



EA 044 Planejamento e Análise
de Sistemas de Produção

Dualidade e Análise de Sensibilidade em Programação Linear

Tópicos

1-Introdução

2-Análise de sensibilidade em PL

3-Sensibilidade e dualidade

4-Relações entre modelos primal e dual

5-Modelos ilimitados e infactíveis

6-Análise de resultados computacionais

1-Introdução

- Interpretação de modelos de PL
 - função objetivo: custo, benefício
 - restrições \geq : demanda
 - restrições \leq : oferta
 - restrições $=$: oferta = demanda
 - não negatividade: natureza das variáveis
- Lado direito das restrições
 - não negativo (mais natural)
- Variáveis de decisão
 - nível de atividade

Modelo programação linear geral

max	(min)	$c x$	benefício (custo)
sa		$F x = b$	oferta = demanda
		$G x \leq r$	oferta recurso r
		$H x \geq d$	demanda recurso d
		$x \geq 0$	não negatividade

$$x \in \mathbb{R}^n \quad c \in \mathbb{R}^n \quad F \in \mathbb{R}^{n \times mb} \quad G \in \mathbb{R}^{n \times mr} \quad H \in \mathbb{R}^{n \times md}$$

nível de atividade	benefício (custo)/ unidade de atividade	tecnologia
-----------------------	--	------------

$$b \in \mathbb{R}^{mb} \quad r \in \mathbb{R}^{mr} \quad d \in \mathbb{R}^{md}$$

Exemplo

$$\max \quad 13x_1 + 24x_2 + 5x_3 + 50x_4$$

$$\text{sa} \quad 1x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 50x_4 \geq 89$$

$$3x_3 + 5x_4 \geq 60$$

$$10x_1 + 6x_2 + 8x_3 + 2x_4 \leq 608$$

$$1x_2 + 1x_4 \leq 28$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

benefício

demanda recurso 1

demanda recurso 2

oferta recurso 3

oferta recurso 4

não negatividade

cada unidade da atividade x_1 consome 10 unidades do recurso 3 para produzir 1 unidade do recurso 1; cada unidade da atividade x_2 consome 6 unidades do recurso 3 e 1 unidade do recurso 4 para produzir 3 unidades do recurso 1; etc.

Exemplo

Modelo da Refinaria de Petrolinea

min	$20x_1 + 15x_2$	custo
sa	$0.3x_1 + 0.4x_2 \geq 2.0$	demanda gasolina
	$0.4x_1 + 0.2x_2 \geq 1.5$	demanda gas aviação
	$0.2x_1 + 0.3x_2 \geq 0.5$	demanda lubrificantes
	$x_1 \leq 9$	oferta petróleo importado
	$x_2 \leq 6$	oferta petróleo nacional
	$x_1, x_2 \geq 0$	não negatividade

cada unidade da atividade x_1 requer 1 barril de petróleo importado para produzir 0.2 barril de lubrificante, 0.4 de gas de aviação e 0.3 barril de gasolina.

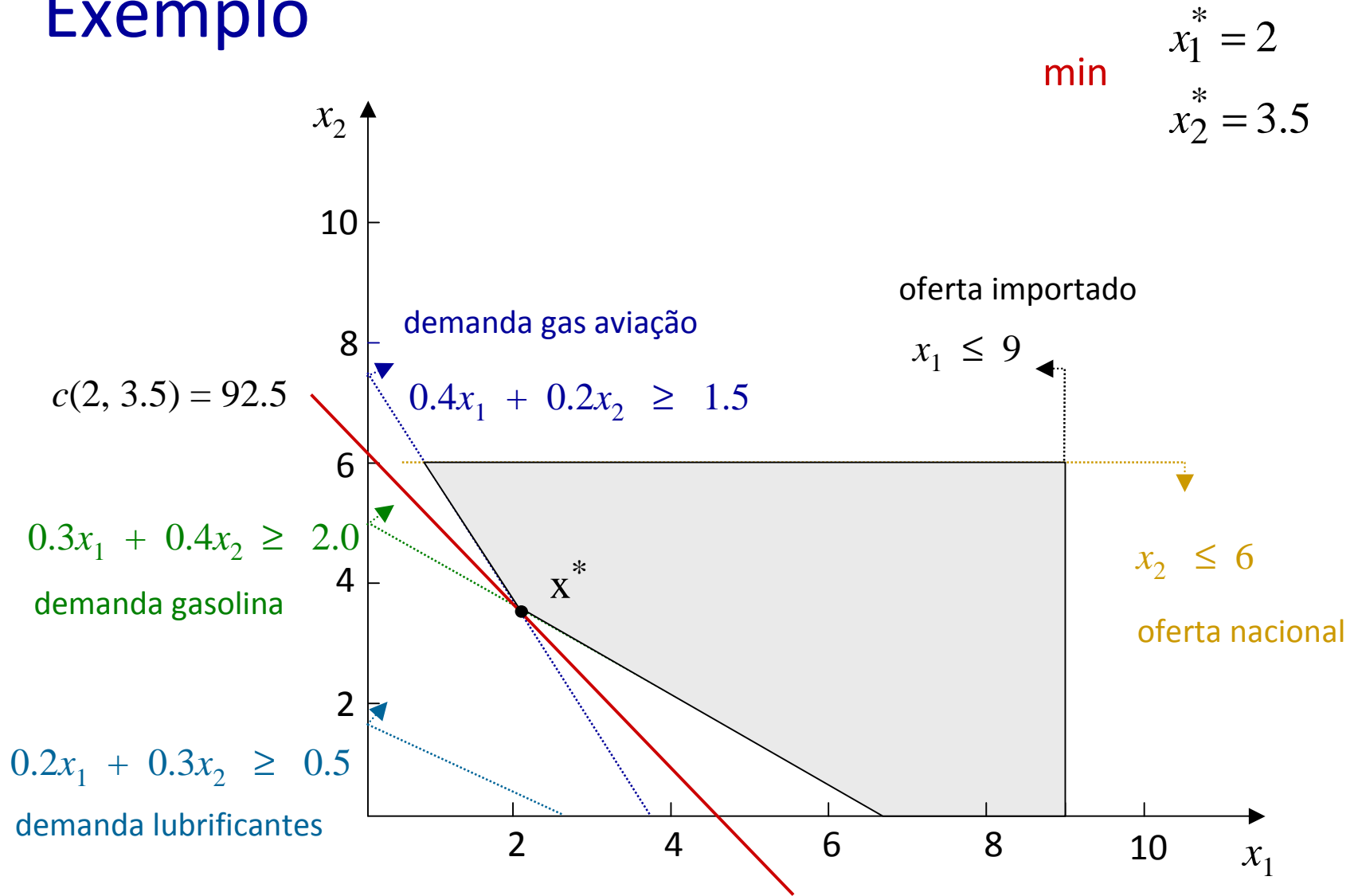
2-Análise de sensibilidade em PL

- Como variações nos parâmetros afetam a solução ótima

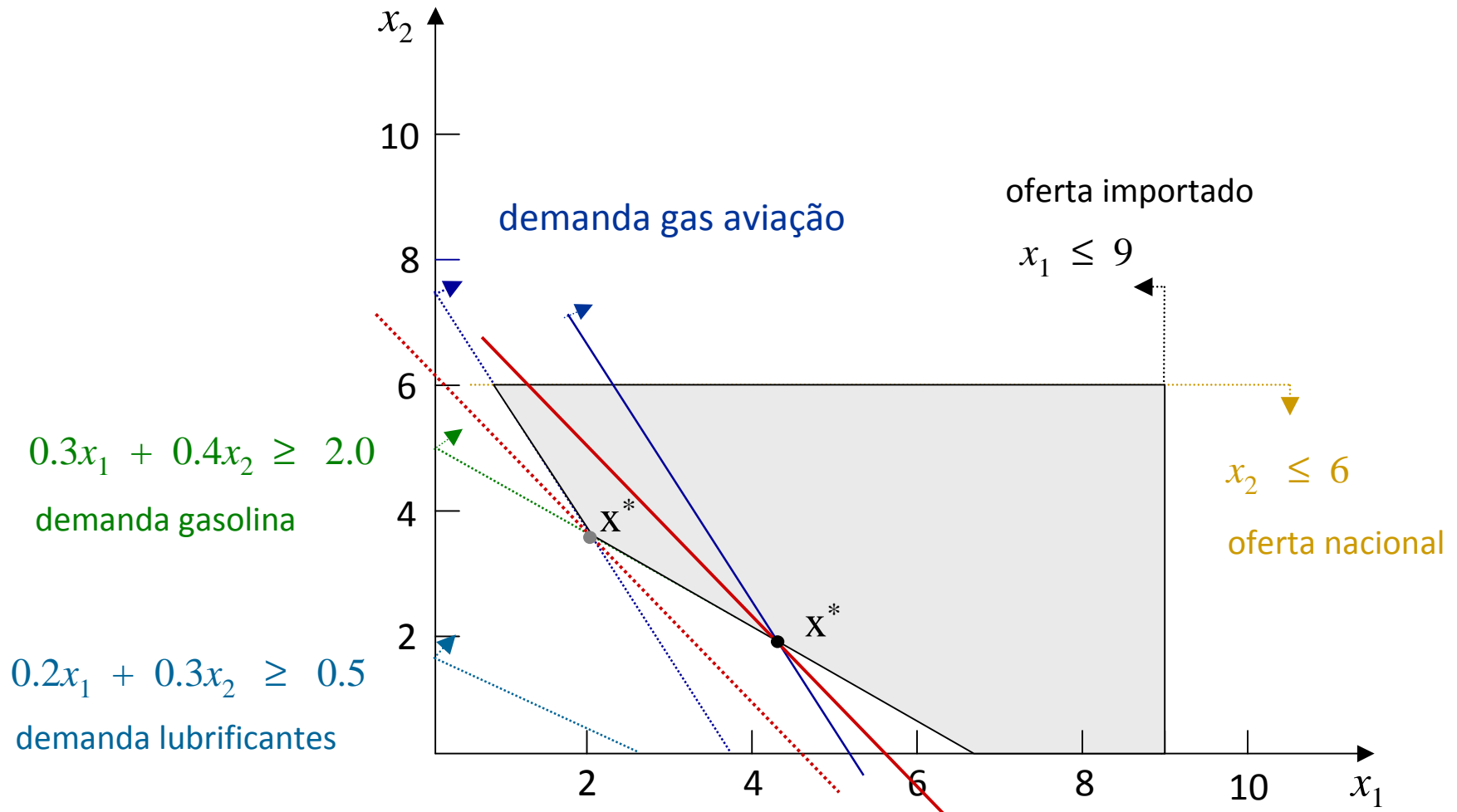
Exemplo: Modelo da Refinaria de Petrolinea

$$\begin{array}{llll} \min & 20x_1 + 15x_2 & & \\ \text{sa} & 0.3x_1 + 0.4x_2 \geq 2.0 & \text{demanda gasolina} & \\ & 0.4x_1 + 0.2x_2 \geq 1.5 & \text{demanda gas aviação} & \\ & 0.2x_1 + 0.3x_2 \geq 0.5 & \text{demanda lubrificantes} & \\ & x_1 \leq 9 & \text{oferta petróleo importado} & \\ & & x_2 \leq 6 & \text{oferta petróleo nacional} & \\ & x_1, x_2 \geq 0 & & \end{array}$$

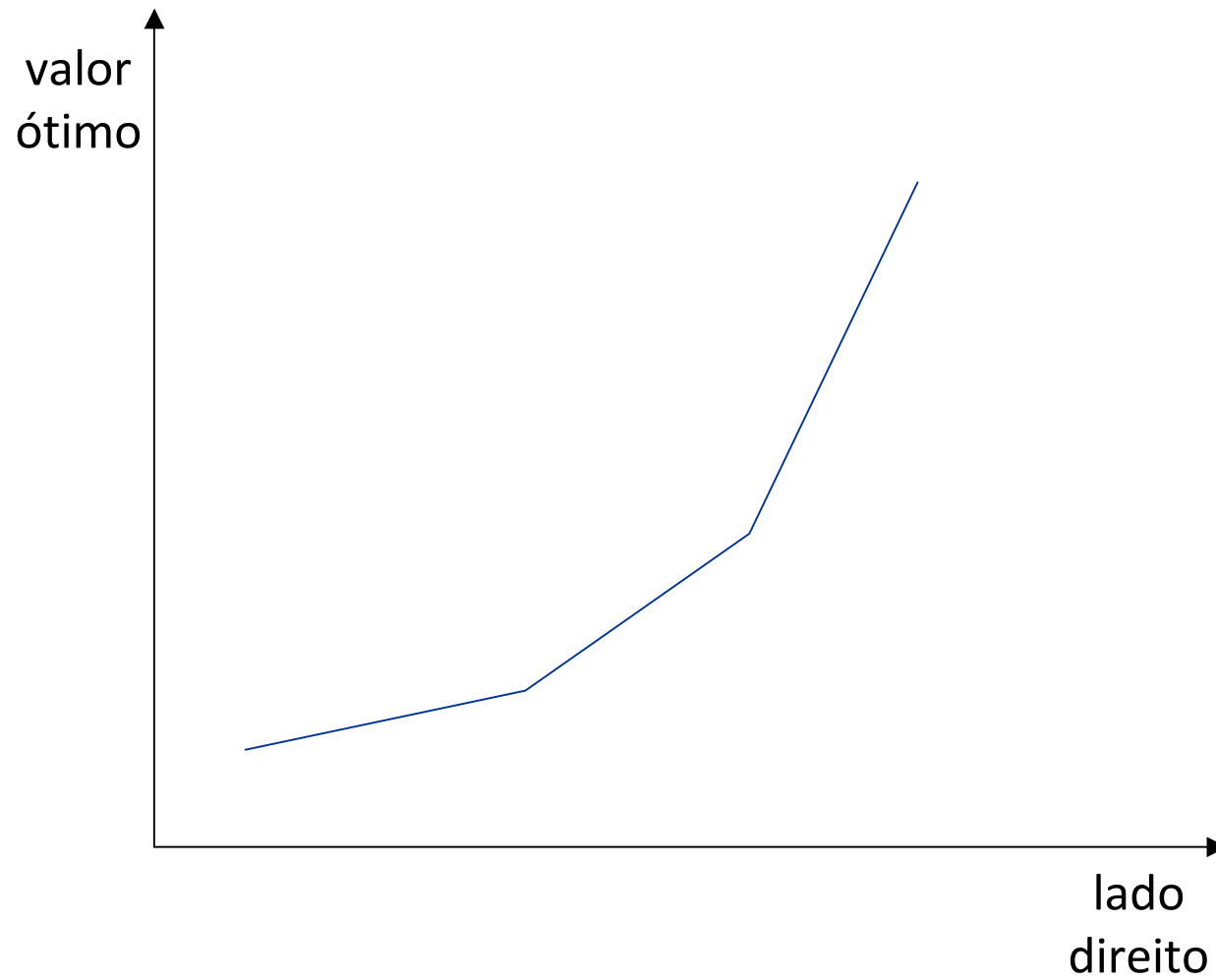
Exemplo



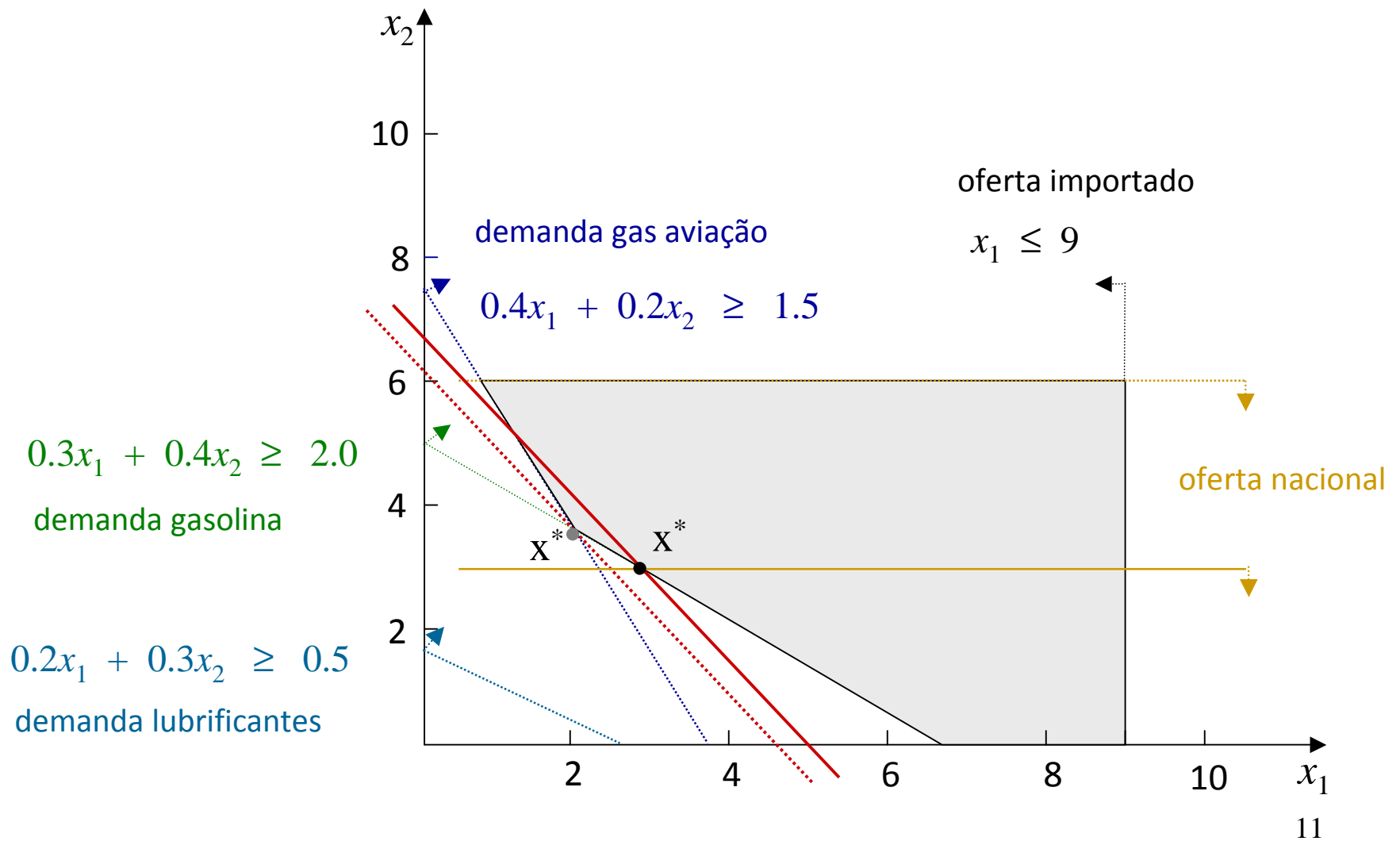
Variação de demanda: Exemplo



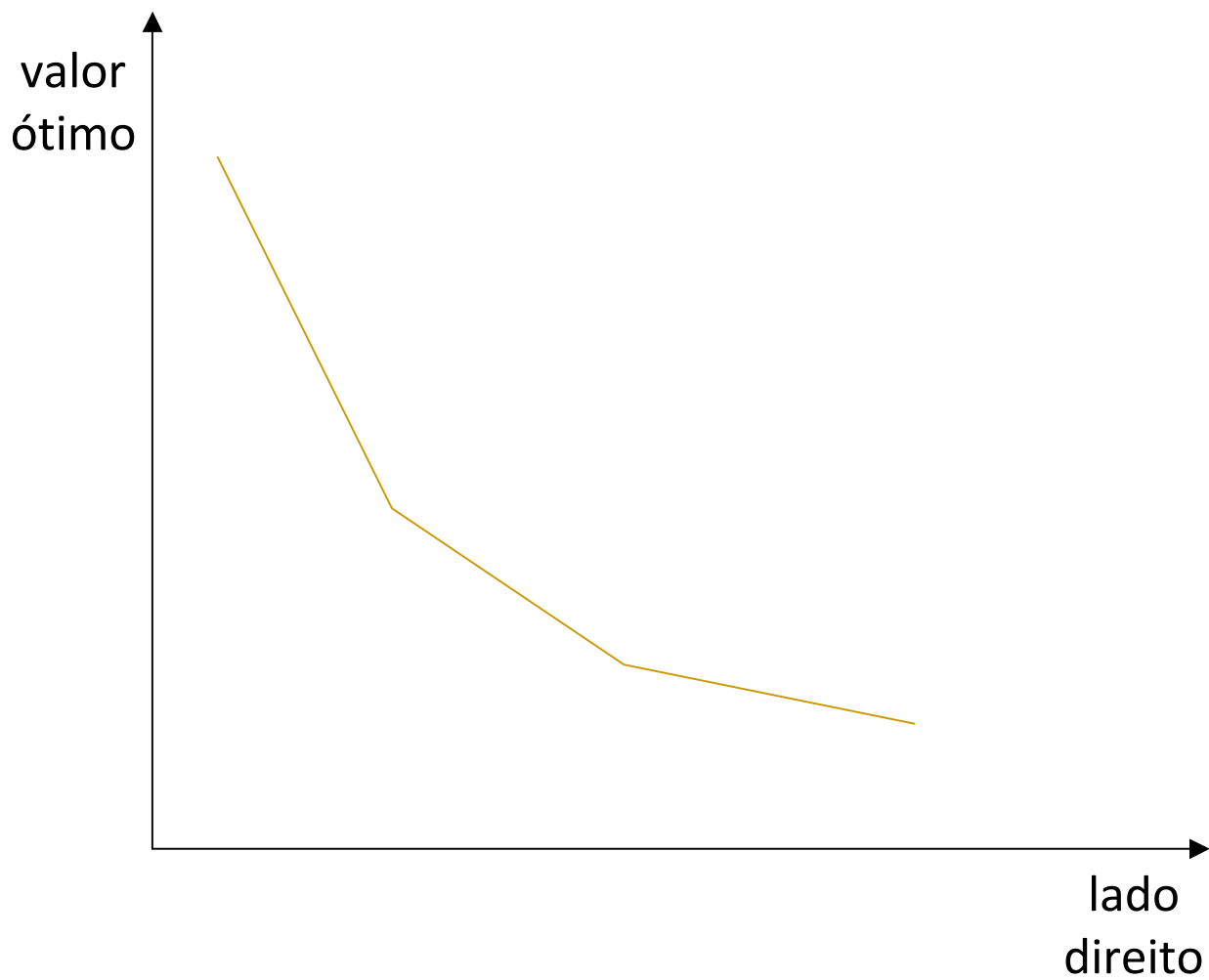
Variação de demanda



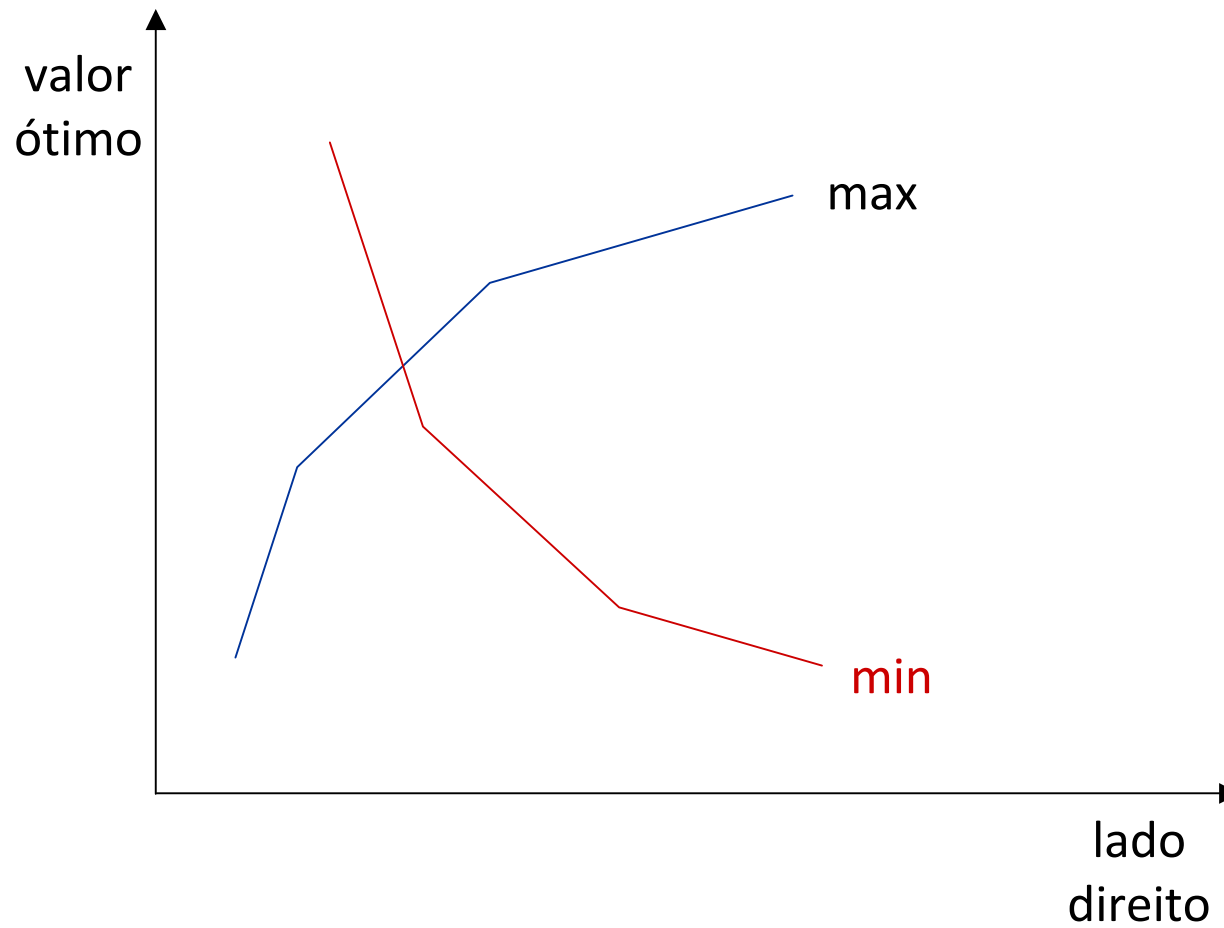
Variação de oferta: Exemplo



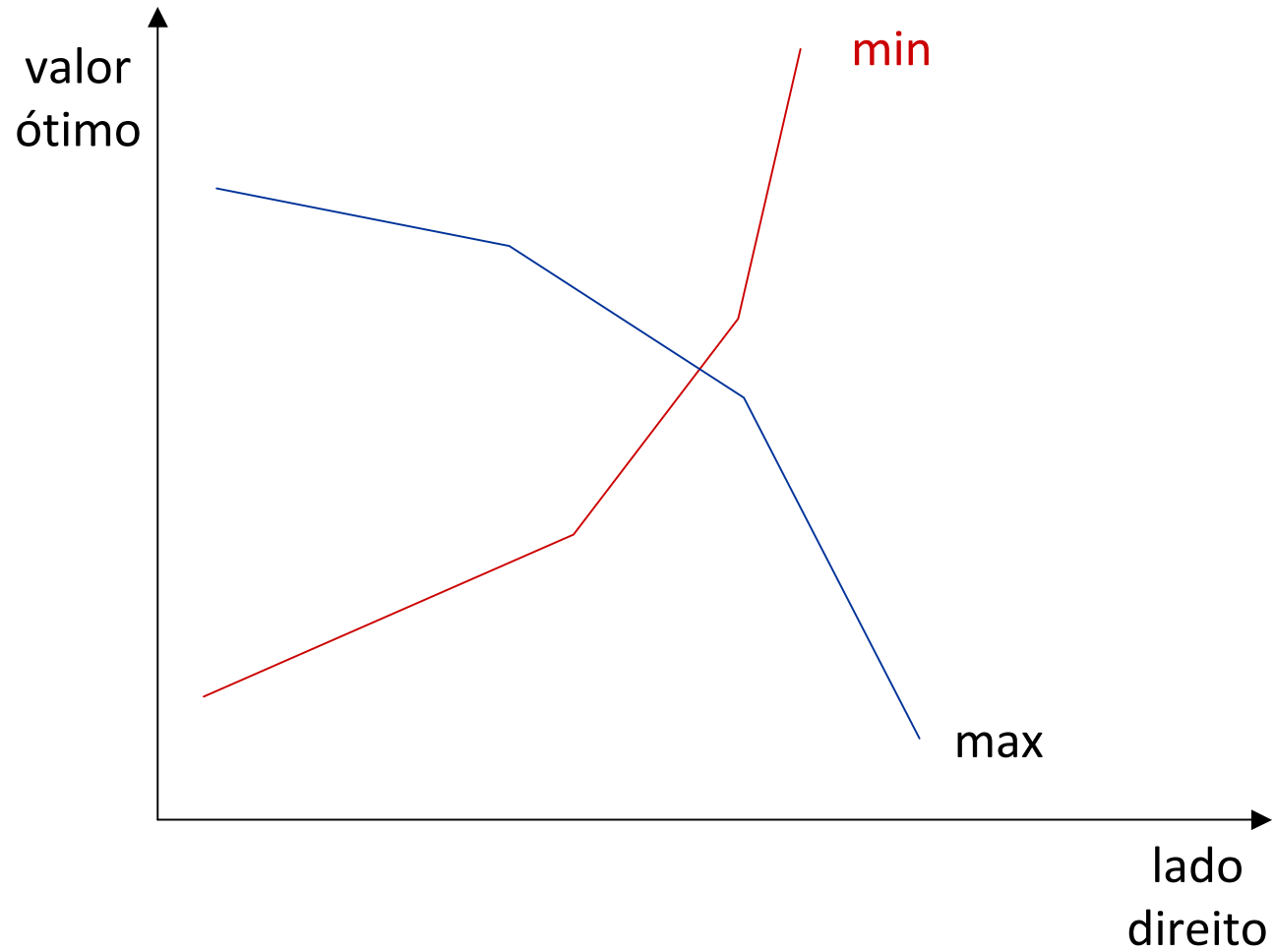
Variação de oferta: Exemplo



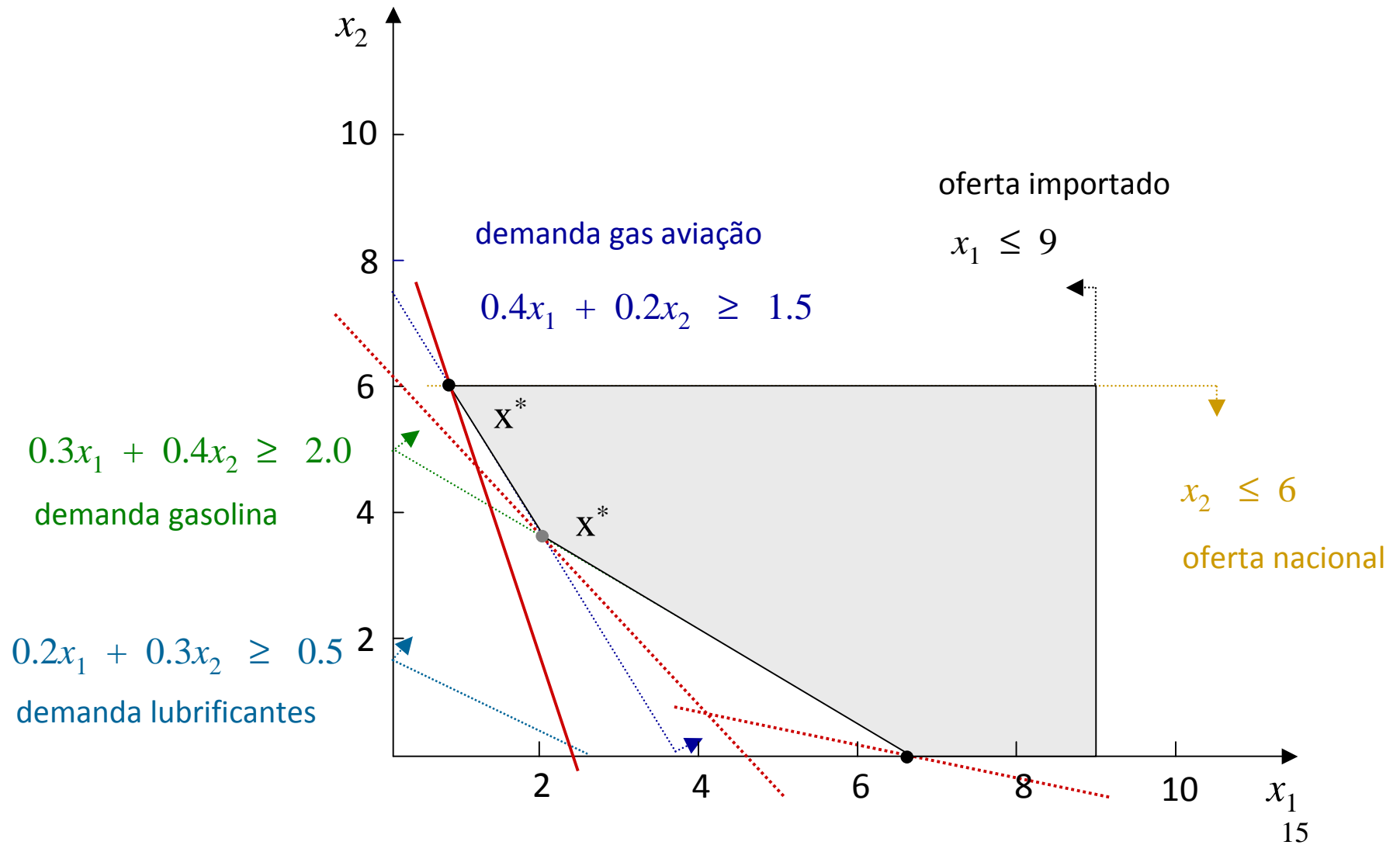
Em geral: Variação de oferta (\leq)



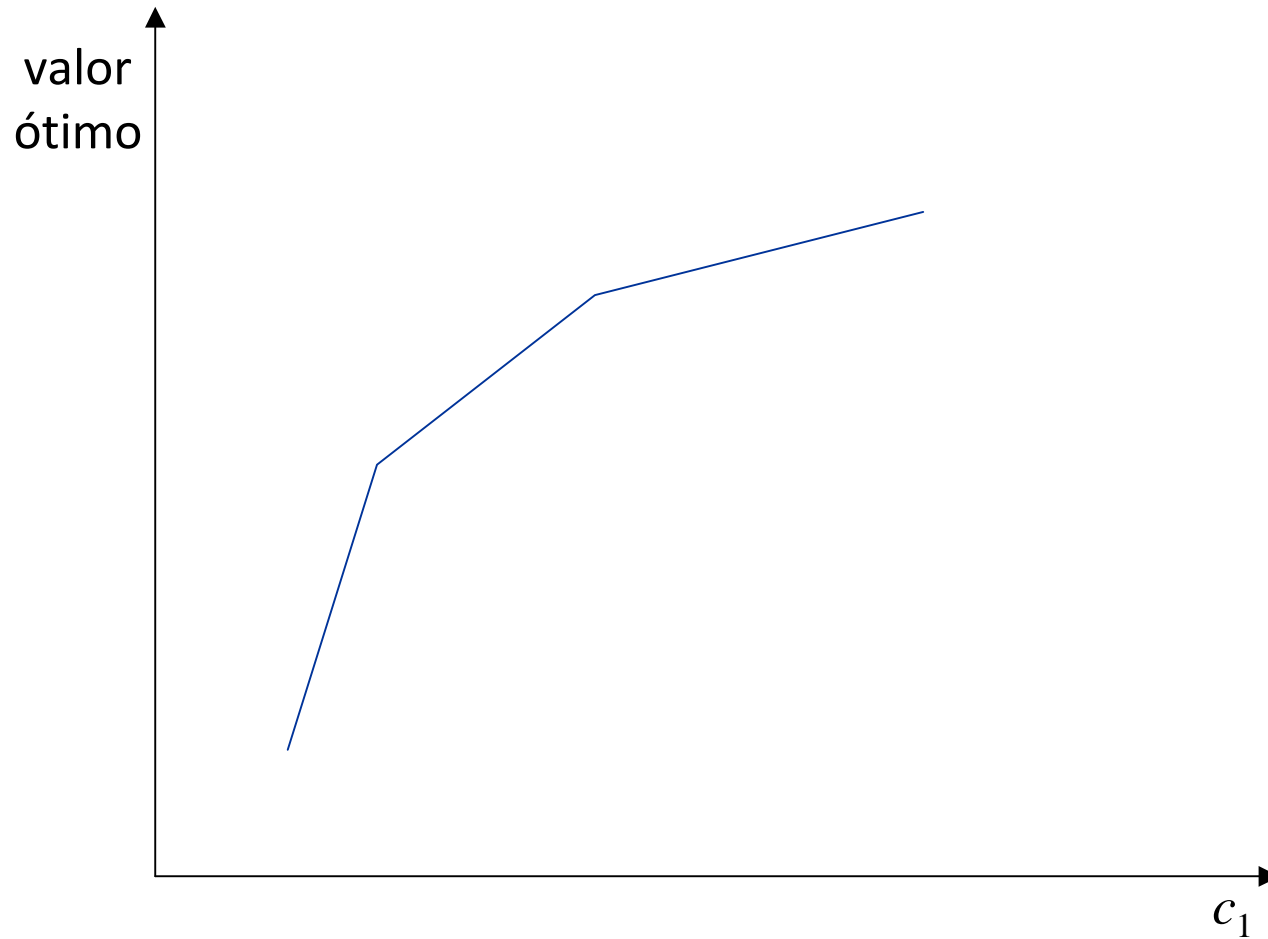
Em geral: Variação de demanda (\geq)



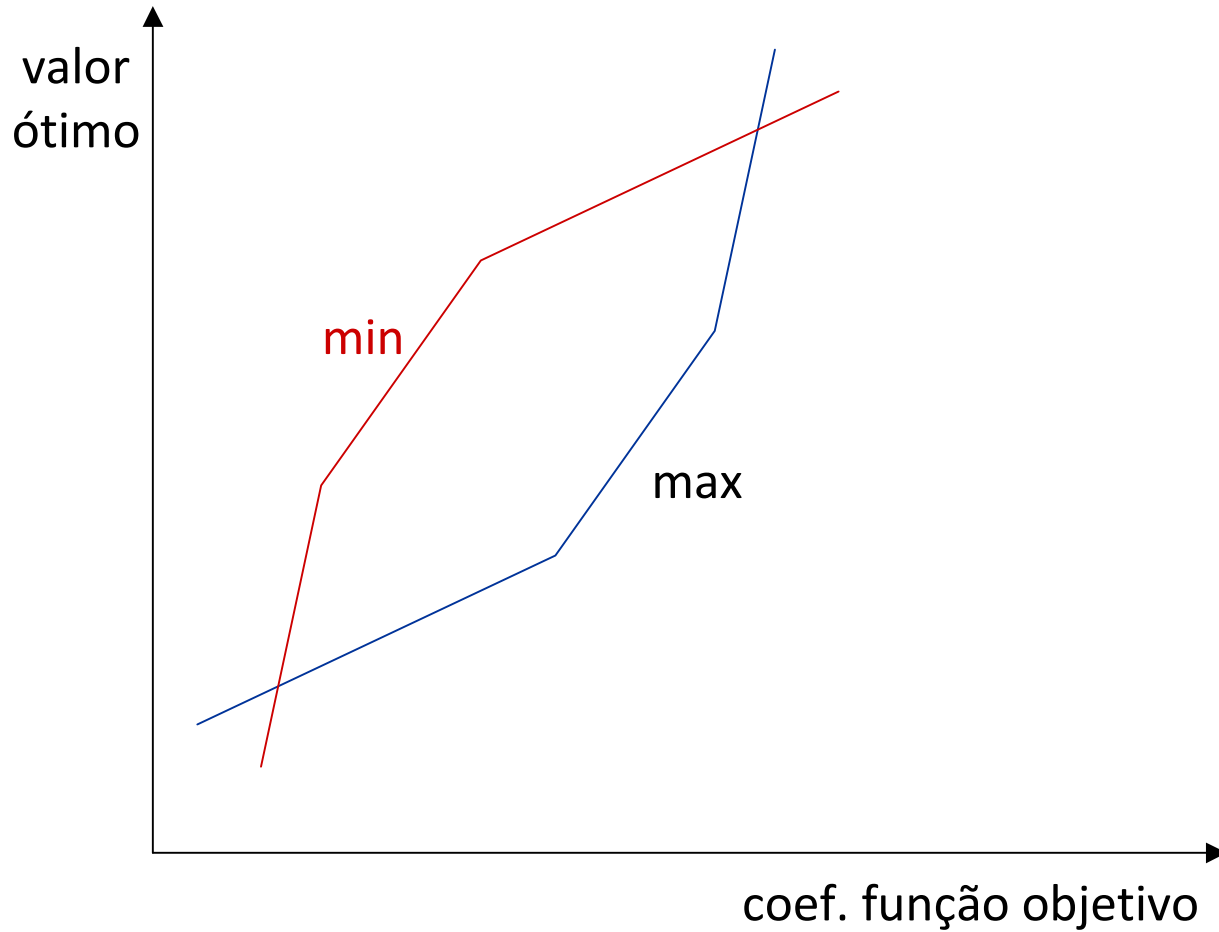
Variação função objetivo: Exemplo (custo)



Variação no coeficiente c_1 : Exemplo



Em geral: Variação coeficiente



3-Sensibilidade e dualidade

- Modelo primal: modela a aplicação de interesse
- Modelo dual : modelo auxiliar que caracteriza sensibilidade dos resultados do modelo primal com relação a variação nos parâmetros do modelo
- Variáveis duais
 - uma (v_i) para cada restrição (i) do primal
 - taxa de variação do valor ótimo primal/unidade lado direito
 - aumentando valor de um dos parâmetros (b_i)

Tipo Restrição	Aumenta lado direito	Diminui lado direito
Oferta (\leq)	Relaxa	Aperta
Demanda (\geq)	Aperta	Relaxa

Variável dual v_i

Primal	min	max
$i \text{ é } \leq$	$v_i \leq 0$	$v_i \geq 0$
$i \text{ é } \geq$	$v_i \geq 0$	$v_i \leq 0$
$i \text{ é } =$	irrestrita	irrestrita

i -ésima restrição

- Relaxa restrições
 - valor ótimo melhora ou permanece o mesmo
 - maior (max)
 - menor (min)

- Aperta restrições
 - valor ótimo piora ou permanece o mesmo
 - menor (max)
 - maior (min)

Exemplo

$$\begin{array}{llllll} \text{min} & 20x_1 + 15x_2 & & & & \\ \text{sa} & 0.3x_1 + 0.4x_2 \geq 2.0 & v_1 \geq 0 & & \text{demanda gasolina} & \\ & 0.4x_1 + 0.2x_2 \geq 1.5 & v_2 \geq 0 & & \text{demanda gas aviação} & \\ & 0.2x_1 + 0.3x_2 \geq 0.5 & v_3 \geq 0 & & \text{demanda lubrificantes} & \\ & x_1 \leq 9 & v_4 \leq 0 & & \text{oferta petróleo importado} & \\ & & & & & \\ & & x_2 \leq 6 & v_5 \leq 0 & \text{oferta petróleo nacional} & \\ & x_1, x_2 \geq 0 & & & & \end{array}$$

v_1 (1000\$/1000 barris): custo implícito para produzir 1000 barris adicionais de gasolina quando a demanda é de 2000 barris (preço marginal da gasolina)

v_4 (1000\$/1000 barris): valor de 1000 barris adicionais de petróleo importado quando o nível oferta é 9000 barris

Formulação modelo dual

$$\begin{array}{ll} \min & \sum_j c_j x_j \\ \text{sa} & \sum_j a_{ij} x_j \geq b_i \\ & x_j \geq 0 \end{array}$$

Primal

$$\begin{array}{ll} \max & \sum_i b_i v_i \\ \text{sa} & \sum_i a_{ij} v_i \leq c_j \\ & v_i \geq 0 \end{array}$$

Dual

Exemplo

$$\begin{array}{llll} \min & 20x_1 + 15x_2 & & \\ \text{sa} & 0.3x_1 + 0.4x_2 \geq 2.0 & \text{demanda gasolina} & \\ & 0.4x_1 + 0.2x_2 \geq 1.5 & \text{demanda gas aviação} & \\ & 0.2x_1 + 0.3x_2 \geq 0.5 & \text{demanda lubrificantes} & \\ & x_1 \leq 9 & \text{oferta petróleo importado} & \\ & & x_2 \leq 6 & \text{oferta petróleo nacional} \\ & x_1, x_2 \geq 0 & & \end{array}$$

Primal

$$\begin{array}{ll} \max & 2v_1 + 15v_2 + 0.5v_3 + 9v_4 + 6v_5 \\ \text{sa} & 0.3v_1 + 0.4v_2 + 0.2v_3 + 1v_4 \leq 20 \\ & 0.4v_1 + 0.2v_2 + 0.3v_3 + 1v_5 \leq 15 \\ & v_1, v_2, v_3 \geq 0; v_4, v_5 \leq 0 \end{array}$$

Dual

Características do modelo dual

- Variáveis duais: fornecem preços implícitos de uma unidade marginal do recurso modelado por cada restrição quando o limite do lado direito é atingido
- Valor marginal implícito (minimização) ou preço (maximização) de uma unidade de atividade (variável primal) j devido à variável dual v_i é $\sum_i a_{ij}v_i$, onde a_{ij} é o coeficiente da atividade j no lado esquerdo da i -ésima restrição
- A cada atividade x_j corresponde a restrição dual

$$\sum_i a_{ij}v_i \leq c_j \quad \text{minimização}$$

$$\sum_i a_{ij}v_i \geq c_j \quad \text{maximização}$$

4-Relações entre modelo primal e dual

- Se primal possui solução ótima então $\sum_j c_j x_j^* = \sum_i b_i v_i^*$
- Folga complementar primal
 - ou a solução primal ativa a i -ésima restrição primal, ou $v_i = 0$
- Folga complementar dual
 - ou solução ótima primal é $x_j = 0$, ou v_i ativa j -ésima restrição dual

$$\left(\sum_j a_{ij} x_j - b_i \right) v_i = 0 \quad \left(c_j - \sum_i v_i a_{ij} \right) x_j = 0$$

- Dualidade fraca: para qualquer valor factível de x_j e v_i :

$$\sum_j c_j x_j \geq \sum_i b_i v_i \quad \text{primal é minimizar}$$

$$\sum_j c_j x_j \leq \sum_i b_i v_i \quad \text{primal é maximizar}$$

$$\begin{aligned} \sum_j c_j x_j - \sum_i b_i v_i &= \sum_j c_j x_j \left(-\sum_i \sum_j v_i a_{ij} x_j + \sum_i \sum_j v_i a_{ij} x_j \right) - \sum_i b_i v_i \\ &= \left(\sum_j c_j x_j - \sum_i \sum_j v_i a_{ij} x_j \right) + \left(\sum_i \sum_j v_i a_{ij} x_j - \sum_i b_i v_i \right) = \\ &= \left(\sum_j c_j x_j - \sum_i \sum_j a_{ij} v_i x_j \right) + \left(\sum_i \sum_j a_{ij} x_j v_i - \sum_i b_i v_i \right) = \\ &= \sum_j \left(c_j - \sum_i v_i a_{ij} \right) x_j + \sum_i \left(\sum_j a_{ij} x_j - b_i \right) v_i \end{aligned}$$

- Dualidade forte: se o ou primal ou o dual possui uma solução ótima, então ambos possuem solução ótima e

$$\sum_j c_j x_j^* = \sum_i b_i v_i^*$$

$$vB = (c_{1st}, c_{2nd}, \dots, c_{mth})$$

$$\bar{c}_j = c_j - \sum_i a_{ij} v_i \geq 0 \quad (\text{supondo minimização})$$

Se simplex revisado pára com uma solução ótima, então $v = cB^{-1}$ é solução ótima para o modelo dual correspondente

1 - Se v satisfaz condições de otimalidade, então é solução factível do dual

se $\bar{c}_j = c_j - \sum_i a_{ij}v_i \geq 0 \quad \forall \text{ variáveis } j \text{ (forma padrão)}$

então $\sum_i a_{ij}v_i \leq c_j \quad \text{(supondo minimização)}$

2 - Valor da função objetivo do modelo dual para v que satisfaz condição de otimalidade do modelo primal é idêntico ao valor da função objetivo do modelo primal

$$1 - \quad c_j - \sum_i a_{ij} v_i \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_i a_{ij} v_i \leq c_j$$

$$a_{kj} = \begin{cases} +1 & k = i \text{ e } i \text{ é do tipo } \leq \\ -1 & k = i \text{ e } i \text{ é do tipo } \geq \\ 0 & \text{ caso contrário} \end{cases} \quad (\text{para as variáveis de folga/excesso})$$

$$\text{se } \leq \text{ então } -(+1v_i) \geq 0 \Rightarrow v_i \leq 0$$

$$\text{se } \geq \text{ então } -(-1v_i) \geq 0 \Rightarrow v_i \geq 0$$

$$2 - \sum_i b_i v_i = (c_{1st}, c_{2nd}, \dots, c_{mth}) \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b}$$

$$(x_{1st}, x_{2nd}, \dots, x_{mth}) = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b} \quad (\text{componentes não nulas são básicas})$$

$$\sum_j c_j x_j^* = c_{1st} x_{1st} + c_{2nd} x_{2nd} + \dots + c_{mth} x_{mth} = (c_{1st}, c_{2nd}, \dots, c_{mth}) \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b}$$

$$\sum_j c_j x_j^* \geq \sum_i b_i v_i \quad (\text{dualidade fraca}) \quad \therefore \quad \sum_j c_j x_j^* = \sum_i b_i v_i^*$$

Folga complementar ótimo primal e dual

$$0 = \sum_j c_j x_j^* - \sum_i b_i v_i^* =$$

$$= \sum_j \left(c_j - \sum_i v_i^* a_{ij} \right) x_j^* + \sum_i \left(\sum_j a_{ij} x_j^* - b_i \right) v_i^*$$

$$\Rightarrow \left(c_j - \sum_i v_i^* a_{ij} \right) x_j^* = 0 \quad \text{e} \quad \left(\sum_j a_{ij} x_j^* - b_i \right) v_i^* = 0$$

5-Modelos ilimitados e infactíveis

$$\sum_j c_j x_j \geq \sum_i b_i v_i \quad (\text{dualidade fraca}) \quad \min$$



modelo primal ilimitado \Leftrightarrow modelo dual infactível

modelo dual ilimitado \Leftrightarrow modelo primal infactível

6-Análise de resultados computacionais

Modelo Petrolinea no solver Excel

Produto	Importado	Nacional	Objetivo	Tipo		
Quantidades (1000 barris)	2	3,5	92,5			
Custos (\$)	20	15				
Restrições	Recurso		Total		Lado direito	Folga
Demanda Gasolina	0,30	0,40	2	\geq	2	0
Demanda Gas Aviação	0,40	0,20	1,5	\geq	1,50	0
Demanda Lubrificante	0,20	0,30	1,45	\geq	0,50	-0,95
Oferta Importado	1,00	0,00	2	\leq	9	7
Oferta Nacional	0,00	1,00	3,5	\leq	6	2,5

Microsoft Excel 8.0 Sensitivity Report
Worksheet: [PetrolineaSolver.xls]
Report Created: 07/09/03 22:37:52

Adjustable Cells

Cell	Name	Final Value	Reduced Cost	Objective Coefficient	Allowable Increase	Allowable Decrease
\$B\$3	Quantidades (1000 barris) Importado	2	0	20	10	8,75
\$C\$3	Quantidades (1000 barris) Nacional	3,5	0	15	11,66666667	5

Constraints

Cell	Name	Final Value	Shadow Price	Constraint R.H. Side	Allowable Increase	Allowable Decrease
\$D\$9	Oferta Importado Total	2	0	9	1E+30	7
\$D\$10	Oferta Nacional Total	3,5	0	6	1E+30	2,5
\$D\$6	Demanda Gasolina Total	2	20	2	0,625	0,875
\$D\$7	Demanda Gas Aviação Total	1,5	35	1,5	1,166666667	0,5
\$D\$8	Demanda Lubrificante Total	1,45	0	0,5	0,95	1E+30

Observação

Este material refere-se às notas de aula do curso EA 044 Planejamento e Análise de Sistemas de Produção da Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação da Unicamp. Não substitui o livro texto, as referências recomendadas e nem as aulas expositivas. Este material não pode ser reproduzido sem autorização prévia dos autores. Quando autorizado, seu uso é exclusivo para atividades de ensino e pesquisa em instituições sem fins lucrativos.