EA 044 Planejamento e Análise
de Sistemas de Produção

Algoritmos Numéricos de Busca em Otimização

Tópicos

1-Introdução

2-Busca em otimização

3-Algoritmos numéricos de busca

4-Condições algébricas: melhor direção, factibilidade

5-Unimodalidade, convexidade, tratabilidade

6-Solução inicial factível

1-Introdução

- Algoritmos de busca
  - – não informados (profundidade, largura,…)
  - – informados (gradiente, *best-first*,…)
- Características dos algoritmos de busca
  - – exatos (simplex, *branch and bound*, programação dinâmica,…)
  - – heurísticos (tabu, SA, AG, A, A*,…)
- Questões
  - – busca é a melhor maneira de resolver o problema?
  - – quais algoritmos de busca resolvem o problema?
  - – qual algoritmo é o mais eficiente para o problema?

2-Busca em otimização

- Solução de um modelo de otimização
  - uma escolha para os valores das variáveis de decisão
  - em geral uma solução é um vetor do R^n

- Características dos algoritmos de busca
  - melhoram soluções factíveis ao longo de direções factíveis
  - baseiam-se em informações sobre a vizinhança da solução corrente
  - vizinhanças dão uma natureza local às soluções

- Vizinhança $$N_\varepsilon(\mathrm{x}) \ = \ \{\mathrm{y} : \|\mathrm{y}-\mathrm{x}\| < \varepsilon\}, \quad \mathrm{x} \in \mathrm{R}^n, \varepsilon > 0$$

$$\|\mathrm{x}\| = \sqrt{(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)}$$

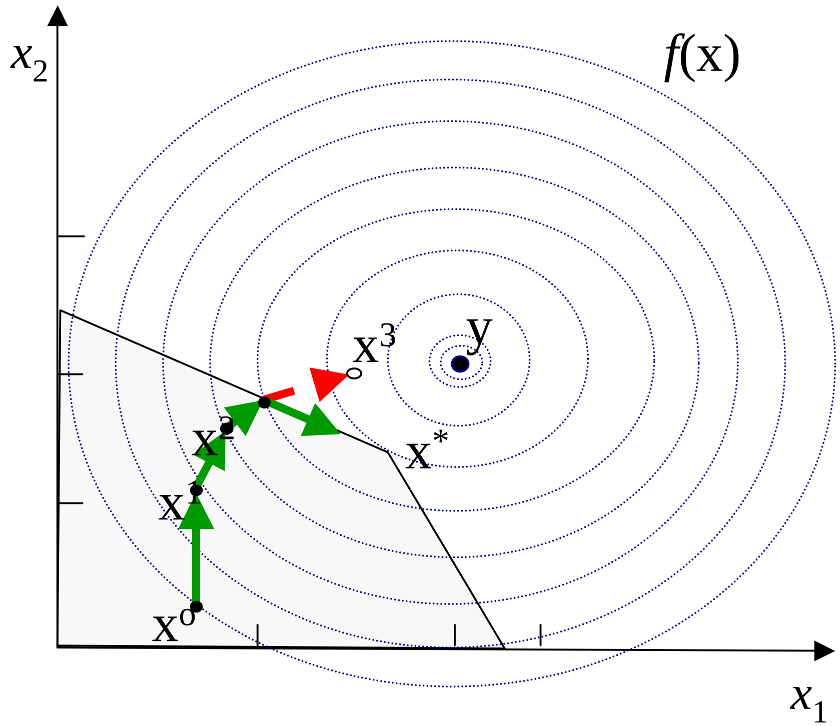
$\|\mathrm{x}\|$ norma (comprimento) de x

- Ponto interior $$S \subseteq \mathrm{R}^n, \ \mathrm{x} \in S \ \text{ interior se} \ \exists N_\varepsilon(\mathrm{x}) \subset S$$

$$\Downarrow$$

$$\exists \varepsilon > 0 \mid \|\mathrm{y}-\mathrm{x}\| < \varepsilon \Rightarrow \quad \mathrm{y} \in S$$

3-Algoritmos numéricos de busca



$$\min \ (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 4)^2$$
$$\text{sa} \quad 1.7\,x_1 + 3.0\,x_2 \leq 15$$
$$2.2\,x_1 + 0.9\,x_2 \leq 10$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$\mathrm{x}^{t+1} \leftarrow \mathrm{x}^{t} + \lambda \Delta \mathrm{x}$$

$$f(\mathrm{x}^{t+1}) \leq f(\mathrm{x}^{t})$$

Δx direção

$\lambda > 0$ passo

procedimentos que iniciam em uma solução factível e prosseguem ao longo de uma trajetória formada por soluções factíveis que sempre melhoram o valor da função objetivo (paradigma direção + passo).

- Problemas de maximização

$$\begin{array}{ll} \max & f(\mathrm{x}) \\ \mathrm{sa} & \mathrm{x} \in D \end{array} \quad \Rightarrow \quad f(\mathrm{x}^*) \geq f(\mathrm{x}) \begin{cases} \forall \mathrm{x} \in (D \cap N_\varepsilon(\mathrm{x})) & \text{local} \\ \forall \mathrm{x} \in D & \text{global} \end{cases}$$

- Problemas de minimização

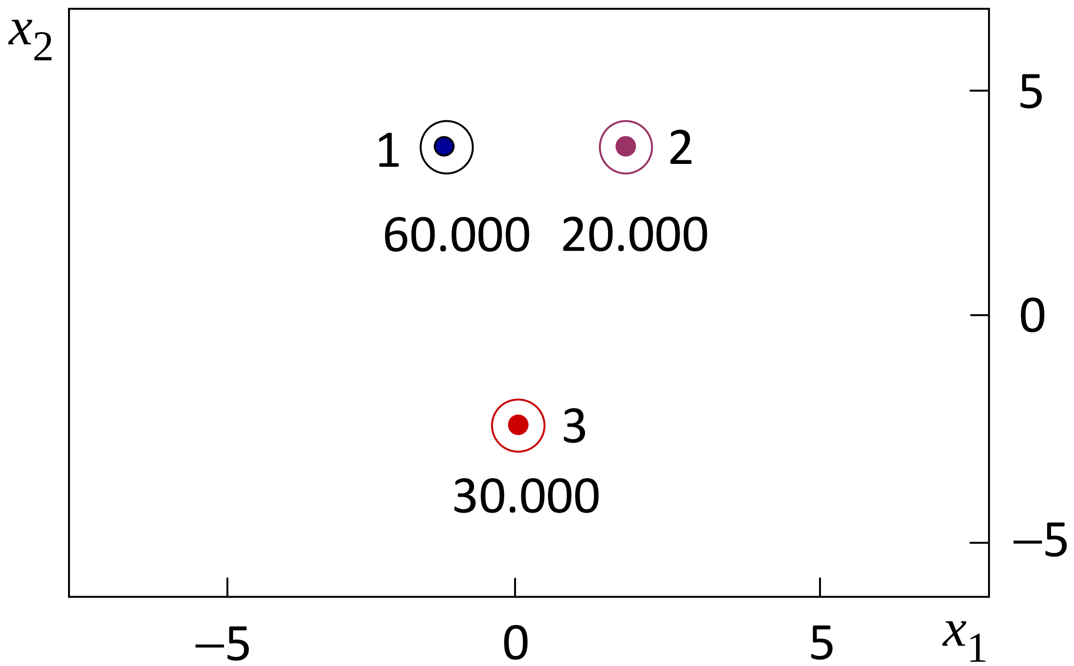
$$\begin{array}{ll} \min & f(\mathrm{x}) \\ \mathrm{sa} & \mathrm{x} \in D \end{array} \quad \Rightarrow \quad f(\mathrm{x}^*) \leq \mathrm{f}(\mathrm{x}) \begin{cases} \forall \mathrm{x} \in (D \cap N_\varepsilon(\mathrm{x})) & \text{local} \\ \forall \mathrm{x} \in D & \text{global} \end{cases}$$

- Ótimo local pode ser ótimo global

- Modelos mais tratáveis
  – garantem ótimo local $\equiv$ ótimo global

- Em geral ótimo local não é global
  – executar algoritmos (busca) independentes
  – melhor solução local $\rightarrow$ solução ótima
  – ótimo aproximado (heurístico)

Exemplo: problema de alocação

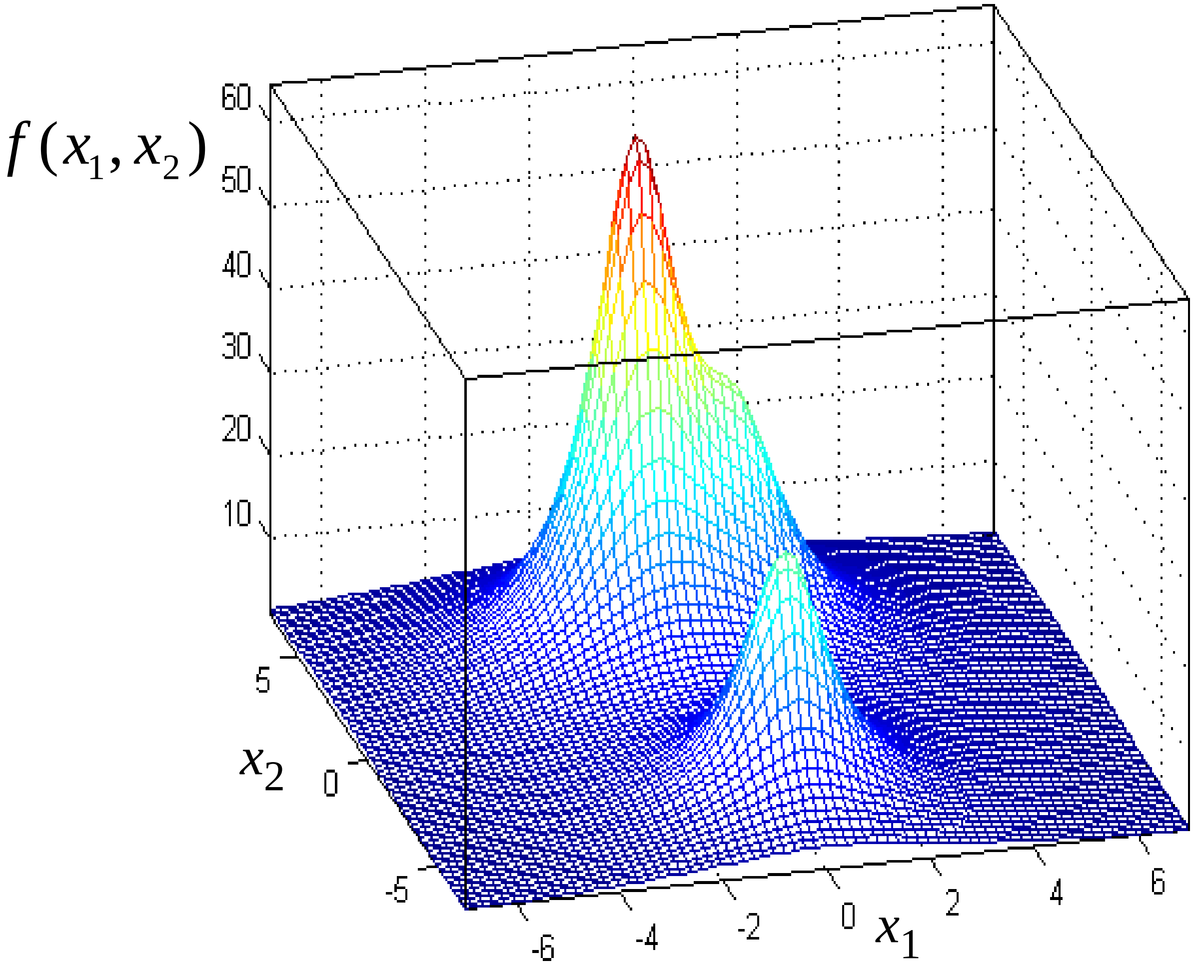


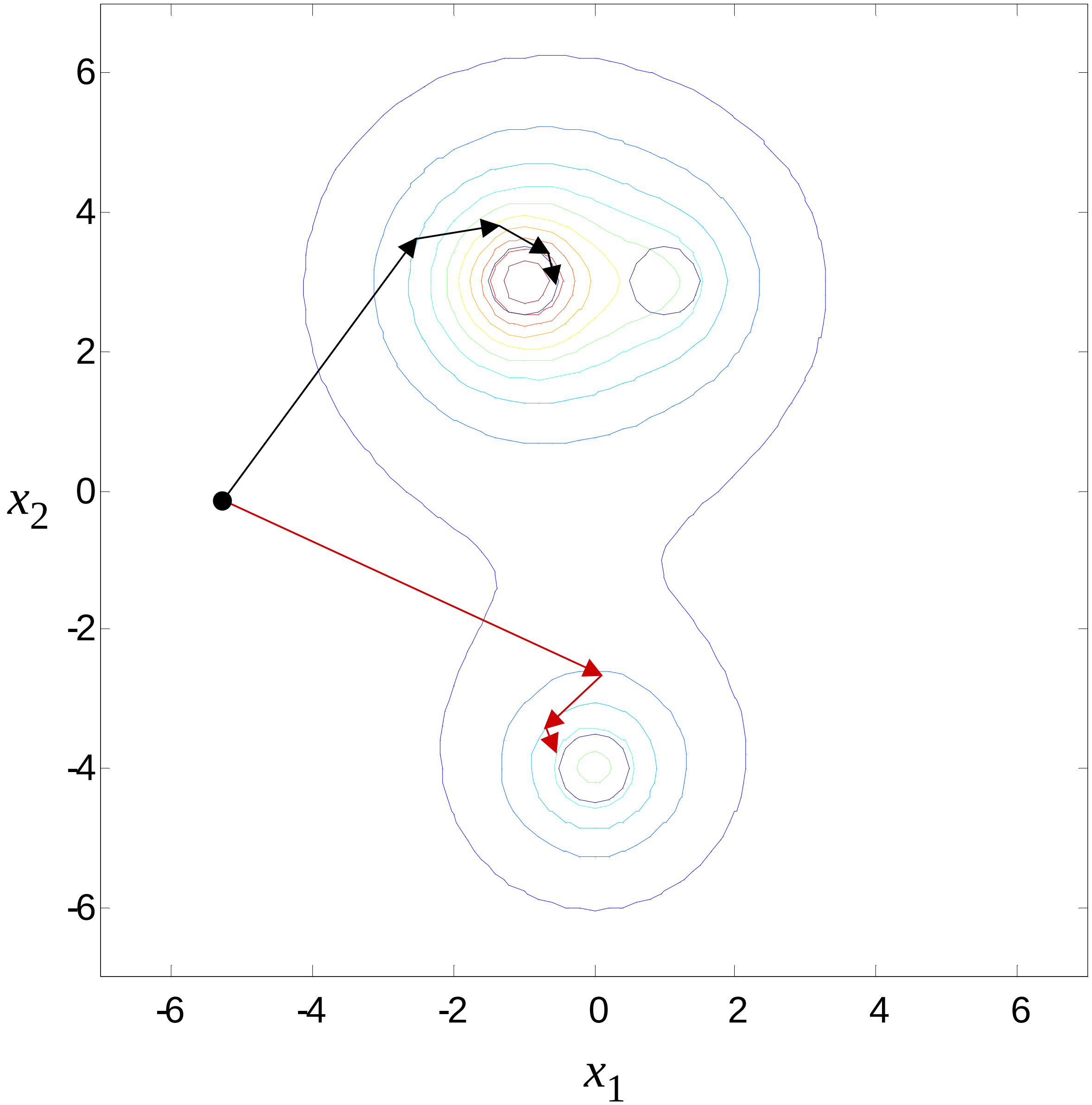
$$\max \quad f(x_1, x_2) = \frac{60}{1+(x_1+1)^2+(x_2-3)^2} + \frac{20}{1+(x_1-1)^2+(x_2-3)^2} + \frac{30}{1+(x_1)^2+(x_2+4)^2}$$

$$\text{sa} \quad (x_1+1)^2+(x_2-3)^2 \geq 0.25$$

$$(x_1-1)^2+(x_2-3)^2 \geq 0.25$$

$$(x_1)^2+(x_2+4)^2 \geq 0.25$$


$f(x_1, x_2)$
60
50
40
30
20
10
5
x_2
0
-5
-6
-4
-2
0
x_1
2
4
6



6
4
2
0
-2
-4
-6
x_2
-6
-4
-2
0
2
4
6
x_1

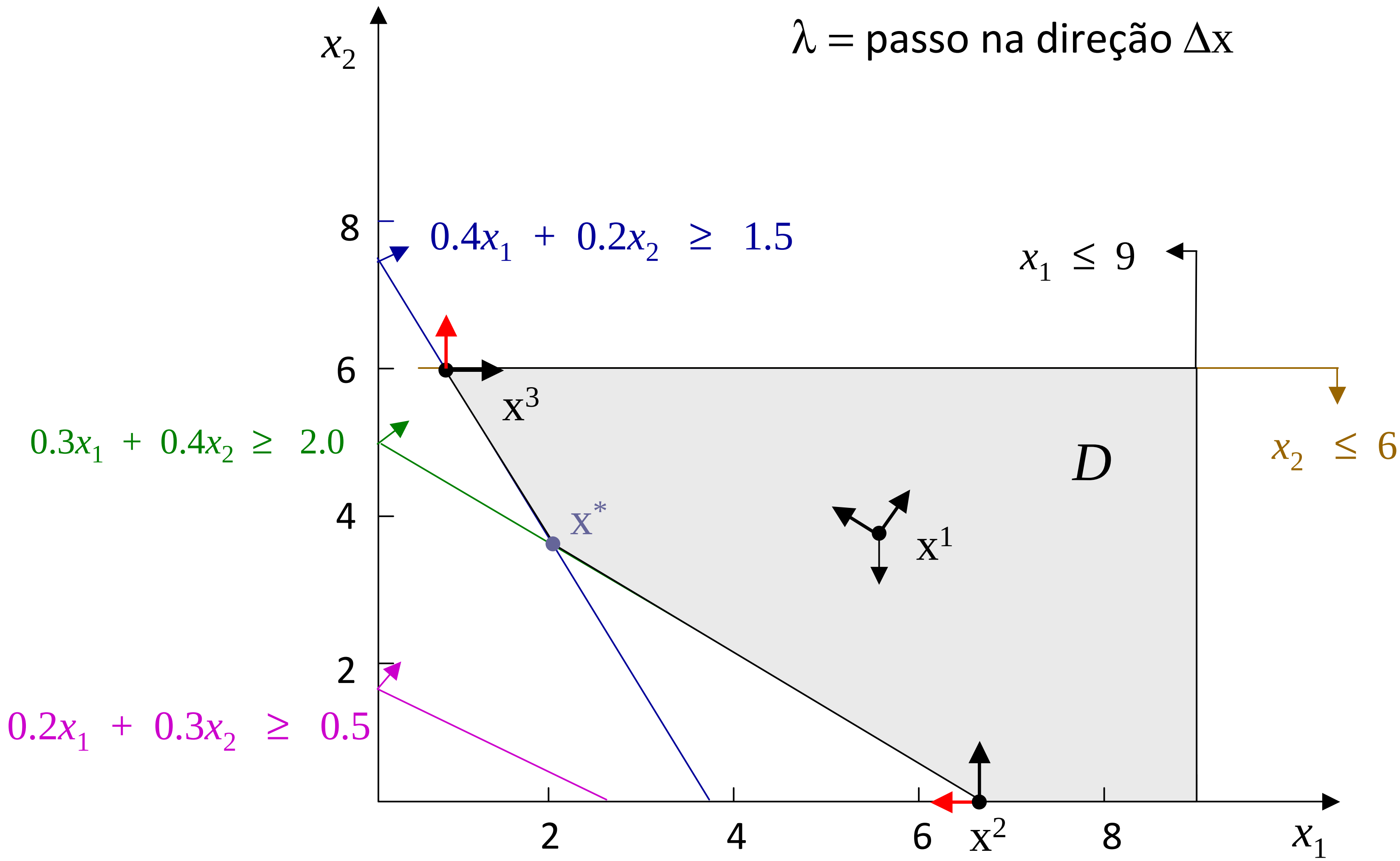
Direção factível

Δx é uma direção factível em x^t se

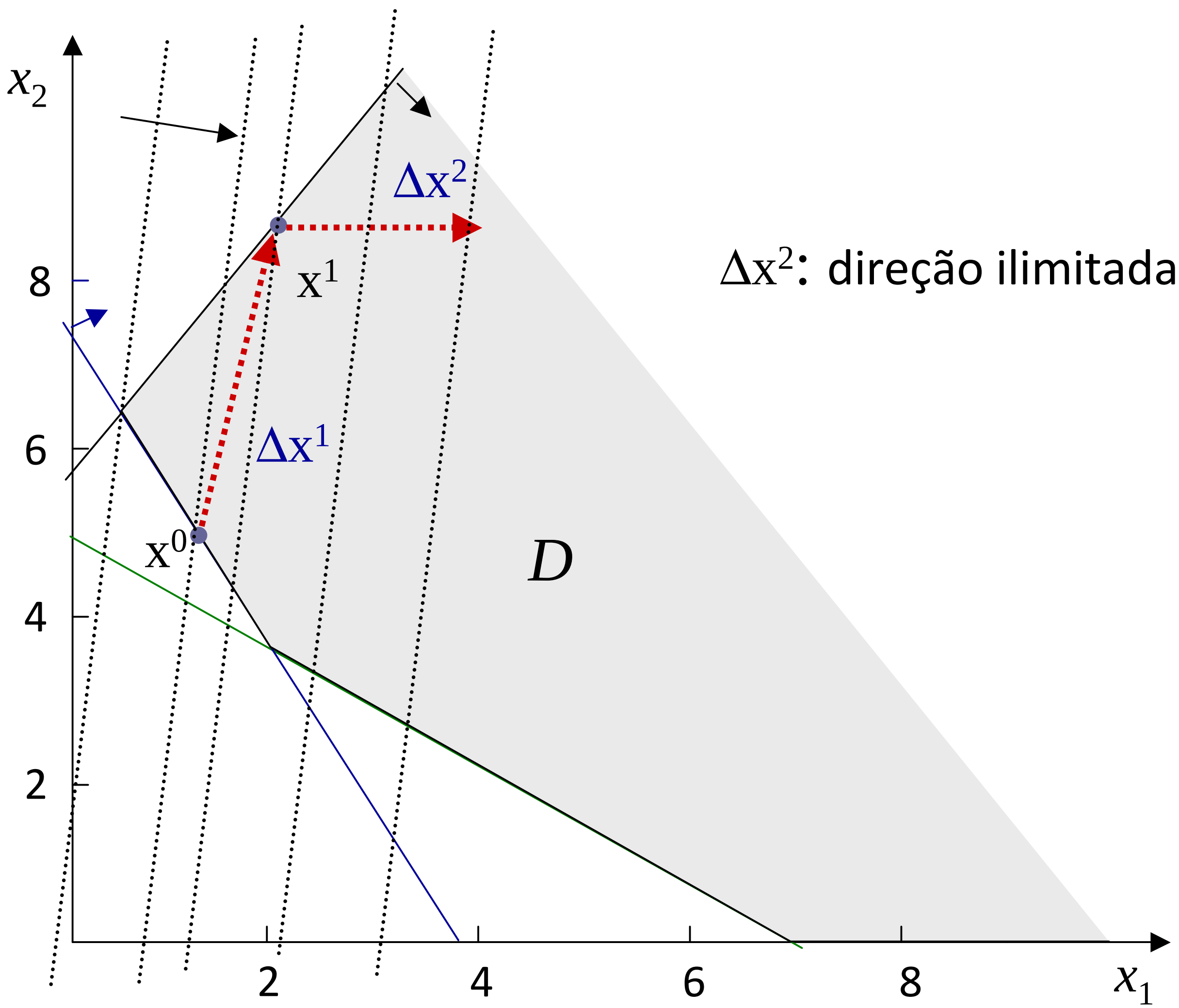
$x^t + \lambda\, \Delta x \in D$

$\lambda > 0$, suficientemente pequeno

$\lambda =$ passo na direção Δx



Modelos ilimitados



Δx^2: direção ilimitada

4-Condições algébricas: melhor direção

$$\nabla f(\mathrm{x}) = (\partial f/\partial x_1 \ldots \partial f / \partial x_j \ldots \partial f / \partial x_n)$$

gradiente de $f(\mathrm{x})$ em x

$$f(\mathrm{x}^t + \lambda\Delta\mathrm{x}) \approx f(\mathrm{x}^t) + \lambda\nabla f(\mathrm{x}^t)^{'}\Delta\mathrm{x} = f(\mathrm{x}^t) + \lambda\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{x_j}\right)\Delta x_j$$

$$\Delta f = \lambda\nabla f(\mathrm{x}^t)^{'}\Delta\mathrm{x}$$

$$\nabla f(\mathrm{x})^{'}\Delta\mathrm{x} > 0$$

melhora para max

$$\nabla f(\mathrm{x})^{'}\Delta\mathrm{x} < 0$$

melhora para min

Escolhendo $\Delta \mathrm{x} = \nabla f(\mathrm{x}),\ \nabla f(\mathrm{x}) \neq 0$

$$\nabla f(\mathrm{x})' \Delta(x) > 0$$

melhora para max

Escolhendo $\Delta \mathrm{x} = -\nabla f(\mathrm{x})$

$$\nabla f(\mathrm{x})' \Delta(\mathrm{x}) < 0$$

melhora para min

Algoritmo busca local

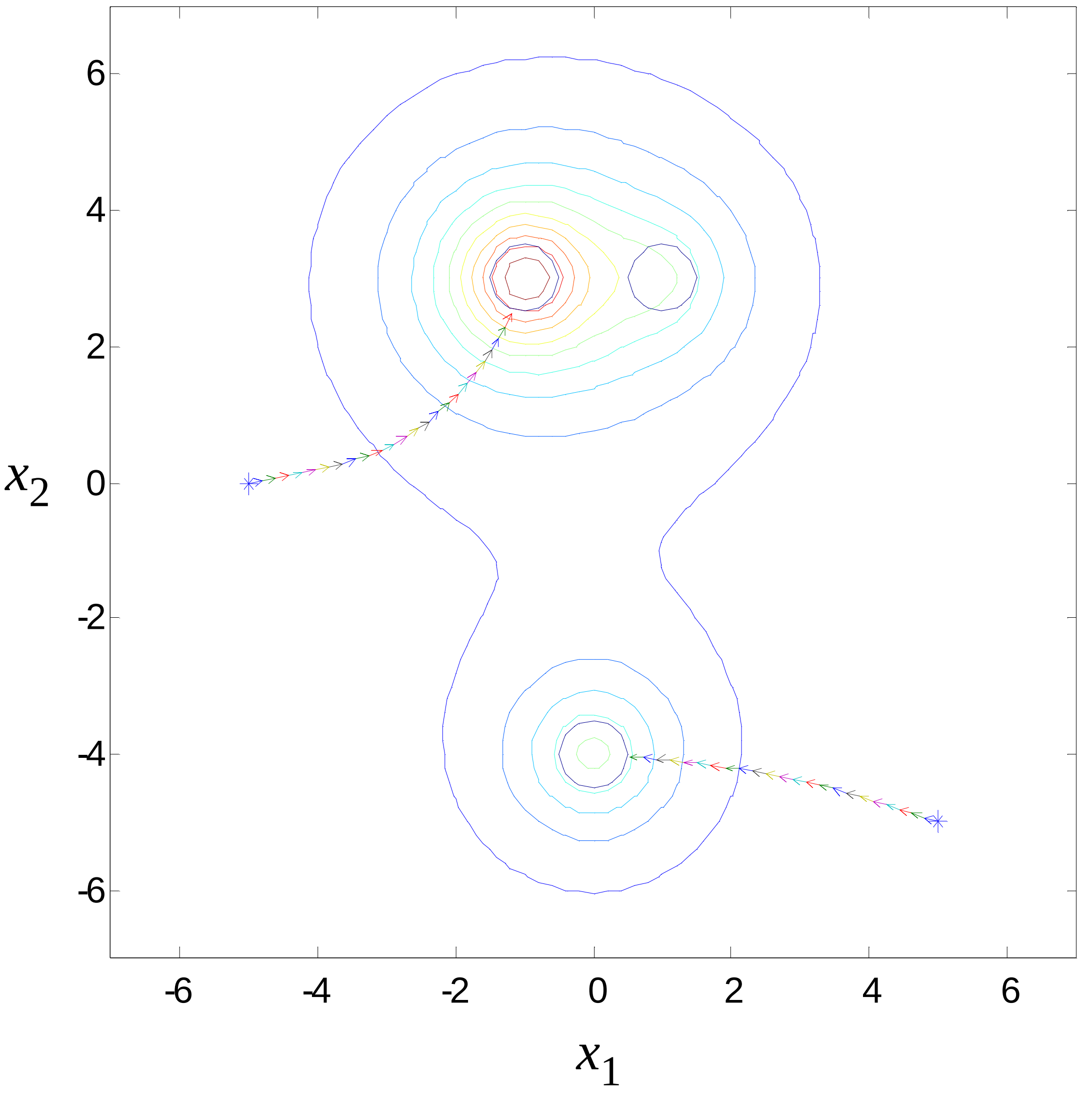
Passo 0 Inicialização: com solução a factível x^0 , $t \leftarrow 0$;

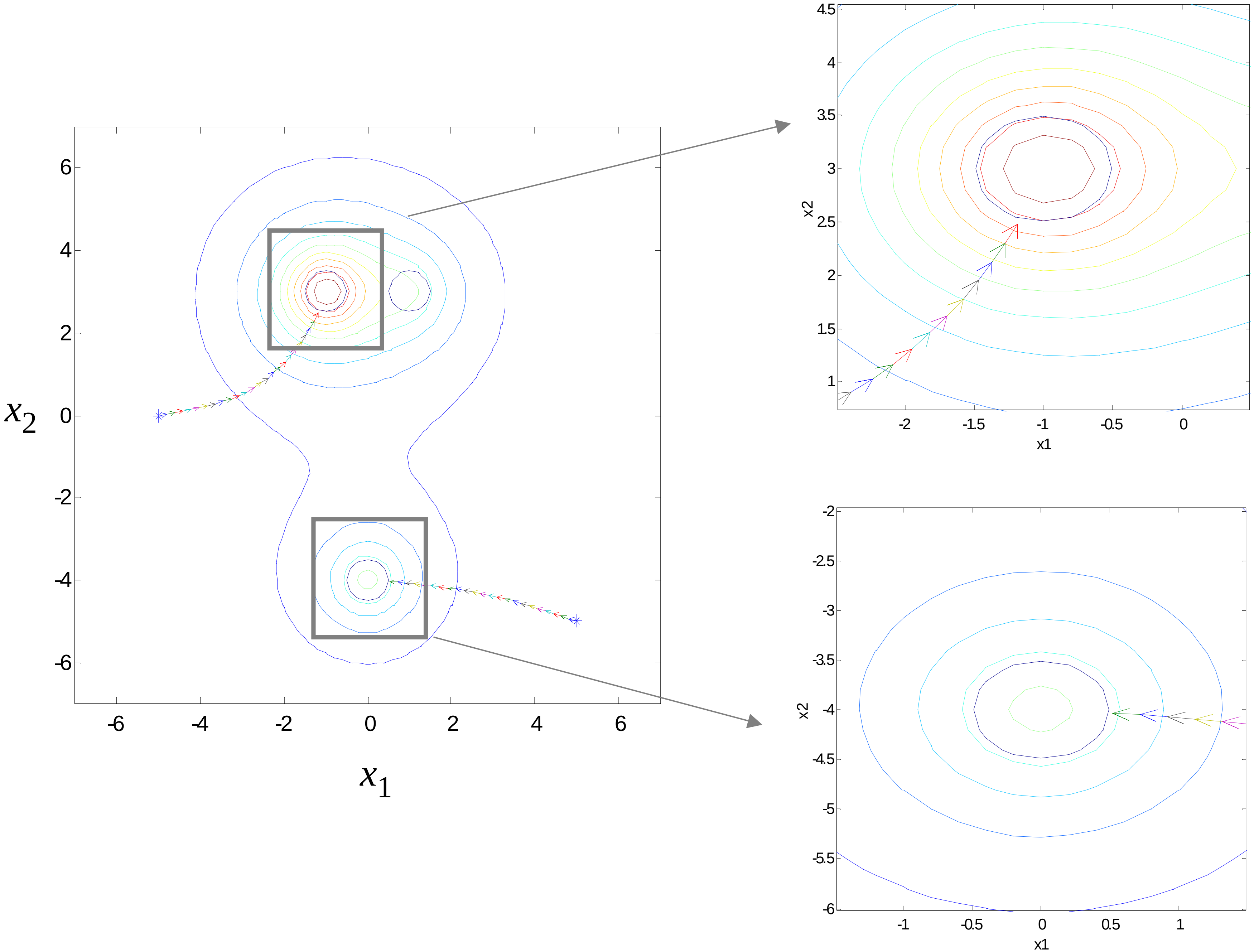
Passo 1 Direção e otimalidade: construir direção factível Δx^{t+1} em x^t; se direção factível não existir, então parar; x^t é um ótimo local;

Passo 2 Passo: se existir limites para valor de λ para o qual a função objetivo melhora, mantendo a factibilidade na direção Δx, então escolher o maior valor λ^{t+1}; senão parar pois o modelo é ilimitado;

Passo 4 Avanço: determinar nova solução $x^{t+1} = x^t + \lambda \Delta x^{t+1}$; $t = t + 1$; ir para o Passo 1;

Exemplo: problema de alocação





x_2
x_1
x2
x1
x2
x1

Condições algébricas: factibilidade

Caso linear

$$\mathrm{a}'\mathrm{x} = \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \geq b;\ \Delta\mathrm{x}\ \text{factível} \Leftrightarrow \mathrm{a}'\Delta\mathrm{x} = \sum_{j=1}^{n} a_j \Delta x_j \geq 0$$

$$\mathrm{a}'\mathrm{x} = \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \leq b;\ \Delta\mathrm{x}\ \text{factível} \Leftrightarrow \mathrm{a}'\Delta\mathrm{x} = \sum_{j=1}^{n} a_j \Delta x_j \leq 0$$

$$\mathrm{a}'\mathrm{x} = \sum_{j=1}^{n} a_j x_j = b;\ \Delta\mathrm{x}\ \text{factível} \Leftrightarrow \mathrm{a}'\Delta\mathrm{x} = \sum_{j=1}^{n} a_j \Delta x_j = 0$$

Restrição ativa: $\sum_{j=1}^{n} a_j x_j = b$

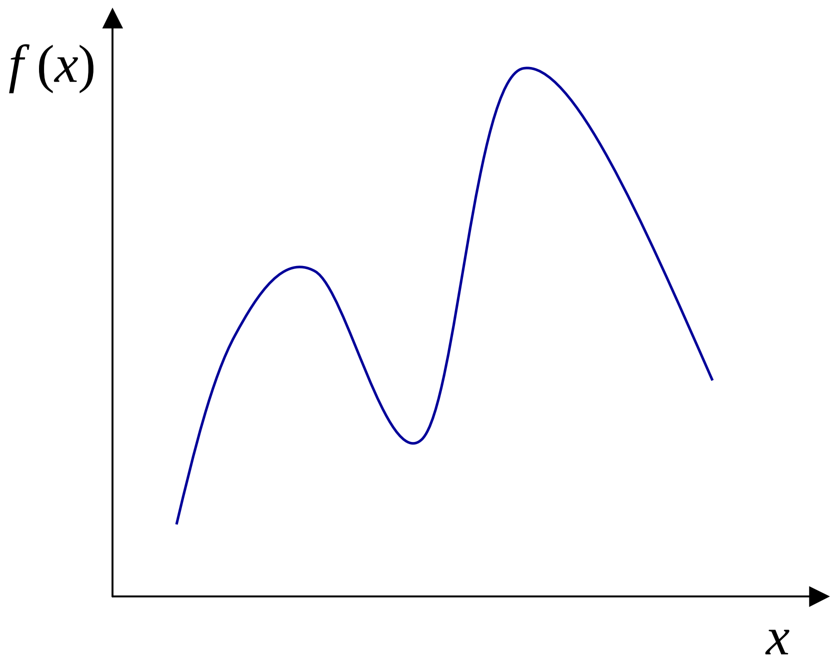
5-Unimodalidade, convexidade, tratabilidade

- Características importantes do modelo
  - unimodalidade
  - convexidade

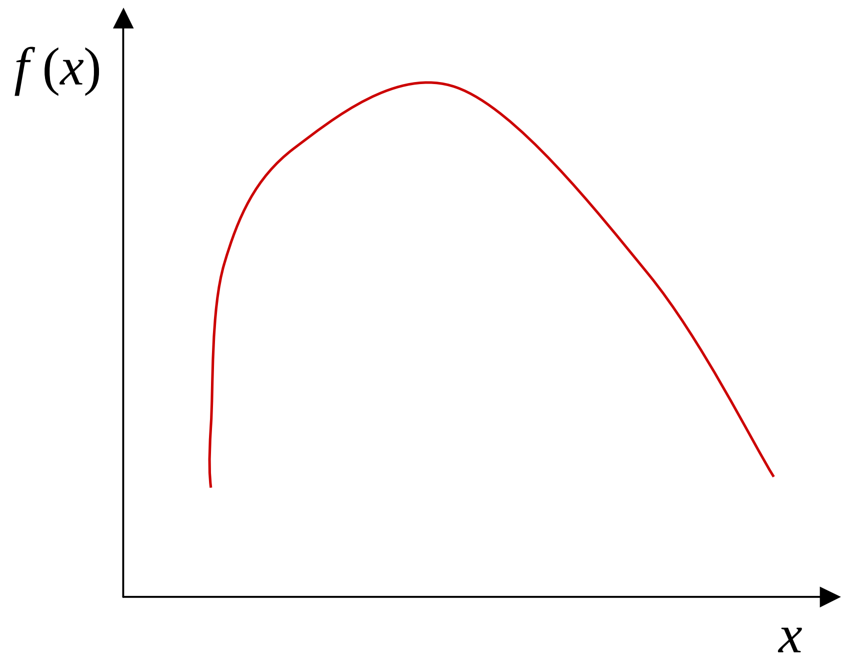
- Tratabilidade
  - conveniência de análise do modelo
  - modelos que garantem ótimo global = local

Funções unimodais

$\forall x^1, x^2 \quad f(x^2)$ melhor que $f(x^1) \;\Rightarrow \Delta x = x^2 - x^1$ melhora em x^1



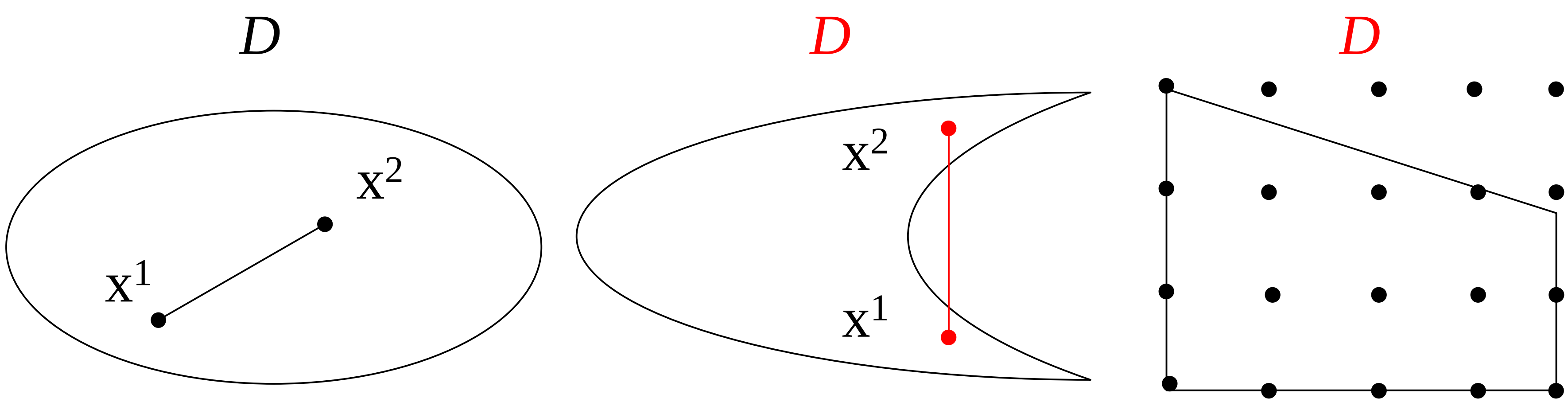
não é unimodal para max e min



unimodal para max
não unimodal para min

Conjuntos convexos

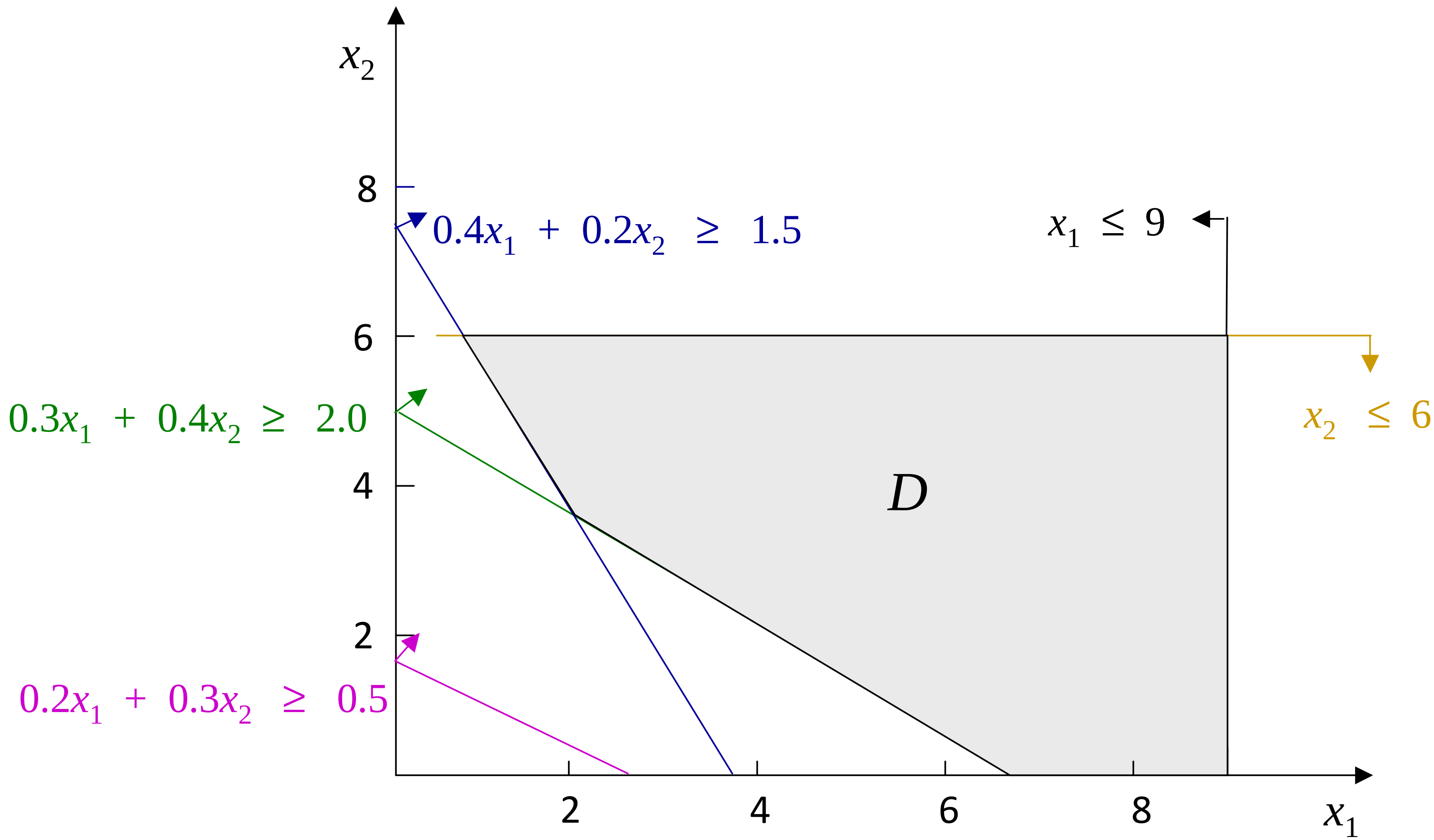
$$\forall\ x^1, x^2 \in D\,,\ \ x^1 + \lambda\,(x^2 - x^1) \in D\,,\ \ 0 \leq \lambda \leq 1$$



convexo

não convexos

Todas restrições lineares $\Rightarrow$ conjunto (espaço) factível convexo



D é convexo

- Ótimos locais são ótimos globais:
  - funções objetivo unimodais
  - modelos sem restrições

- Ótimos locais são ótimos globais quando:
  - função objetivo é unimodal
  - restrições são um conjunto convexo
  - exemplos: modelos lineares, quadráticos

6-Solução inicial factível

Método de duas fases

0 - Modelo artificial: escolher uma solução inicial conveniente para o modelo original e construir modelo da Fase I adicionando (subtraindo) variáveis artificiais não negativas em cada uma das restrições violadas

1 - Fase I: atribuir valores para as variáveis artificiais para obter uma solução inicial factível para o modelo artificial. Resolver problema de minimizar a $soma$ das variáveis artificiais

2 -Teste de factibilidade: se a Fase I termina com $soma = 0$, ir para o passo 3 pois a solução original é factível. Se $soma > 0$, parar: modelo original é infactível. Caso contrário, repetir Fase 1 com diferentes valores iniciais.

3 - Fase II: construir solução inicial factível para o problema original eliminando as componentes artificias do ótimo da Fase I.

Método de duas fases: exemplo

Modelo da Refinaria de Petrolinea

$$
\begin{array}{llllll}
\min & 20x_1 & + & 15x_2 & & & \\
\text{sa} & 0.3x_1 & + & 0.4x_2 & \geq & 2.0 & (1) \\
 & 0.4x_1 & + & 0.2x_2 & \geq & 1.5 & (2) \\
 & 0.2x_1 & + & 0.3x_2 & \geq & 0.5 & (3) \\
 & x_1 & & & \leq & 9 & \\
 & & & x_2 & \leq & 6 & \\
 & x_1, x_2 \geq 0 & & & & &
\end{array}
$$

escolha $x_1 = x_2 = 0$

viola as restrições desigualdade (1), (2) e (3)

Modelo artificial

$$
\begin{array}{llcllcl}
\text{min} & x_3 + x_4 + x_5 & & & & & \\
\text{sa} & 0.3x_1 & + & 0.4x_2 & + x_3 & \geq & 2.0 \\
 & 0.4x_1 & + & 0.2x_2 & + x_4 & \geq & 1.5 \\
 & 0.2x_1 & + & 0.3x_2 & + x_5 & \geq & 0.5 \\
 & x_1 & & & & \leq & 9 \\
 & & & x_2 & & \leq & 6 \\
 & & & & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 & \geq & 0
\end{array}
$$

Fase I: depois de fixar variáveis do problema original nos valores escolhidos inicializar as variáveis artificiais atribuindo-as os menores valores necessários para obter factibilidade

$$
\begin{array}{lllll}
0.3\,(0) + 0.4\,(0) + x_3 & \geq & 2 & \Rightarrow & x_3 = 2 \\
0.4\,(0) + 0.2\,(0) + x_4 & \geq & 1.5 & \Rightarrow & x_4 = 1.5 \\
0.2\,(0) + 0.3\,(0) + x_5 & \geq & 0.5 & \Rightarrow & x_5 = 0.5
\end{array}
$$

solução da Fase I: (4 4 0 0 0) factível $\Rightarrow$ (4 4) solução inicial para Fase II

Método Big-M

1 - Modelo auxiliar: $\max\ f -$ M (soma das variáveis artificiais) ou
$\min\ f\ +$ M (soma das variáveis artificiais)

1 - Teste I: Se Big-M termina em uma solução local com todas as variáveis artificiais nulas, então os componentes restantes constituem uma solução ótima para o problema original

2 -Teste II: se M é suficientemente grande e Big-M termina em um solução ótima global com alguma variável artificial positiva, então o problema originalé infactível

3 - Teste III: se M é suficientemente grande e Big-M termina em um solução ótima local, com alguma variável artificial positiva, ou o muliplicador M não é grande o suficicente, nada se pode dizer. Repetir algoritmo ou com valor M maior, ou com outra solução inicial.

Método Big-M: exemplo

$$
\begin{array}{lrl}
\min & 20x_1 + 15x_2 + M\,(x_3 + x_4 + x_5) & \\
\text{sa} & 0.3x_1 + 0.4x_2 + x_3 & \geq 2.0 \\
 & 0.4x_1 + 0.2x_2 + x_4 & \geq 1.5 \\
 & 0.2x_1 + 0.3x_2 + x_5 & \geq 0.5 \\
 & x_1 & \leq 9 \\
 & x_2 & \leq 6 \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 & \geq 0
\end{array}
$$

$x^o = (\ 0\ \ 0\ \ 2\ \ 1.5\ \ 0.5\ )$

$M = 10.000 \ \Rightarrow x^* = (\ 2\ \ 3.5\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ )$

Observação

Este material refere-se às notas de aula do curso EA 044 Planejamento e Análise de Sistemas de Produção da Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação da Unicamp. Não substitui o livro texto, as referências recomendadas e nem as aulas expositivas. Este material não pode ser reproduzido sem autorização prévia dos autores. Quando autorizado, seu uso é exclusivo para atividades de ensino e pesquisa em instituições sem fins lucrativos.