_2 \ge 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \max \quad & w_1 + 0.5w_2 \\ \text{sa} \quad & w_1 + w_2 \le 2 \\ & w_1, w_2 \ge 0 \end{aligned}$$



múltiplas soluções

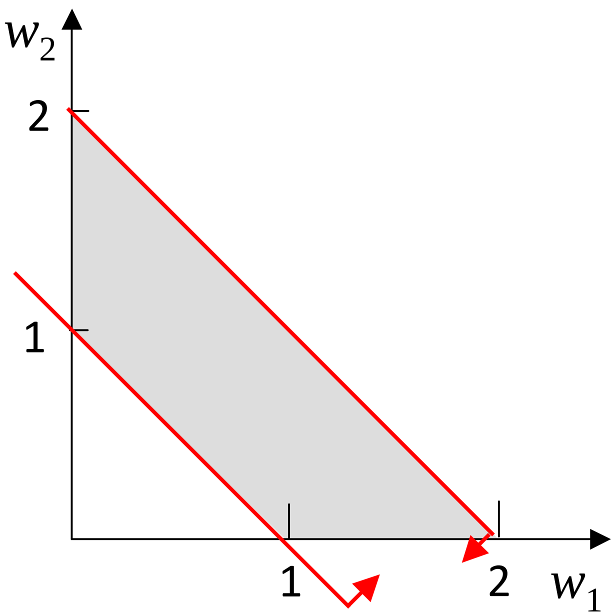


solução única

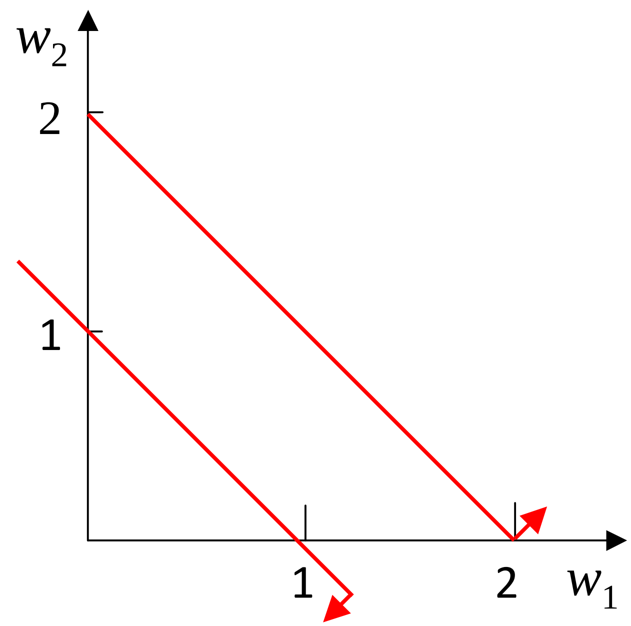
©DCA-FEEC-Unicamp

$$\begin{array}{ll} \max & 3w_1 + 3w_2 \\ \text{sa} & w_1 + w_2 \le 2 \\ & w_1 + w_2 \ge 1 \\ & w_1, w_2 \ge 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \max & w_1 + 0.5w_2 \\ \text{sa} & w_1 + w_2 \ge 2 \\ & w_1 + w_2 \le 1 \\ & w_1, w_2 \ge 0 \end{array}$$



modelo factível

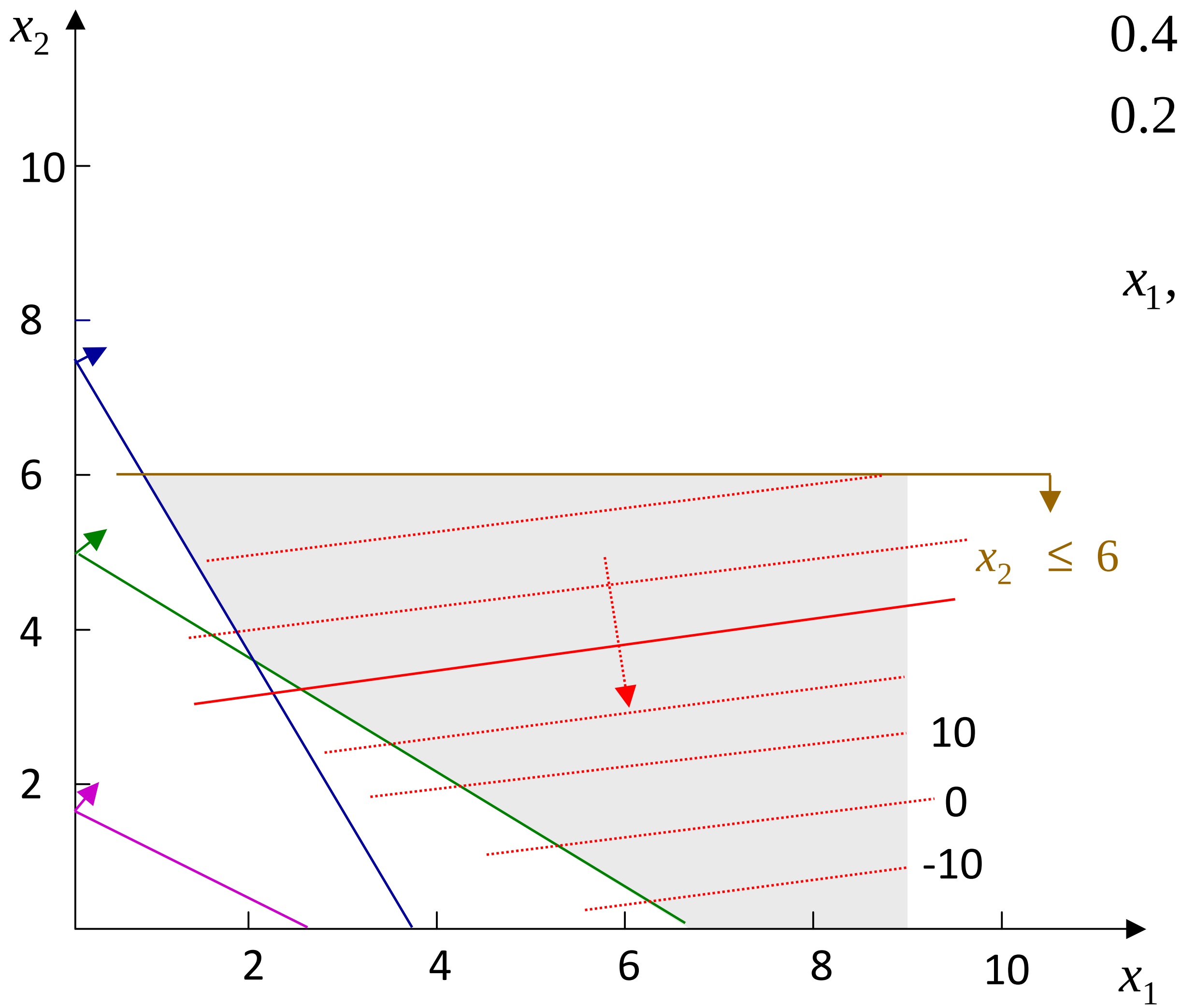


modelo não factível

©DCA-FEEC-Unicamp

Modelo não limitado

$$\begin{aligned} \max \quad & -2x_1 + 15x_2 \\ \text{sa} \quad & 0.3x_1 + 0.4x_2 \geq 2.0 \\ & 0.4x_1 + 0.2x_2 \geq 1.5 \\ & 0.2x_1 + 0.3x_2 \geq 0.5 \\ & x_2 \leq 6.0 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$



©DCA-FEEC-Unicamp

3-Modelos de grande porte: indexação

- Exemplo: produção em escala de sementes de milho híbrido

  l = 20 fazendas de produção de sementes

  m = 25 variedades de milho

  n = 30 regiões de venda

- Como operar produção e distribuição com custo mínimo ?
- Parâmetros estimados pelos produtores
  - custo de produção em cada região (\$/saca)
  - capacidade de produção de cada fazenda (espigas)
  - número de espigas que são processadas para compor uma saca
  - demanda de cada tipo de semente em cada região (sacas)
  - custo de transporte das fazendas às regiões de consumo (\$/saca)

©DCA-FEEC-Unicamp

f = fazenda $(f = 1,\ldots,l)$

h = variedade híbrido $(h = 1,\ldots,m)$

r = região de venda $(r = 1,\ldots,n)$

x_{fh} = número de sacas produzidos na fazenda f da variedade h

$f = 1,\ldots,l;\ \ h = 1,\ldots,m$

y_{fhr} = no. sacas híbrido h transportados da fazenda f para região r

$f = 1,\ldots,l;\ \ h = 1,\ldots,m;\ r = 1,\ldots,n$

número de variáveis $x = lm = 20(25) = 500$

número de variáveis $y = lmn = 20(25)(30) = 15.000$

total de variáveis: 15.500 variáveis

©DCA-FEEC-Unicamp

p_{fh} = custo/saca produzir na fazenda f a variedade h

s_{fhr} = custo/saca transportar híbrido h da fazenda f para região r

u_f = capacidade de produção da fazenda f (espigas)

a_h = número de espigas para produzir uma saca da variedade h

d_{hr} = número de sacas do híbrido h demandada pela região r

custo total = custo de produção + custo de transporte

objetivo = minimizar custo total

©DCA-FEEC-Unicamp

Modelo planejamento produção e distribuição

$$\min \sum_{f=1}^{l}\sum_{h=1}^{m} p_{fh}x_{fh} + \sum_{f=1}^{l}\sum_{h=1}^{m}\sum_{r=1}^{n} s_{fhr}y_{fhr}$$ custo total

$$\text{sa} \quad \sum_{h=1}^{m} a_h x_{fh} \le u_f \qquad f=1,\dots,l$$ capacidade

$$\sum_{f=1}^{l} y_{fhr} = d_{hr} \qquad h=1,\dots,m;\ \ r=1,..,n$$ demandas

$$\sum_{r=1}^{n} y_{fhr} = x_{fh} \qquad f=1,\dots,l;\ \ h=1,\dots,m$$ balanço

$$x_{fh} \ge 0 \qquad f=1,\dots,l;\ \ h=1,\dots,m$$

$$y_{fhr} \ge 0 \qquad f=1,\dots,l;\ \ h=1,\dots,m; r=1,\dots,n$$

não negatividade

©DCA-FEEC-Unicamp

4-Classes de modelos de otimização

$$\max(\min) \quad f(x_1, \ldots, x_n)$$

$$\text{sa} \qquad g(x_1, \ldots . x_n) \left\{ \begin{matrix} \leq \\ = \\ \geq \end{matrix} \right\} b_i \qquad i = 1, \ldots, m$$

$f, g_1, \ldots, g_m$: funções das variáveis de decisão $x_1, \ldots, x_n$

b_i : parâmetros (constantes) especificados

©DCA-FEEC-Unicamp

- Extremos
  - máximo

    local: $f(\mathrm{x}^*) \geq f(\mathrm{x}) \quad \forall \mathrm{x} \in N(\mathrm{x}^*,\varepsilon) \subset D$

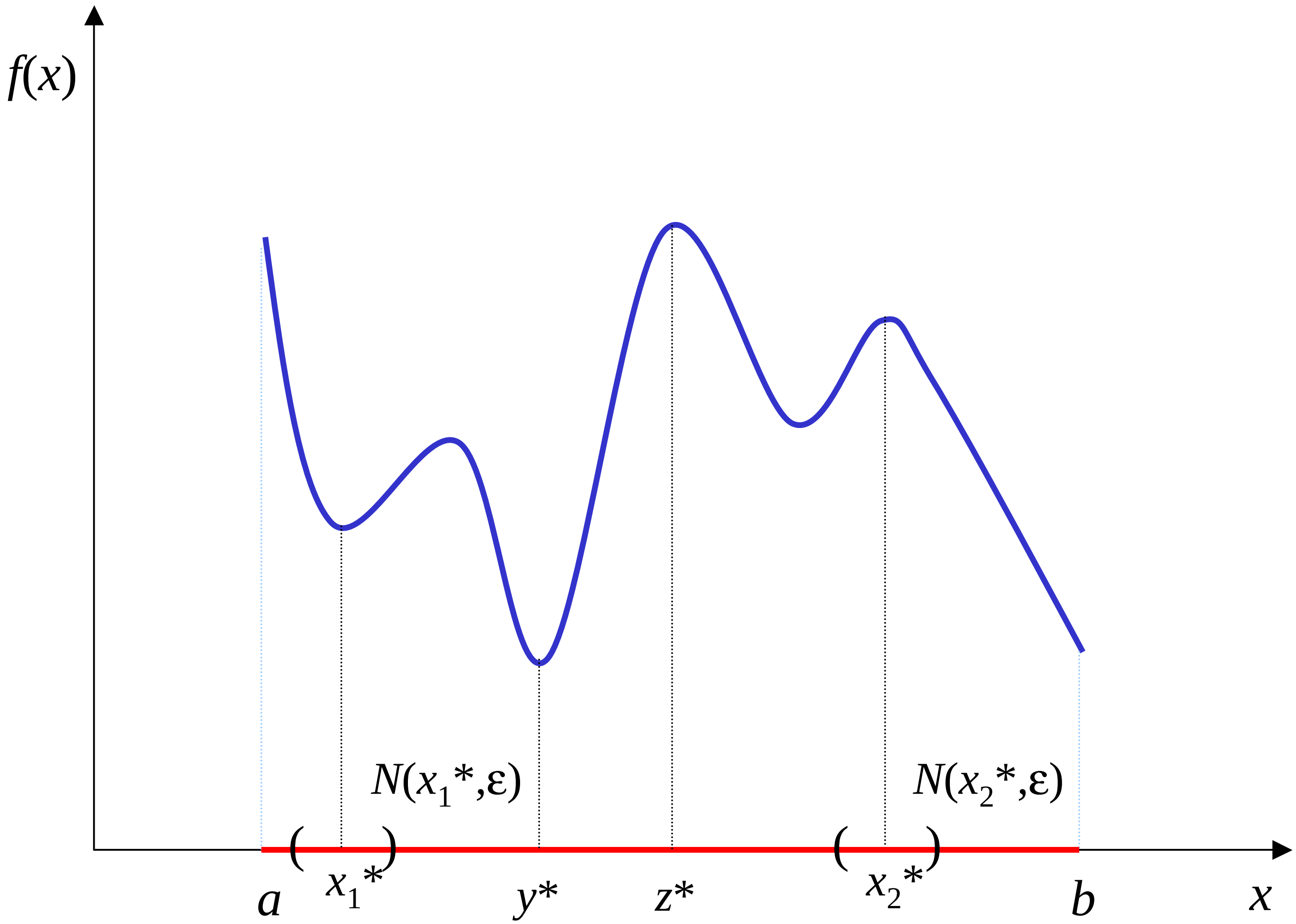
    global: $f(\mathrm{x}^*) \geq f(\mathrm{x}) \quad \forall \mathrm{x} \in D$
  - mínimo

    local: $f(\mathrm{x}^*) \leq f(\mathrm{x}) \quad \forall \mathrm{x} \in N(\mathrm{x}^*,\varepsilon) \subset D$

    global: $f(\mathrm{x}^*) \leq f(\mathrm{x}) \quad \forall \mathrm{x} \in D$

$$\mathrm{x} = (x_1,\ldots,x_n)$$

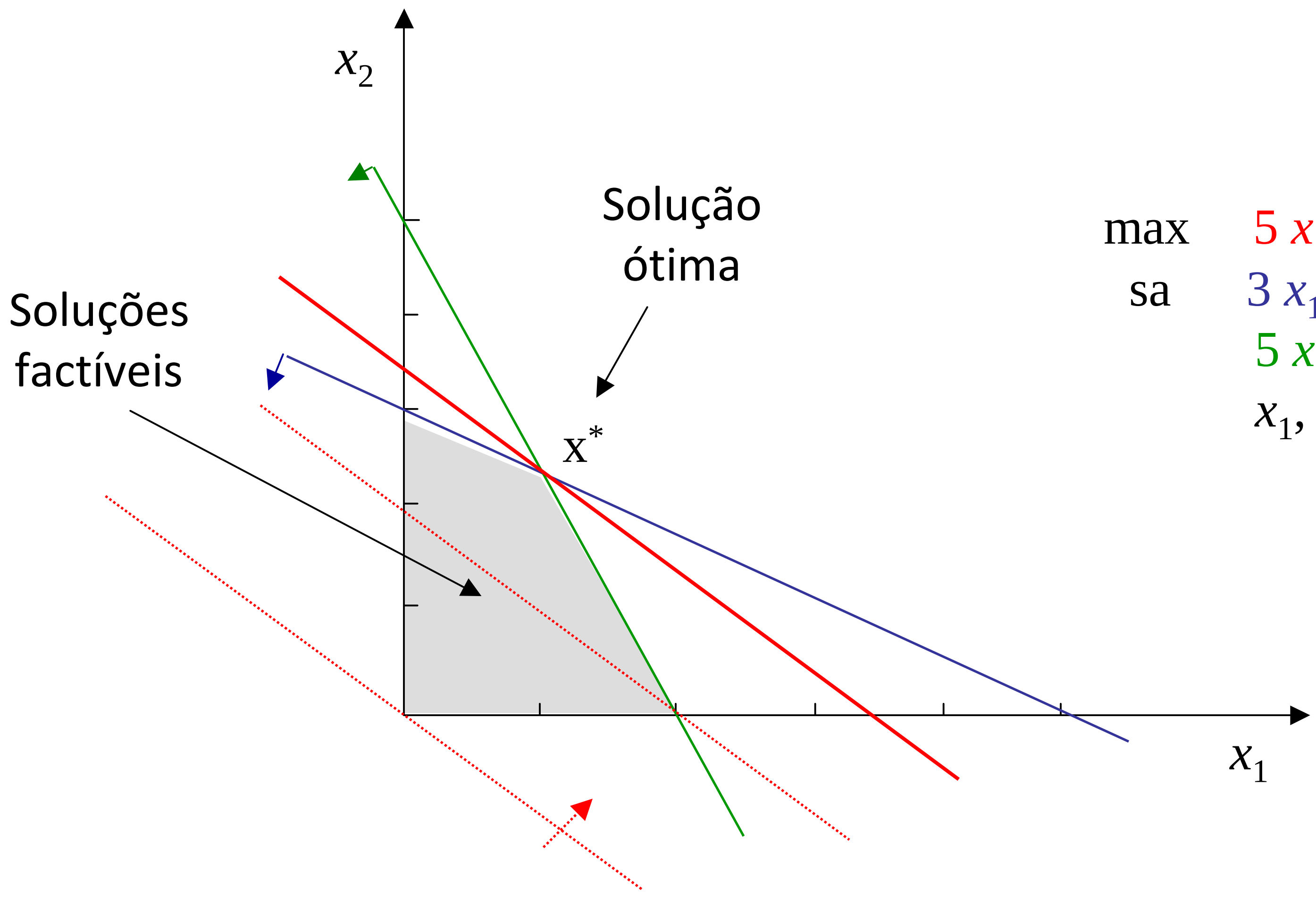
©DCA-FEEC-Unicamp



$D = [a, b]$

©DCA-FEEC-Unicamp

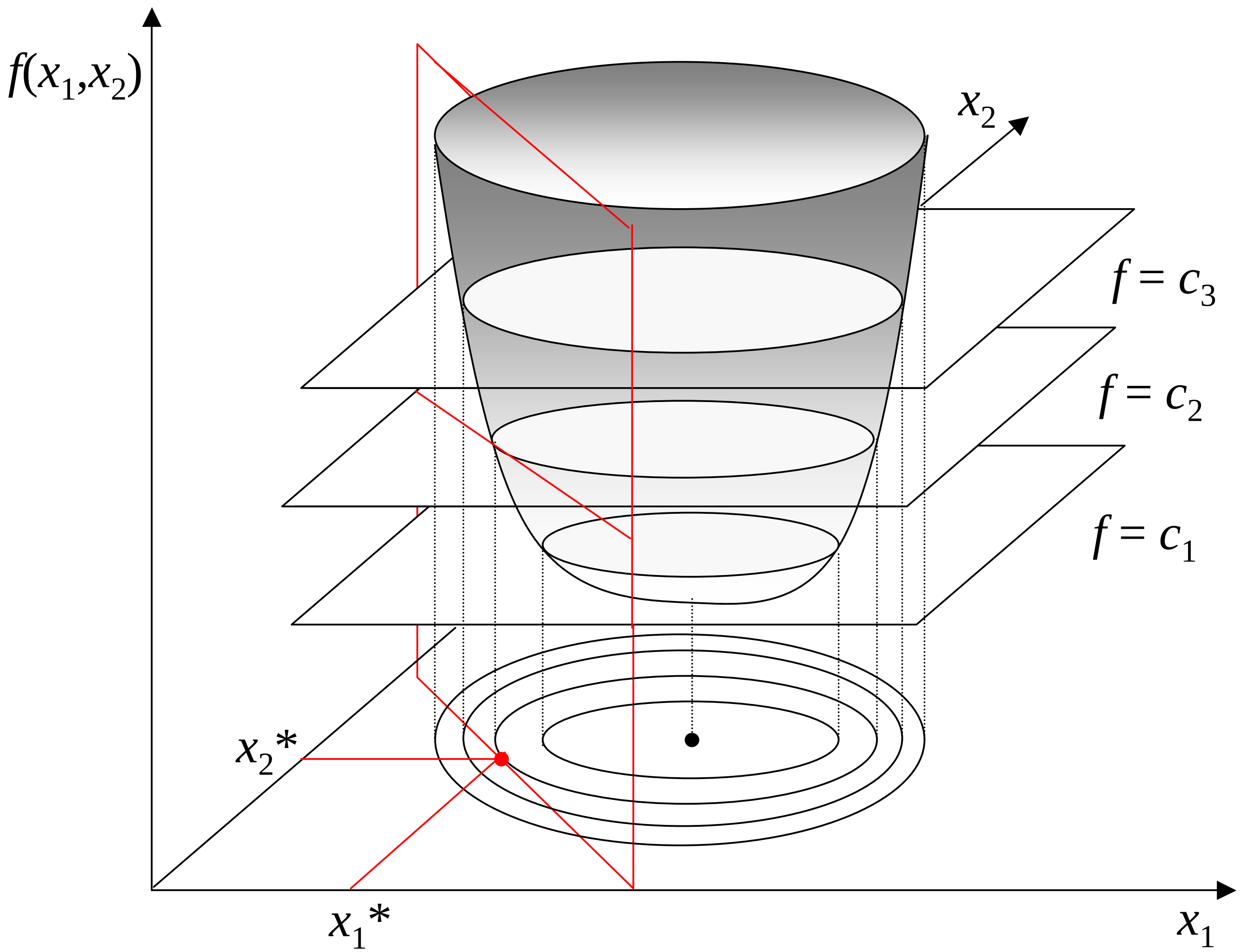
Modelo linear (PL)



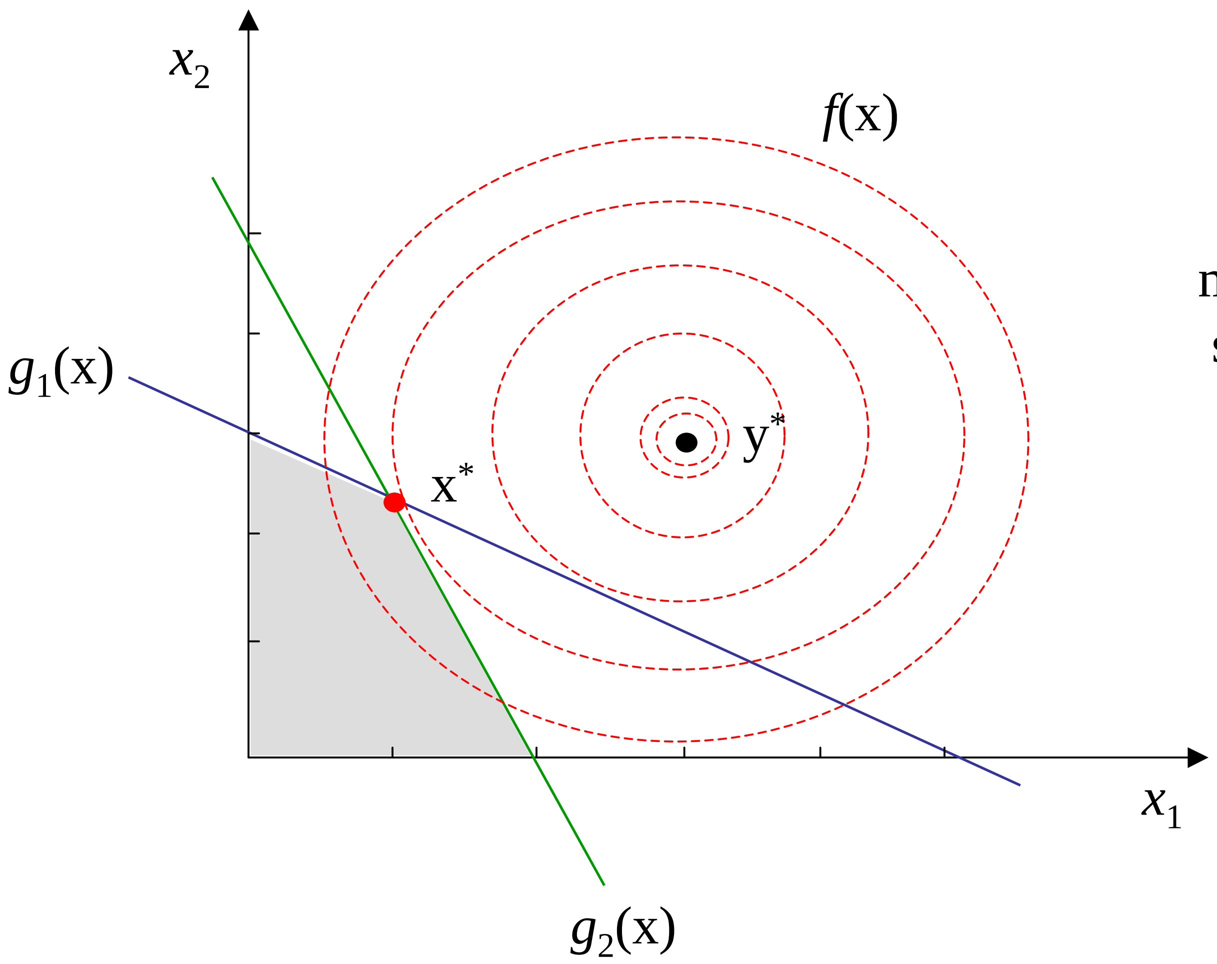
$$
\begin{array}{ll}
\max & 5\,x_1 + 5\,x_2 \\
\text{sa} & 3\,x_1 + 5\,x_2 \le 15 \\
 & 5\,x_1 + 2\,x_2 \le 10 \\
 & x_1, x_2 \ge 0
\end{array}
$$

©DCA-FEEC-Unicamp

Função não linear



Modelo não linear (PNL)



$$\begin{array}{ll} \min & (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 3)^2 \\ \text{sa} & 3x_1 + 5x_2 \leq 15 \\ & 5x_1 + 2x_2 \leq 10 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

©DCA-FEEC-Unicamp

Exemplo: publicidade

$$\max \quad \sum_{g=1}^{m} p_g \sum_{c=1}^{n} s_{gc} \log(x_c + 1)$$

$$\text{sa} \quad \sum_{c=1}^{n} x_c \le b$$

$$x_c \ge 0\,, \quad c = 1, \dots, n$$

x_c = quantia alocada à campanha tipo c

p_g = lucro (em termos da fração das vendas) grupo de produtos g

g = grupo de produtos, $g = 1,\dots,m$

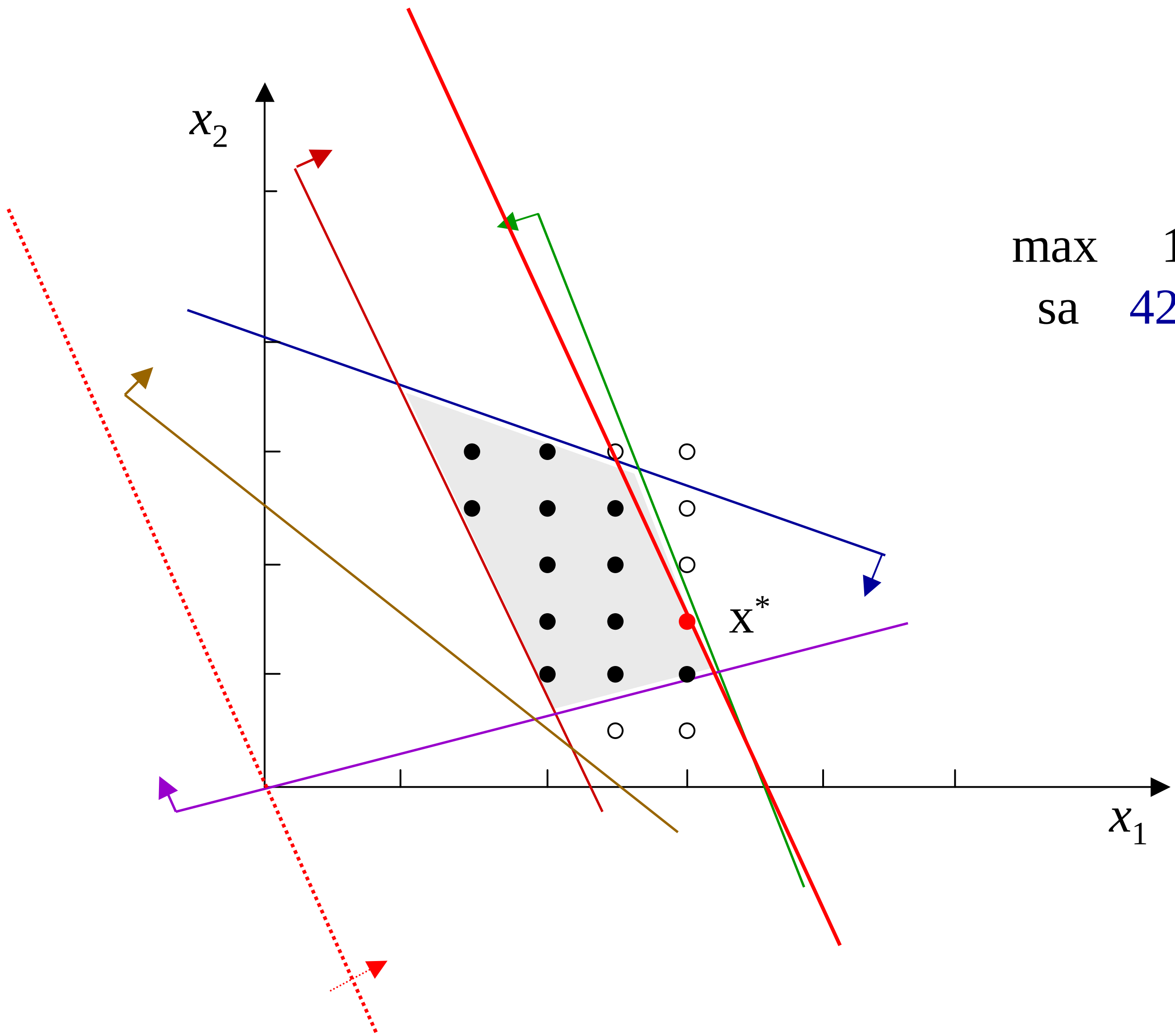
c = tipo de campanha, $c = 1,\dots,n$

b = orçamento disponível

s_{gc}= parâmetro aumento vendas do grupo g devido campanha c

©DCA-FEEC-Unicamp

Modelo discreto (PMD)



$$
\begin{aligned}
\max \quad & 18\,x_1 + 6\,x_2 \\
\text{sa} \quad & 42.8\,x_1 + 100\,x_2 \leq 800 \\
& 20\,x_1 + 6\,x_2 \leq 142 \\
& 30\,x_1 + 10\,x_2 \geq 135 \\
& x_1 - 3\,x_2 \leq 0 \\
& x_1 + x_2 \geq 5 \\
& x_1, x_2 \geq 0 \ \text{ e inteiros}
\end{aligned}
$$

©DCA-FEEC-Unicamp

Exemplo: programação produção lingotes

i = tipo molde, $i = 1,\ldots,m$

j = tipo de produto, $j = 1,\ldots,n$

c_{ij} = perda quando usa molde i com produto j

I_j = índices i (moldes) que produto j podem utilizar

y_i = 1 se molde i é selecionado, $y_i = 0$ caso contrário

x_{ij} = 1 se molde i é usado pelo produto j, $x_{ij} = 0$ caso contrário

p = número máximo moldes tipo i

©DCA-FEEC-Unicamp

Modelo programação de produção

$$\min \sum_{j=1}^{n} \sum_{i \in I_j} c_{ij} x_{ij}$$ perda total

$$\text{sa} \quad \sum_{i=1}^{m} y_i \le p$$ no máximo p moldes

$$\sum_{i \in I_j} x_{ij} = 1 \qquad j = 1, \ldots, n$$ um para cada produto

$$x_{ij} \le y_i \qquad j = 1, \ldots, n;\ i \in I_j$$ usar somente se selecionado

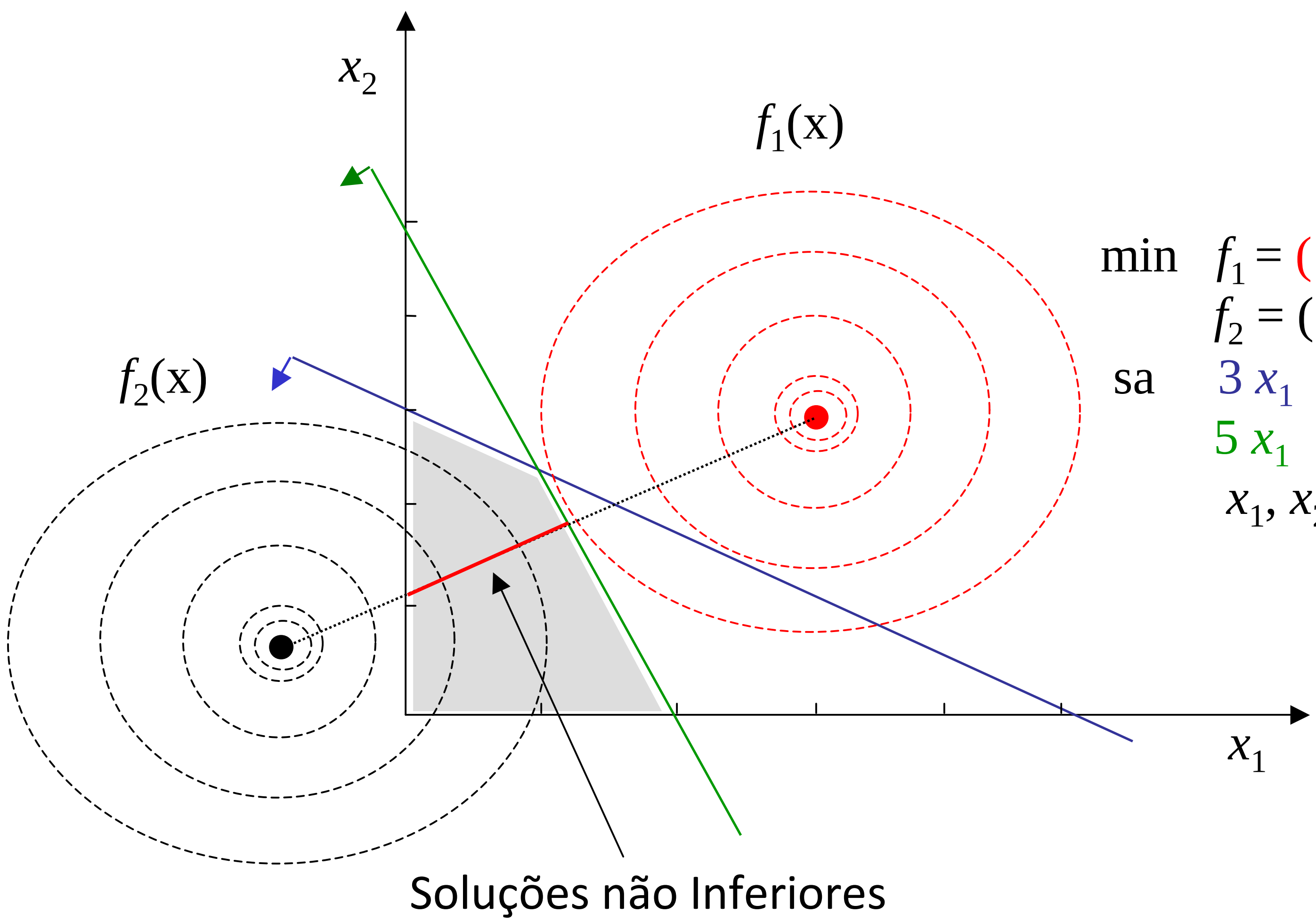
$$y_i = 0 \ ou\ 1 \qquad i = 1, \ldots, m$$

$$x_{ij} = 0 \ ou\ 1 \qquad j = 1, \ldots, n;\ i \in I_j$$

variáveis binárias

©DCA-FEEC-Unicamp

Modelo com múltiplos objetivos (PMO)

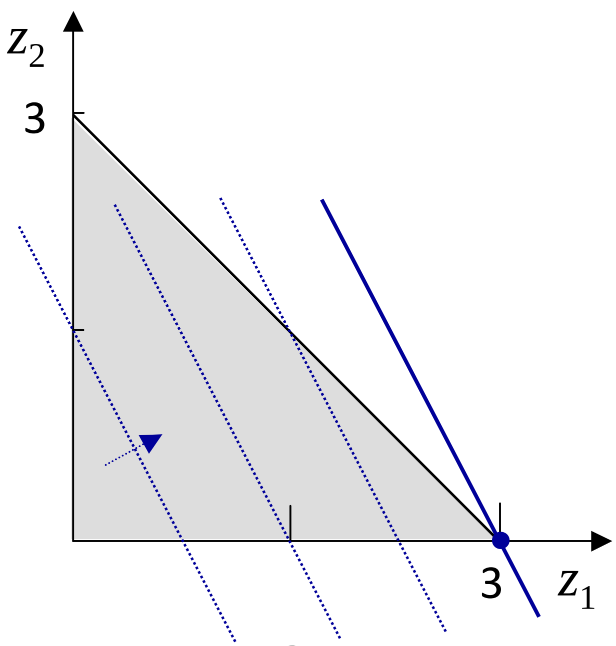


$$
\begin{aligned}
\min \quad & f_1 = (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 3)^2 \\
& f_2 = (x_1 + 1)^2 + (x_2 - 0.75)^2 \\
\text{sa} \quad & 3\,x_1 + 5\,x_2 \leq 15 \\
& 5\,x_1 + 2\,x_2 \leq 10 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

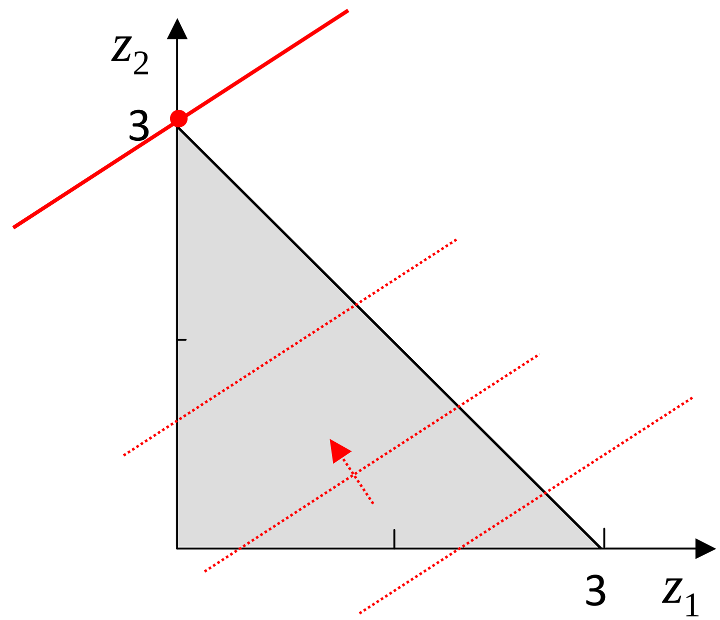
©DCA-FEEC-Unicamp

Exemplo

$$\begin{array}{lrl} \max & 3\,z_1 + z_2 & \\ \min & z_1 - z_2 & \\ \text{sa} & z_1 + z_2 & \leq 3 \\ & z_1, z_2 \geq 0 & \end{array}$$



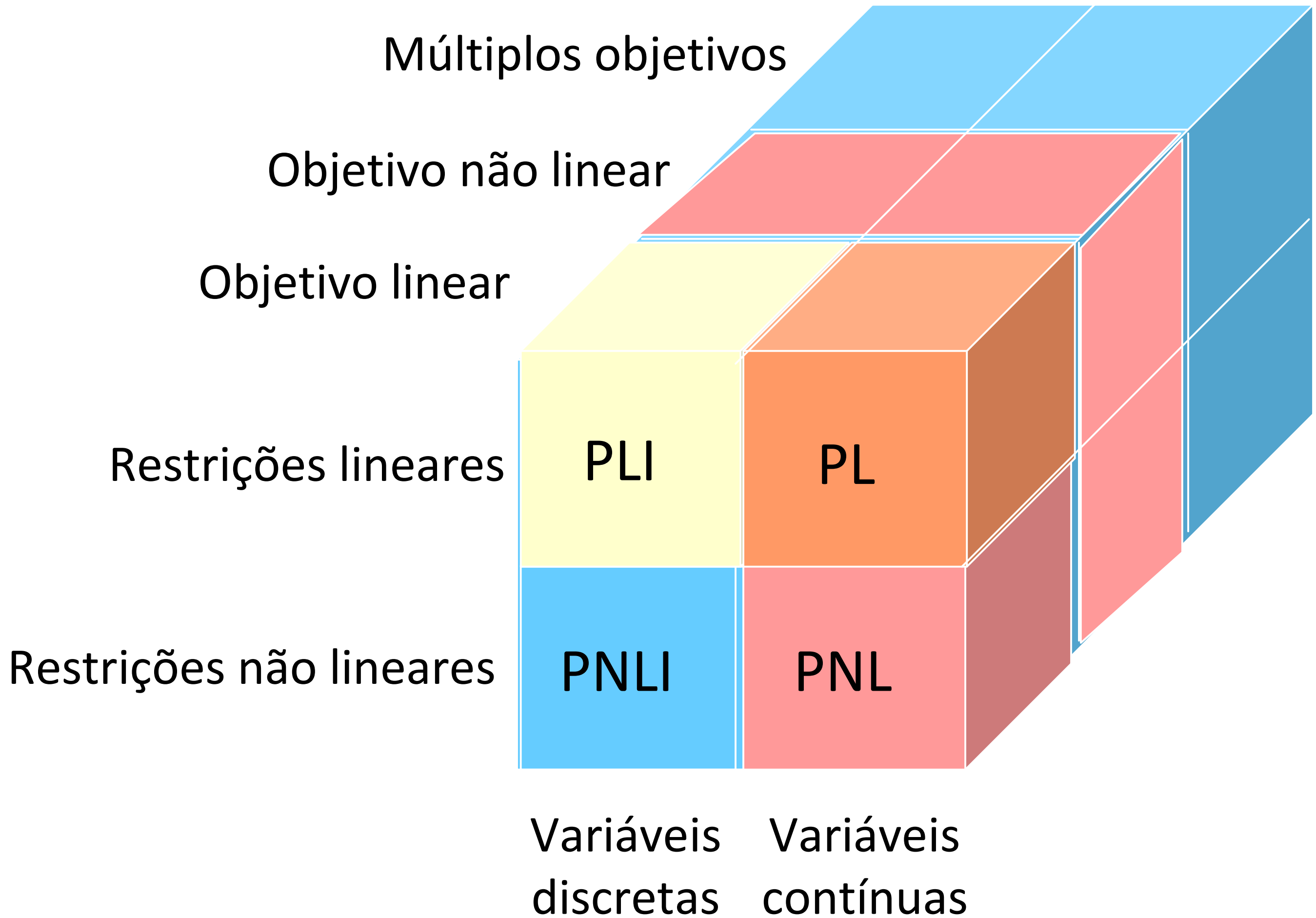
max $3\,z_1 + z_2$



min $z_1 - z_2$

©DCA-FEEC-Unicamp

Classes de modelos de otimização



©DCA-FEEC-Unicamp

Observação

Este material refere-se às notas de aula do curso EA 044 Planejamento e Análise de Sistemas de Produção da Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação da Unicamp. Não substitui o livro texto, as referências recomendadas e nem as aulas expositivas. Este material não pode ser reproduzido sem autorização prévia dos autores. Quando autorizado, seu uso é exclusivo para atividades de ensino e pesquisa em instituições sem fins lucrativos.

 ©DCA-FEEC-Unicamp