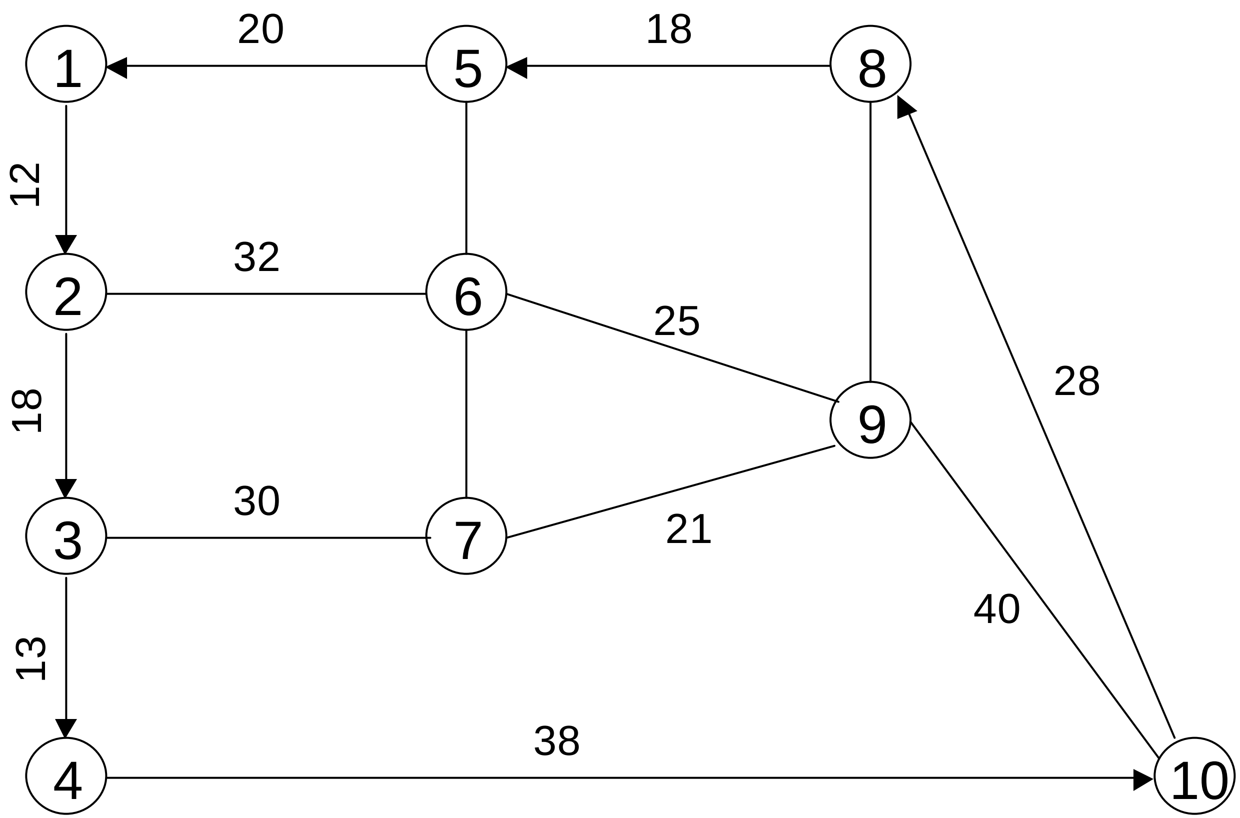
Caminhos Mínimos
e
Programação Dinâmica Discreta

Modelos de Caminhos Mínimos

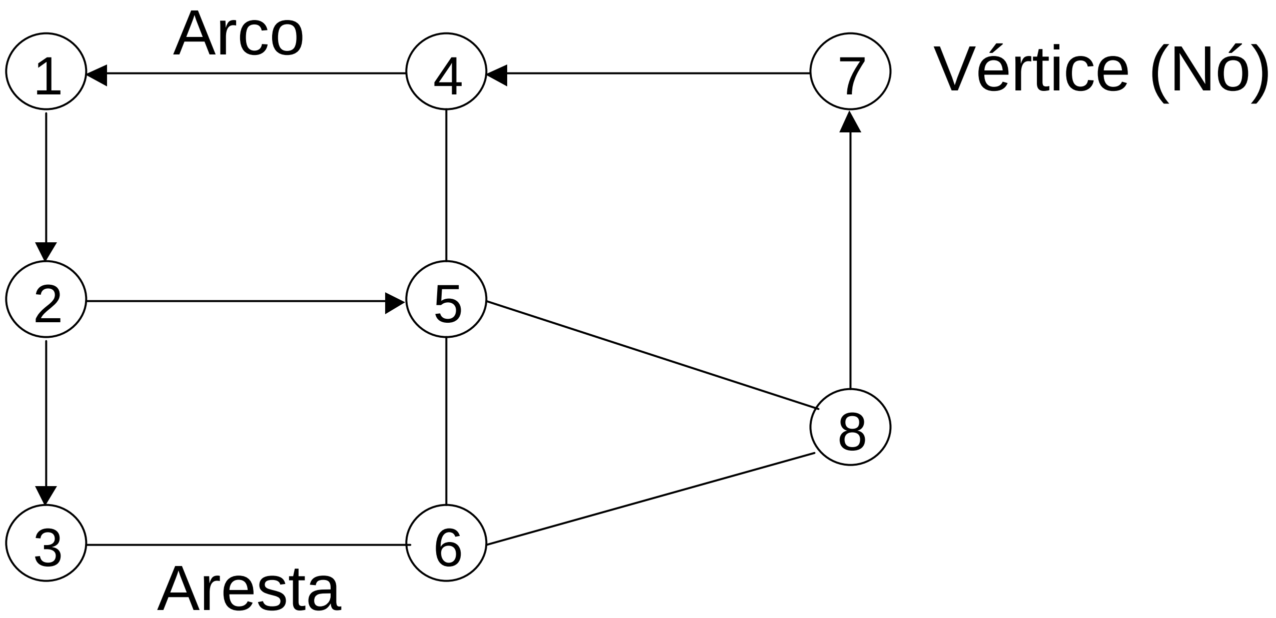


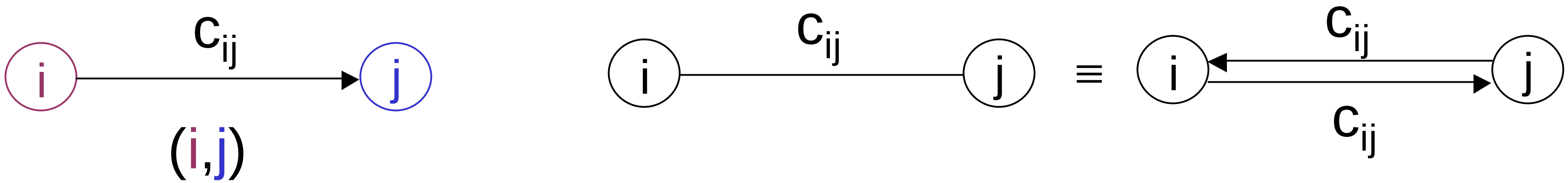
$s \rightarrow t$

$s \rightarrow k, \ \forall\, k$

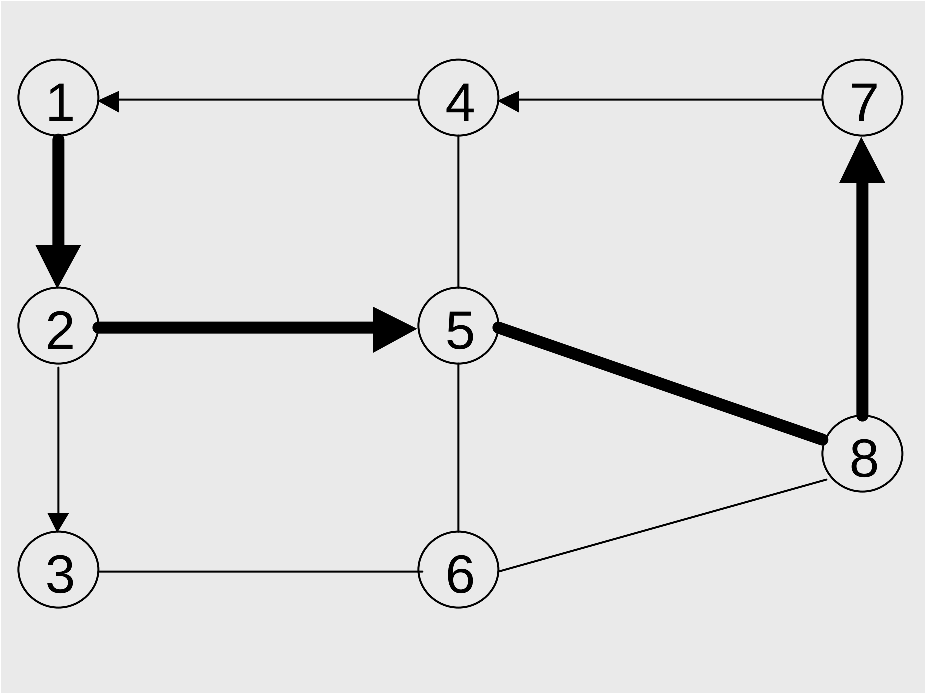
$k \rightarrow l, \ \forall\, k, l$

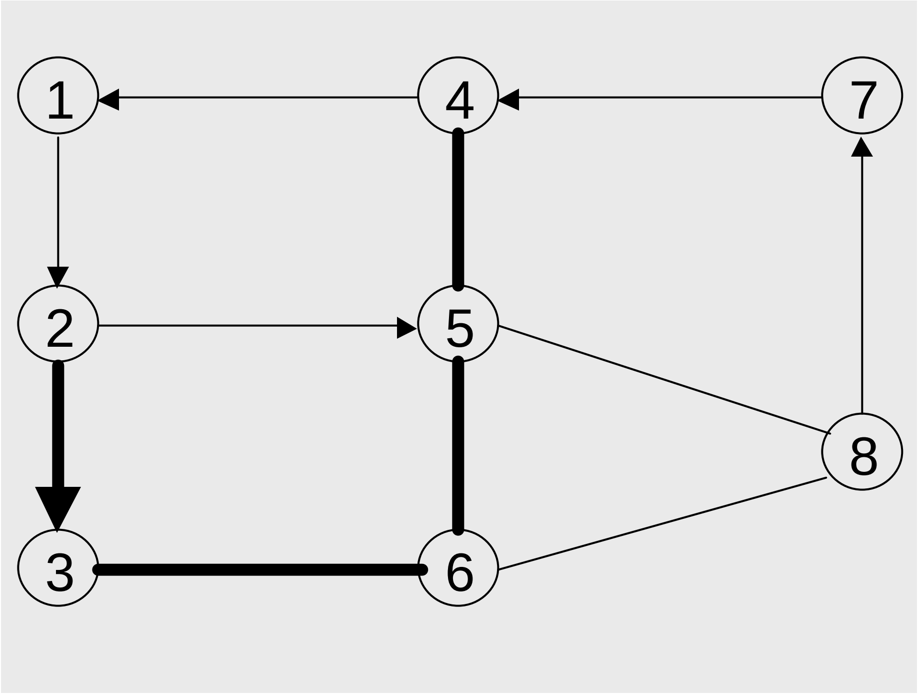
Grafos





Caminhos

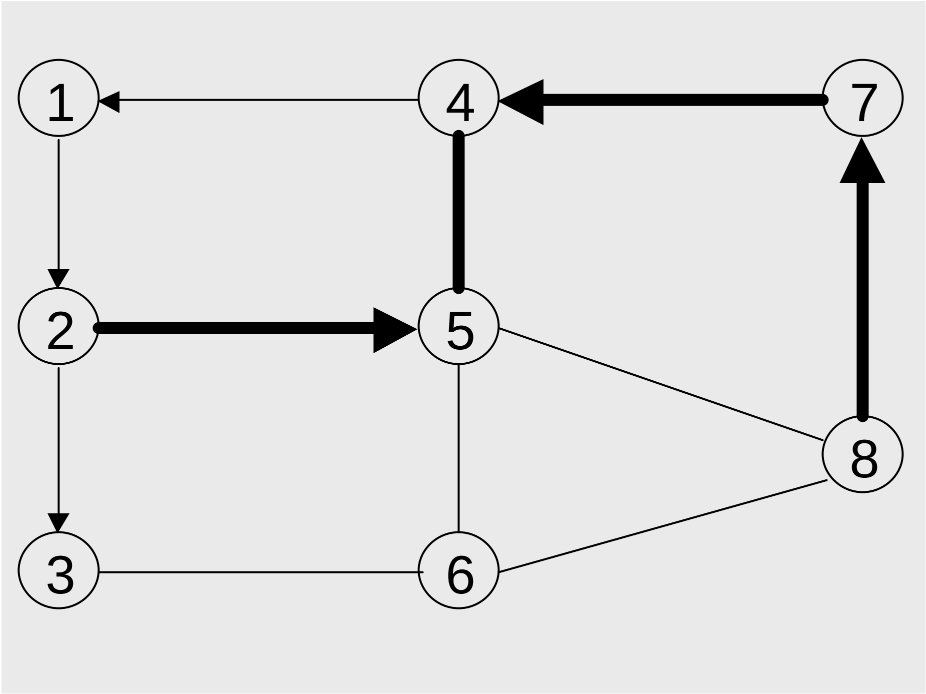


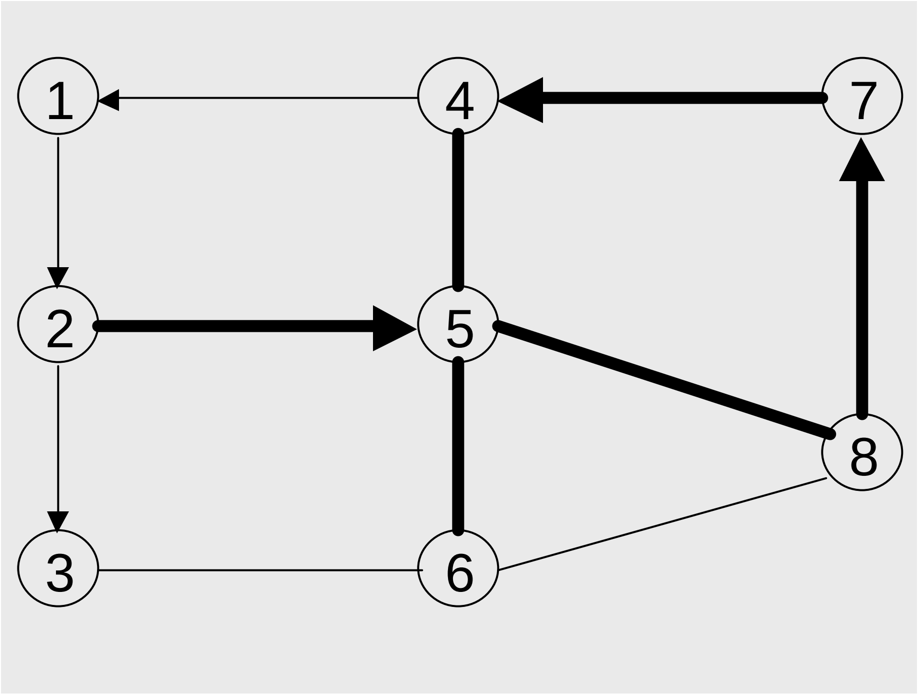


Caminho mínimo:

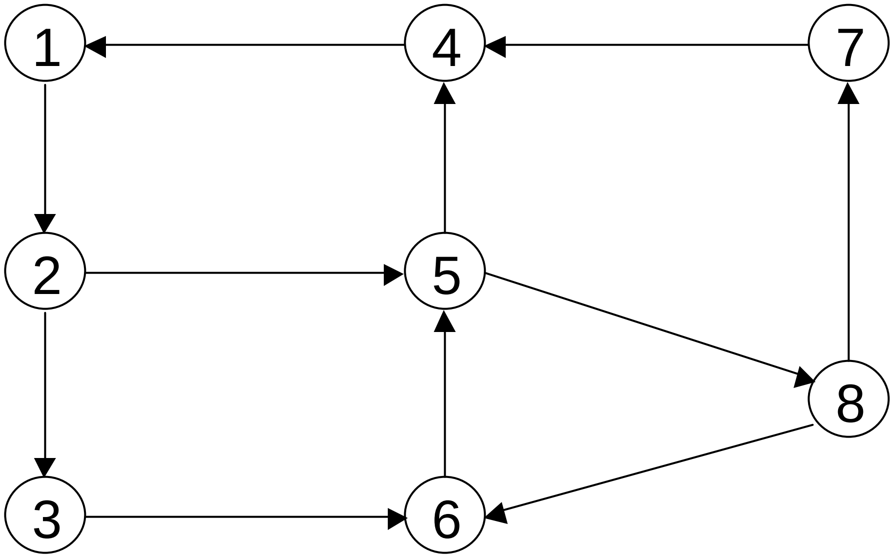
menor caminho entre dois vértices de um grafo

Não são caminhos

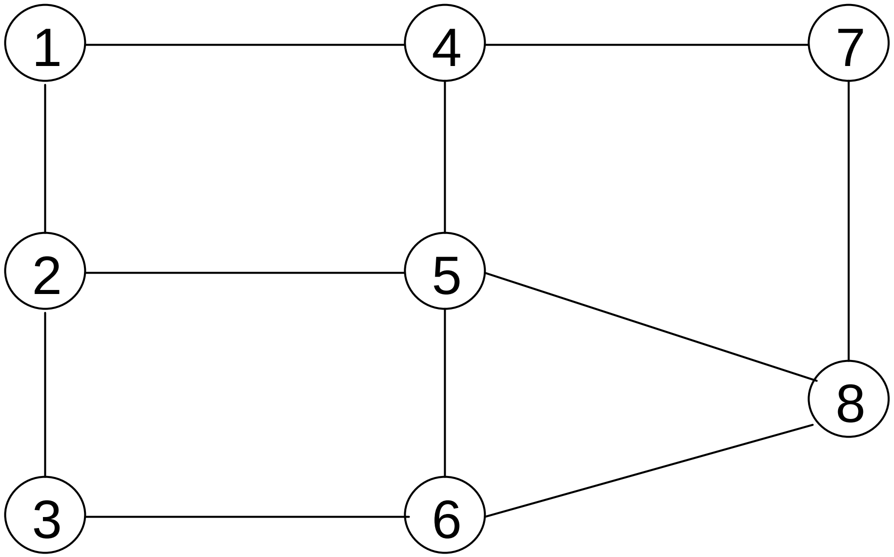


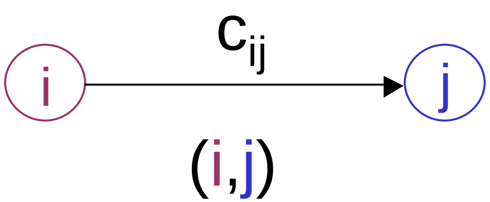


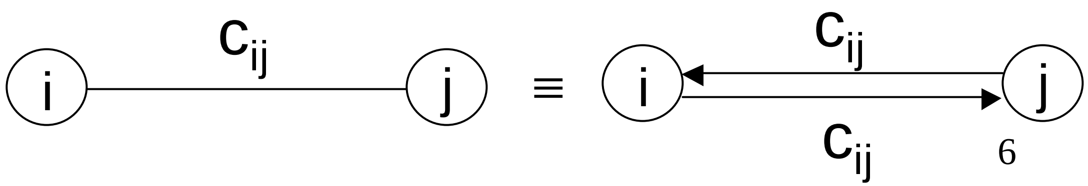
Grafos Dirigidos (dígrafos)



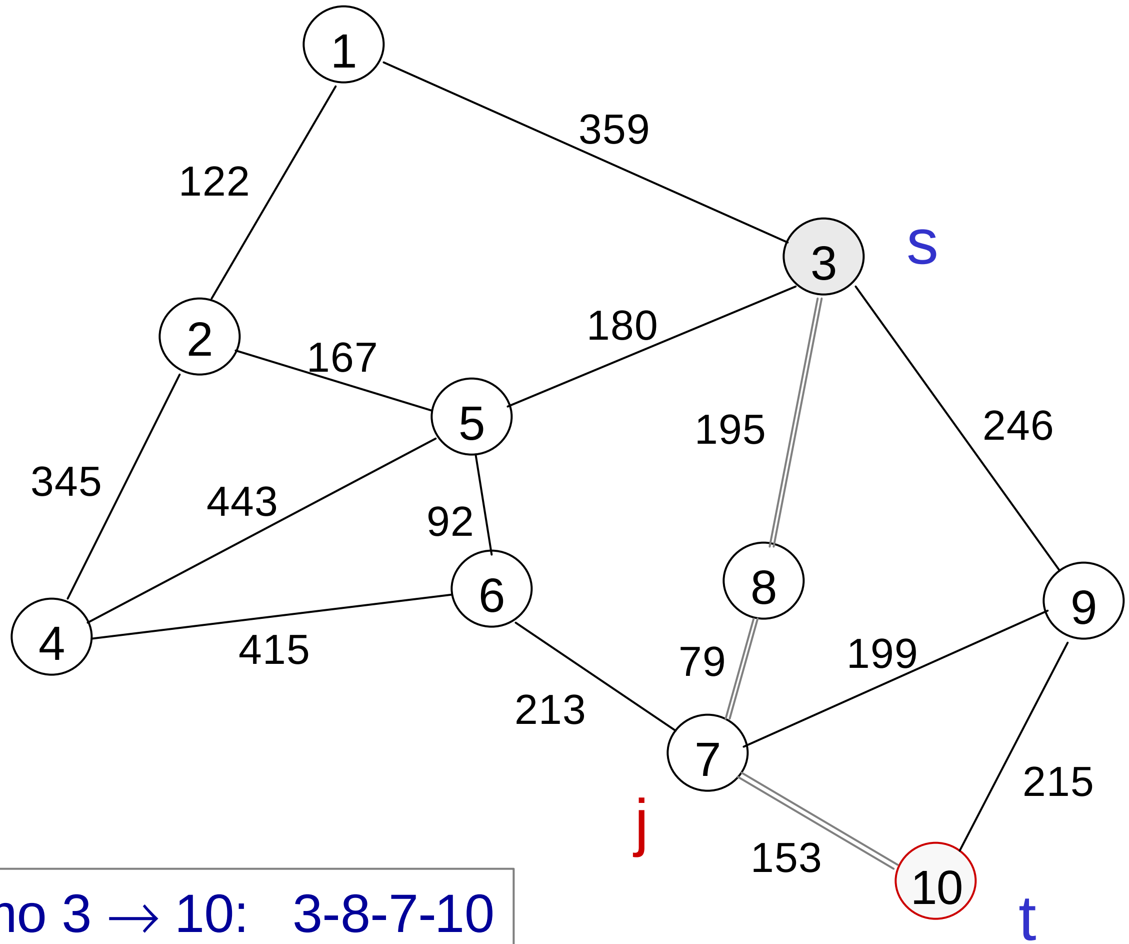
Grafos não Dirigidos







Princípio de Otimalidade de Bellman
Programação Dinâmica



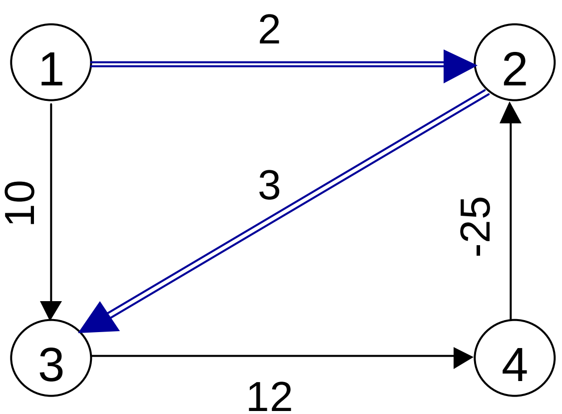
caminho mínimo 3 → 10: 3-8-7-10

⇓

caminho mínimo 3 → 7: 3-8-7

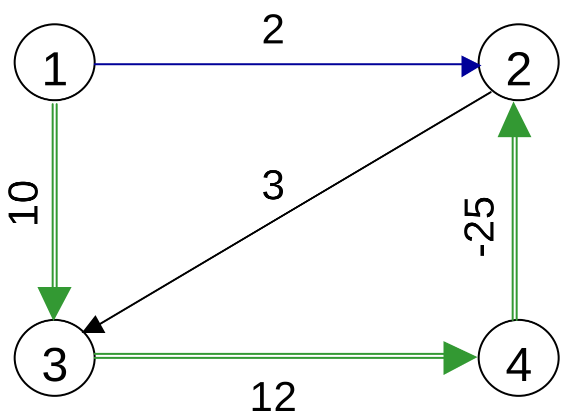
- Ciclo: caminho que inicia e termina no mesmo vértice
  - Ciclo positivo: ciclo com comprimento positivo
  - Ciclo negativo: ciclo com comprimento negativo
- Ciclos negativos criam problemas para sub-caminhos

ótimo de 1 $\rightarrow$ 3



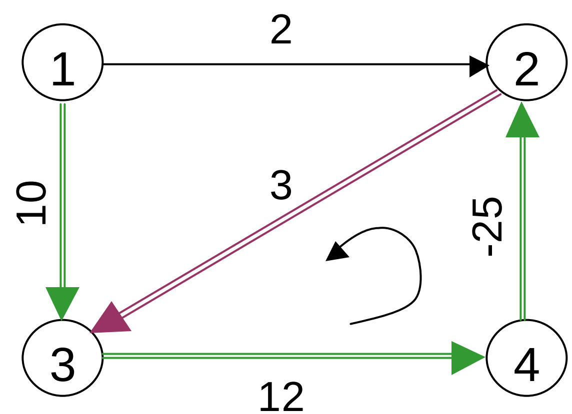
1-2-3

ótimo de 1 $\rightarrow$ 2



1-3-4-2

extendendo $\rightarrow$ 3
ótimo de 1 $\rightarrow$ 2



1-3-4-2-3

Princípio de Otimalidade de Bellman: caminhos ótimos em grafos sem ciclos negativos possuem subcaminhos ótimos

Equações funcionais: $s \rightarrow k, \quad \forall k \neq s$

$v[s] = 0$

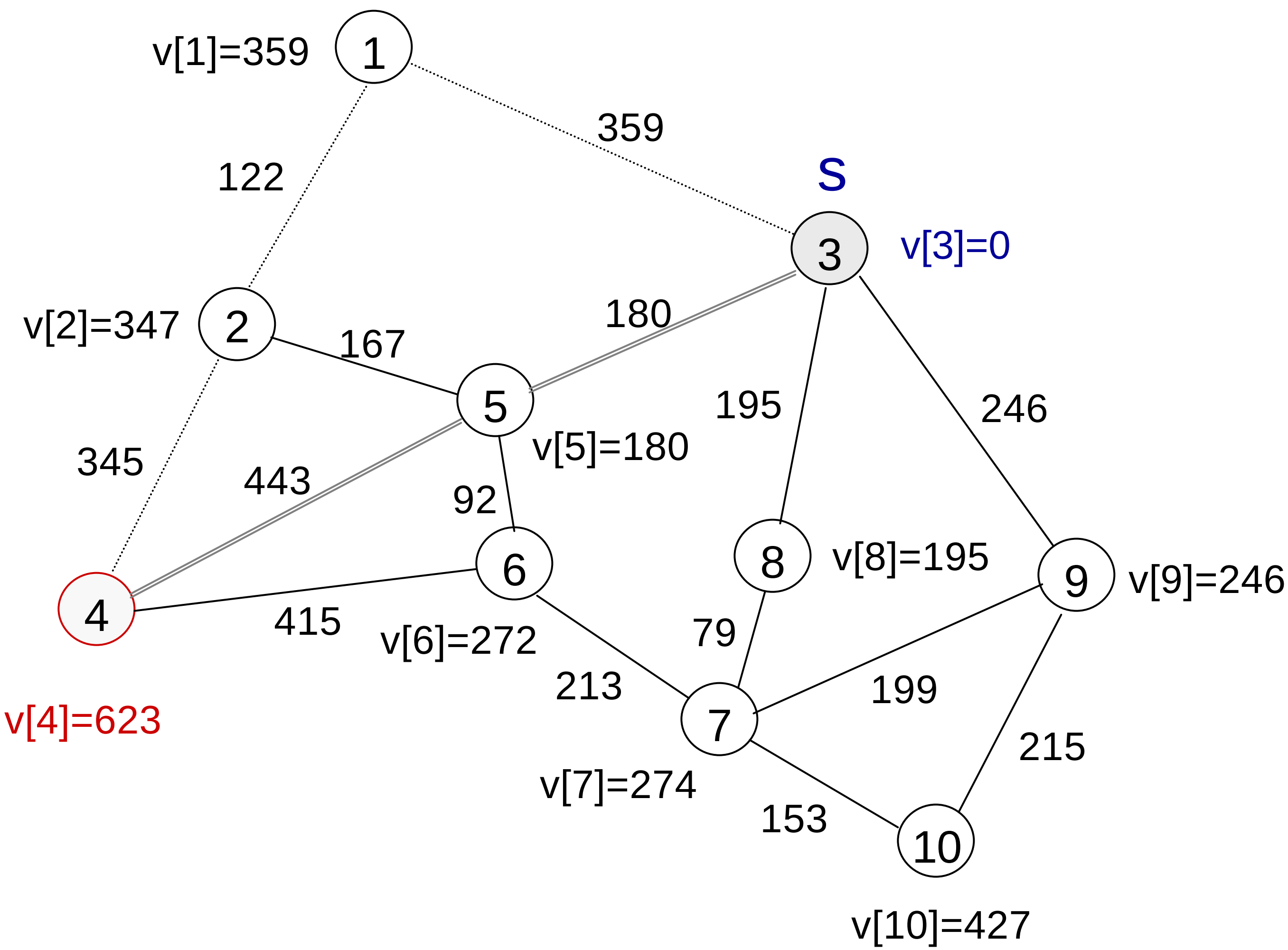
$v[k] = \min \{ v[i] + c_{ik} : (i,k) \text{ existe} \} \; \forall k \neq s$

Se $\nexists$ (i,k) então min { nada } = $+\infty$

Valores v[k] de vértices em um grafo sem ciclos negativos são comprimentos dos caminhos mínimos de um dado vértice **s** se e somente se eles satisfazem as equações funcionais.

v[k] : valor do caminho mínimo entre origem **s** e o vértice k

$v[k] = +\infty$ se não existe caminho $s \rightarrow k$


v[1]=359
1
359
122
S
3
v[3]=0
v[2]=347
2
180
167
5
195
246
345
443
v[5]=180
92
8
v[8]=195
6
9
v[9]=246
4
415
v[6]=272
79
213
7
199
v[4]=623
215
v[7]=274
153
10
v[10]=427

1 - $v[3] = 0$

2 - $v[4] = v[i] + c_{i4}$ (i = 5 minimiza) $\Rightarrow$ $v[4] = v[5] + c_{54}$

$v[5] = v[j] + c_{j5}$ (j = 3 minimiza) $\Rightarrow$ $v[5] = v[s] + c_{s5}$

$v[4] + v[5] = v[5] + v[s] + c_{s5} + c_{54}$

$v[4] = c_{s5} + c_{54}$ comprimento caminho 3 - 5 - 4

3 - Nenhum outro caminho 3 $\rightarrow$ 4 tem comprimento menor

considerar, por exemplo, caminho 3 - 1 - 2 - 4

valores satisfazem as equações funcionais

$v[1] \le v[s] + c_{s1}$

$v[2] \le v[1] + c_{12}$

$v[4] \le v[2] + c_{24}$

$v[1] + v[2] + v[4] \le v[s] + v[1] + v[2] + c_{s1} + c_{12} + c_{24}$

$v[4] \le v[s] + c_{s1} + c_{12} + c_{24}$

$v[4] \le c_{s1} + c_{12} + c_{24}$

caminho 3 -1 - 2 - 4 não pode ter comprimento menor que v[4] !

Equações funcionais: $k \rightarrow l, \quad \forall\, k, l$

$v[k,k] = 0$

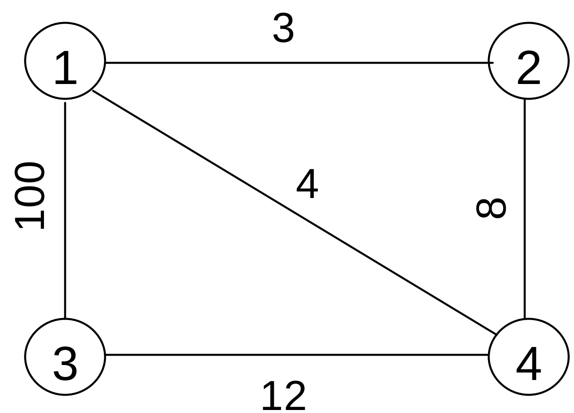
$v[k,l] = \min \{c_{kl}\ , v[k,i] + v[i,l] : \ i \neq k, l \}\ \forall k \neq l$

Se $\nexists$ (i,k) então min { nada } = $+\infty$

Valores v[k,l] de vértices em um grafo sem ciclos negativos são comprimentos dos caminhos mínimos entre os vértice k e l se e somente se eles satisfazem as equações funcionais.

v[k,l] : valor do caminho mínimo entre vértices k e l

$v[k,l] = +\infty$ se não existe caminho $k \rightarrow l$



Caminhos mínimos

	j = 1		j = 2		j = 3		j = 4	
i	v	caminho	v	caminho	v	caminho	v	caminho
1	0	-	3	1-2	16	1-4-3	4	1-4
2	3	2-1	0	-	19	2-1-4-3	7	2-1-4
3	16	3-4-1	19	3-4-1-2	0	-	12	3-4
4	4	1-4	7	4-1-2	12	4-3	0	-

Equações funcionais:

$v[1,4] = \min \{ c_{14}, v[1,2] + v[2,4], v[1,3] + v[3,4] \} = \min \{ 4, 3 + 7, 16 + 12 \} = 4$

$v[2,3] = \min \{ c_{23}, v[2,1] + v[1,3], v[2,4] + v[4,3] \} = \min \{ +\propto, 3 + 16, 7 + 12 \} = 19$

Algoritmo de Bellman-Ford

- Caminho mínimo de um vértice **s** a todos os outros de um grafo

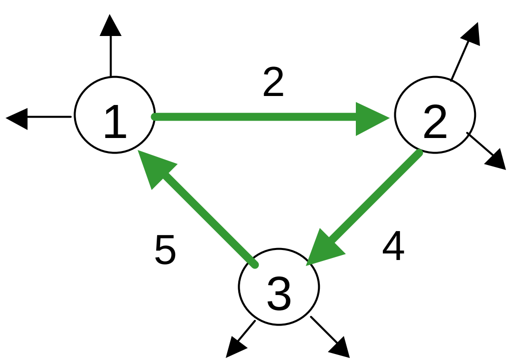
- Equações funcionais: $s \rightarrow k, \quad \forall k \neq s$

  $v[s] = 0$

  $v[k] = \min \{ v[i] + c_{ik} : (i,k) \text{ existe} \} \ \forall k \neq s$

  Se $\exists$ (i,k) então $\min \{ \text{nada} \} = +\propto$

- Ciclos introduzem dependências circulares:



$v[1] = \min \{ v[3] + 5, \ldots \}$
$v[2] = \min \{ v[1] + 2, \ldots \}$
$v[3] = \min \{ v[2] + 4, \ldots \}$

Algoritmo de Bellman-Ford

Passo 0 Inicializa: s vértice origem; $v^0[k] = 0$ se $k = s$; senão $v^0[k] = +\infty$
$t \leftarrow 1$;

Passo 1 Avalia: calcular $v^t[k] \leftarrow \min \{ v^t[i] + c_{ik} : (i,k) \text{ existe} \} \; \forall k \neq s$;
se $v^t[k] < v^{t-1}[k]$ então $d[k]$ = vértice que precede k no melhor caminho;

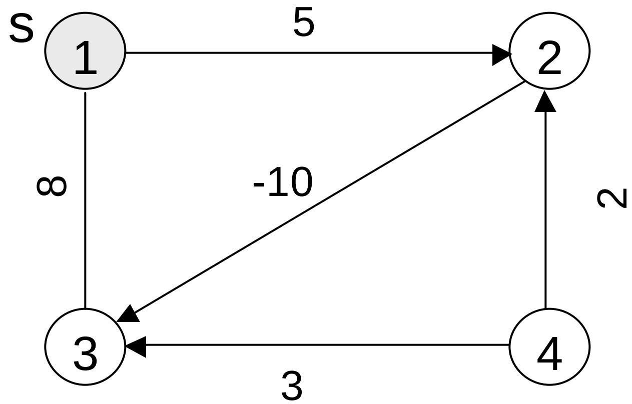
Passo 2 Pára: se $v^t[k] = v^{t-1}[k]$ ou t = número de vértices no grafo;
se $v^t[k]$ muda no último t então existe ciclo negativo;

Passo 3 Avança: se algum $v^t[k]$ mudou e $t <$ número de vértices então
$t \leftarrow t + 1$; ir para o Passo 1;

$v^t[k]$ = valor de $v[k]$ obtido na t-ésima iteração

$d[k]$ = vértice que precede k no melhor caminho $s \rightarrow k$ atual

Exemplo



- Inicializa: $v^0[1] = 0$; $v^0[2] = v^0[3] = v^0[4] = +\propto$; $t = 1$

- $v^1[1] = 0$

$v^1[2] = \min \{ v^0[1] + c_{12} , v^0[4] + c_{42} \} = \min \{ 0 + 5, \propto + 2 \} = 5$; $d[2] = 1$

$v^1[3] = \min \{ v^0[1] + c_{13} , v^0[4] + c_{43} , v^0[2] + c_{23} \} = \min \{ 8, \propto, \propto \} = 8$; $d[3] = 1$

$v^1[4] = \min \{ \} = + \propto$

- $v^2[2] = \min\{ v^1[1] + c_{12}, v^1[4] + c_{42} \} = \min\{ 0 + 5, \propto + 2 \} = 5;$ $d[2] = 1$

  $v^2[3] = \min\{ v^1[1] + c_{13}, v^1[4] + c_{43}, v^1[2] + c_{23} \} = \min\{ 8, \propto, -5 \} = -5;$ $d[3] = 2$

  $v^2[4] = \min\{ \} = +\propto$

- $v^3[2] = \min\{ v^2[1] + c_{12}, v^2[4] + c_{42} \} = \min\{ 0 + 5, \propto + 2 \} = 5;$ $d[2] = 1$

  $v^3[3] = \min\{ v^2[1] + c_{13}, v^2[4] + c_{43}, v^2[2] + c_{23} \} = \min\{ 8, \propto, -5 \} = -5;$ $d[3] = 2$

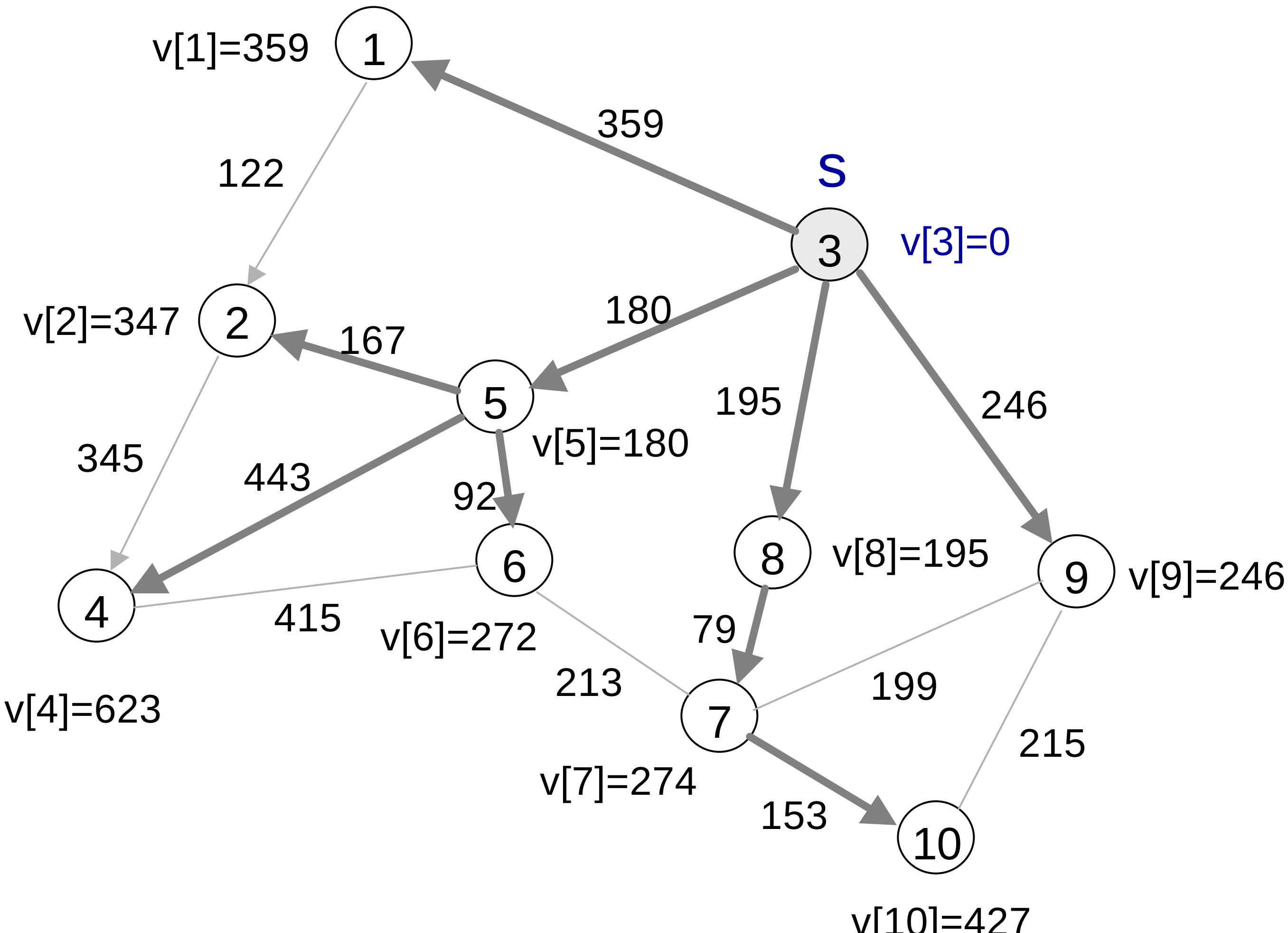
  $v^3[4] = \min\{ \} = +\propto$

Exemplo: resumo

t	$v^t[1]$	$v^t[2]$	$v^t[3]$	$v^t[4]$
0	0	+oo	+oo	+oo
1		5	8	
2			-5	
3				

t	d[1]	d[2]	d[3]	d[4]
1		1	1	
2			2	
3				

Algoritmo de Bellman-Ford: Justificativa



número arcos caminho < número vértices - 1

Algoritmo de Floyd-Warshall

- Caminho mínimo de cada vértice a todos os outros de um grafo

- Equações funcionais: $k \rightarrow l, \quad \forall\, k, l$

  $v[k,k] = 0$

  $v[k,l] = \min\{c_{kl}\ , v[k,i] + v[i,l] :\ i \neq k, l\}\ \forall k \neq l$

  Se $\nexists$ (i,k) então $\min\{\text{ nada }\} = +\infty$

- $v^t[k,l]$ = valor do caminho mínimo $k \rightarrow l$ obtido na t-ésima iteração

  $d[k,l]$ = vértice que precede l no melhor caminho $k \rightarrow l$ atual

Algoritmo de Floyd-Warshall

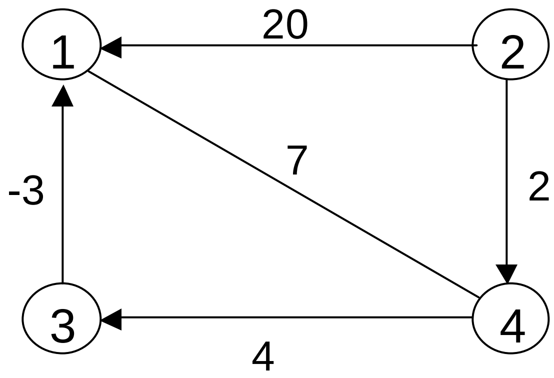
Passo 0 Inicializa: numerar vértices consecutivamente a partir de 1;
se existe arco (k,l) então $v^0[k,l] \leftarrow c_{kl}$; $d[k,l] \leftarrow k$;
senão $v^0[k,l] = 0$ se $k = l$; $v^0[k,l] = +\infty$ caso contrário;
$t \leftarrow 1$;

Passo 1 Avalia: $v^t[k,l] \leftarrow \min \{v^{t-1}[k,l], v^{t-1}[k,t] + v^{t-1}[t,l] \}$, $\forall$ $k, l \neq t$;
se $v^t[k,l] < v^{t-1}[k,l]$ então $d[k,l] \leftarrow d[t,l]$;

Passo 2 Pára: se $v^t[k,k] < 0$ para algum k, ou t = número de vértices;
se $v^t[k,k] < 0$ para algum k, então existe ciclo negativo;

Passo 3 Avança: se $t <$ número de vértices e $v^t[k,k] > 0$, $\forall$ k, então
$t \leftarrow t + 1$; ir para o Passo 1;

Exemplo



		v^0[k,l]				d[k,l]		
k	l =1	l =2	l =3	l =4	l =1	l =2	l =3	l =4
1	0	oo	oo	7	-	-	-	1
2	20	0	oo	2	2	-	-	2
3	-3	oo	0	oo	3	-	-	-
4	7	oo	4	0	4	-	4	-

	v^1[k,l] = v^2[k,l]					d[k,l]		
k	l =1	l =2	l =3	l =4	l =1	l =2	l =3	l =4
1	0	oo	oo	7	-	-	-	1
2	20	0	oo	2	2	-	-	2
3	-3	oo	0	4	3	-	-	1
4	7	oo	4	0	4	-	4	-

		$v^3[k,l]$				d[k,l]		
k	l =1	l =2	l =3	l =4	l =1	l =2	l =3	l =4
1	0	oo	oo	7	-	-	-	1
2	20	0	oo	2	2	-	-	2
3	-3	oo	0	4	3	-	-	1
4	1	oo	4	0	3	-	4	-

		$v^4[k,l]$				d[k,l]		
k	l =1	l =2	l =3	l =4	l =1	l =2	l =3	l =4
1	0	oo	11	7	-	-	4	1
2	3	0	6	2	3	-	4	2
3	-3	oo	0	4	3	-	-	1
4	1	oo	4	0	3	-	4	-

Algoritmo de Dijkstra

- Caminho mínimo do vértice **s** a todos os outros com $\mathbf{c_{ij} \geq 0}$ $\forall$ i, j

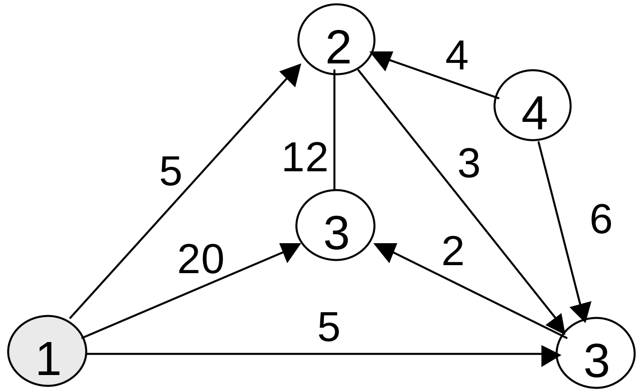
Passo 0 Inicializa: s vértice origem; v[i] = 0 se i = s; senão v[i] = $+\infty$
p $\leftarrow$ s, s é marcado como vértice permanente;

Passo 1 Avalia: marcar p como vértice permanente; $\forall$ arco (p,i)
calcular v[i] $\leftarrow$ min { v[i], v[p] + c_{pi} }, i temporário;
se o valor de v[i] modifica então d[i] $\leftarrow$ p;

Passo 2 Pára: se não restar nenhum vértice temporário,
v[i] são os valores ótimos;

Passo 3 Permanente: escolher o próximo vértice permanente p tal que
v[p] = min { v[i] : i temporário }; ir para o Passo 1;

Exemplo

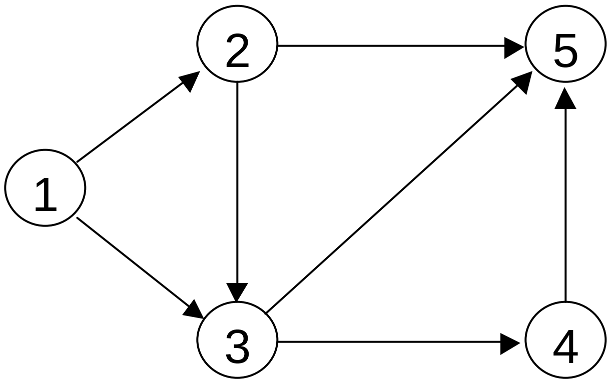


p	v[1]	v[2]	v[3]	v[4]	v[5]
inicio	0	oo	oo	oo	oo
1	p	5	20		5
2		p	17		
5			7		p
3			p		
4				p	
fim	0	5	7	oo	5

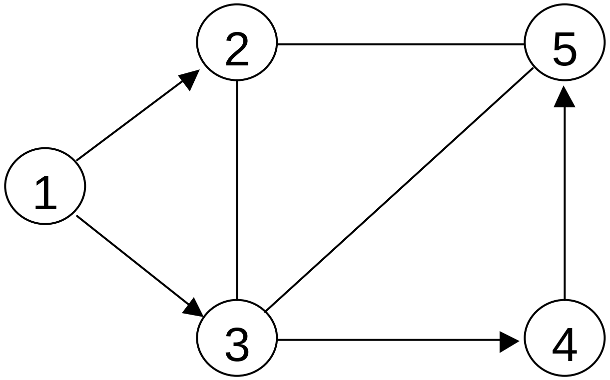
p	d[1]	d[2]	d[3	d[4]	d[5]
1		1	1		1
2			2		
5			5		
3					
4					
fim	-	1	5	-	1

Grafos Acíclicos

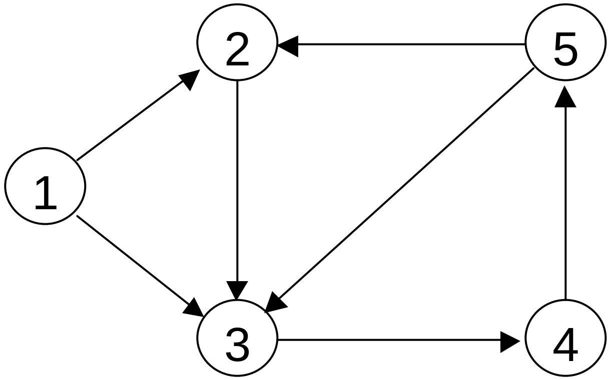
- grafo que é dirigido e sem ciclos
- vértices podem ser numerados tal que todo arco (i, j) tem $i < j$



acíclico



grafo não dirigido

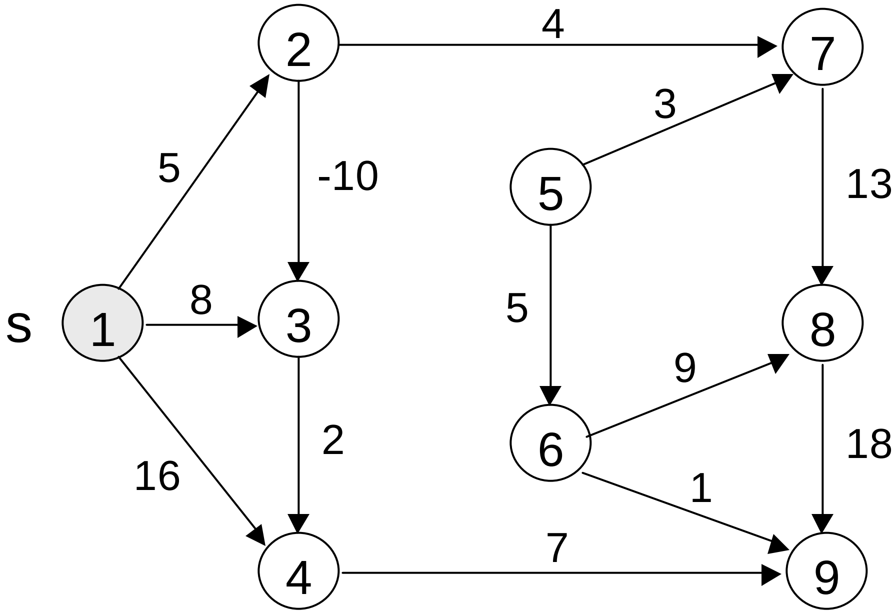


grafo com ciclo

Caminhos Mínimos em Grafos Acíclicos

Passo 0 Inicializa:	numerar vértices tal que arcos (i, j) tem $i < j$; s vértice origem; $v[s] \leftarrow 0$;
Passo 1 Pára:	se todos v[k] já foram determinados; caso contrário, seja p um vértice não processado com a menor numeração;
Passo 3 Processa:	se $\nexists$ arcos dirigidos para o vértice p; $v[p] \leftarrow +\infty$; caso contrário, determinar $v[p] \leftarrow \min \{ v[i] + c_{ip} : (i,p) \text{ existe} \}$ $d[p] \leftarrow$ número do vértice que atinge o mínimo; ir para o Passo 1;

Exemplo



s $\quad v[1] = 0$

p = 2 $\quad v[2] = \min \{ v[1] + c_{12} \} = 5$

$d[2] = 1$

p = 3 $\quad v[3] = \min \{ v[1] + c_{13}, v[2] + c_{23} \}$

$= \min \{ 0 + 8, 5 - 10 \} = -5$

$d[3] = 2$

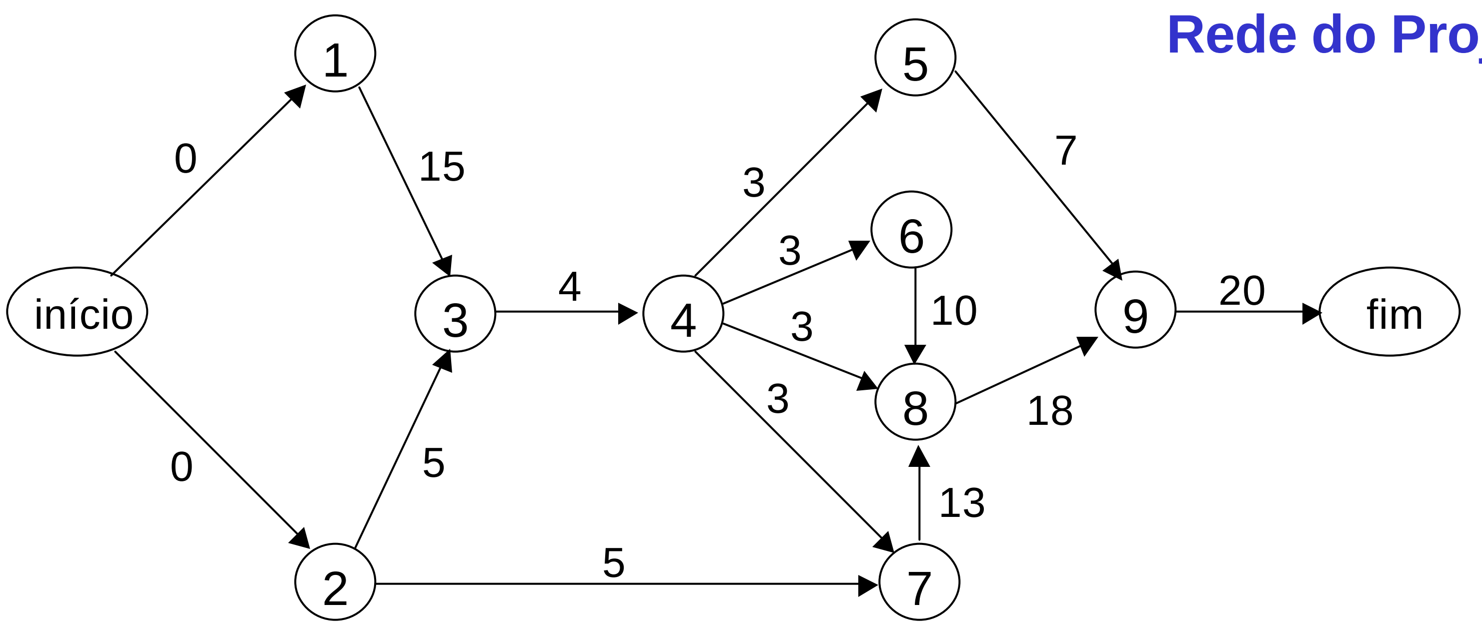
p	v[p]	d[p]
1	0	-
2	5	1
3	-5	2
4	-3	3
5	oo	-
6	oo	-
7	9	2
8	22	7
9	4	4

Aplicação Planejamento de Projetos - CPM

- Projeto: conjunto de atividades
- Duração de uma atividade k: a_k
- Atividade j precede k se j tem que terminar antes do início de k
- Problema: determinar a data mais cedo para cada atividade,
  respeitando-se as restrições de precedência entre elas
- Método do caminho crítico: CPM (*Critical Path Method*)
- Projeto pode ser modelado através de um grafo acíclico
- Algoritmos de caminhos ótimos $\rightarrow$ caminhos críticos

k	Atividade	Duração (dias)	Predecessores
1	Fundação	15	-
2	Hidráulica básica	5	-
3	Concretagem vigas	4	1, 2
4	Elementos estruturais	3	3
5	Telhado	7	4
6	Instação elétrica	10	4
7	Condicionamento térmico	13	2, 4
8	Paredes	18	4, 6, 7
9	Acabamento	20	5, 8

Rede do Projeto



- Data mais cedo início atividade k:

  – é o comprimento do maior caminho do vértice *início* até o vértice k da rede do projeto correspondente

- Tempo mínimo para completar o projeto:

  – é o comprimento do maior caminho entre os vértices *início* e *fim* da rede do projeto.

k	Atividade	Inicio Mais Cedo	Caminho Crítico
1	Fundação	0	início - 1
2	Hidráulica básica	0	início - 2
3	Concretagem vigas	15	início - 1 - 3
4	Elementos estruturais	19	início - 1 - 3 - 4
5	Telhado	22	início - 1 - 3 - 4 - 5
6	Instação elétrica	22	início - 1 - 3 - 4 - 6
7	Condicionamento térmico	22	início - 1 - 3 - 4 - 7
8	Paredes	35	início - 1 - 3 - 4 - 7 - 8
9	Acabamento	53	início - 1 - 3 - 4 - 7 - 8 - 9

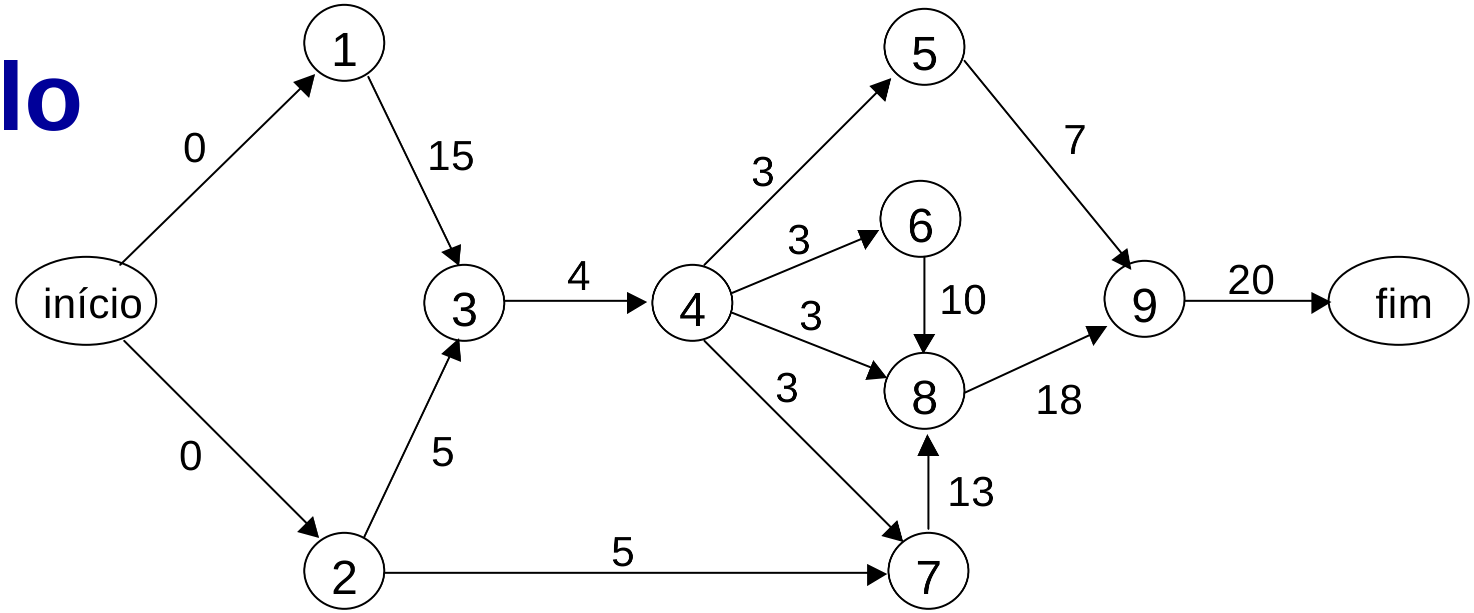
Algoritmo de Sequenciamento - CPM

Passo 0 Inicializa: numerar vértices atividade com cada arco precedência (i, j) com $i < j$; v[início] $\leftarrow$ 0;

Passo 1 Pára: se o valor de v[final] já foi determinado; caso contrário, seja p um vértice não processado com a menor numeração;

Passo 3 Processa: determinar
v[p] $\leftarrow$ max { v[i] + a_i : i precede p ;
d[p] $\leftarrow$ número do vértice que atinge o máximo;
ir para o Passo 1;

Exemplo



p	v[p]	d[p]
início		-
1	0	início
2	0	início
3	15	1
4	19	3
5	22	4
6	22	4
7	22	4
8	35	7
9	53	8
fim	73	9

Observação