Algoritmo Simplex para Programação Linear I

Tópicos

1-Introdução

2-Soluções e forma padrão

3-Soluções básicas

4-Algoritmo simplex

5-Tableau simplex

6-Soluções degeneradas, convergência

1-Introdução

- Modelo de programação linear: forma canônica

$$\begin{aligned} \max \quad & \mathrm{cx} \\ \mathrm{sa} \quad & \mathrm{Ax} \le \mathrm{b} \\ & \mathrm{x} \ge 0 \end{aligned}$$

$$\mathrm{x} \quad (n \times 1)$$

$$\mathrm{A} \quad (m \times n), \quad \mathrm{b} \quad (m \times 1), \quad \mathrm{c} \quad (1 \times n)$$

$$\mathrm{P} = (\mathrm{x} \in \mathrm{R}^n \mid \mathrm{Ax} \le \mathrm{b},\ \mathrm{x} \ge 0\}$$

poliedro

1-poliedros são conjuntos convexos

2- poliedros podem ser limitados ou ilimitados

Exemplo: produção de troféus

	Football	Futebol	Placas	Tábua	Preço
Football	1	0	1	4	12
Futebol	0	1	1	2	9
Estoque	1000	1500	1750	4800	

Exemplo

$$
\begin{array}{llr}
\max & 12x_1 + 9x_2 & \text{lucro} \\
\text{sa} & x_1 \le 1000 & \text{football} \\
 & x_2 \le 1500 & \text{futebol} \\
 & x_1 + x_2 \le 1750 & \text{placas} \\
 & 4x_1 + 2x_2 \le 4800 & \text{tábua} \\
 & x_1, x_2 \ge 0 &
\end{array}
$$

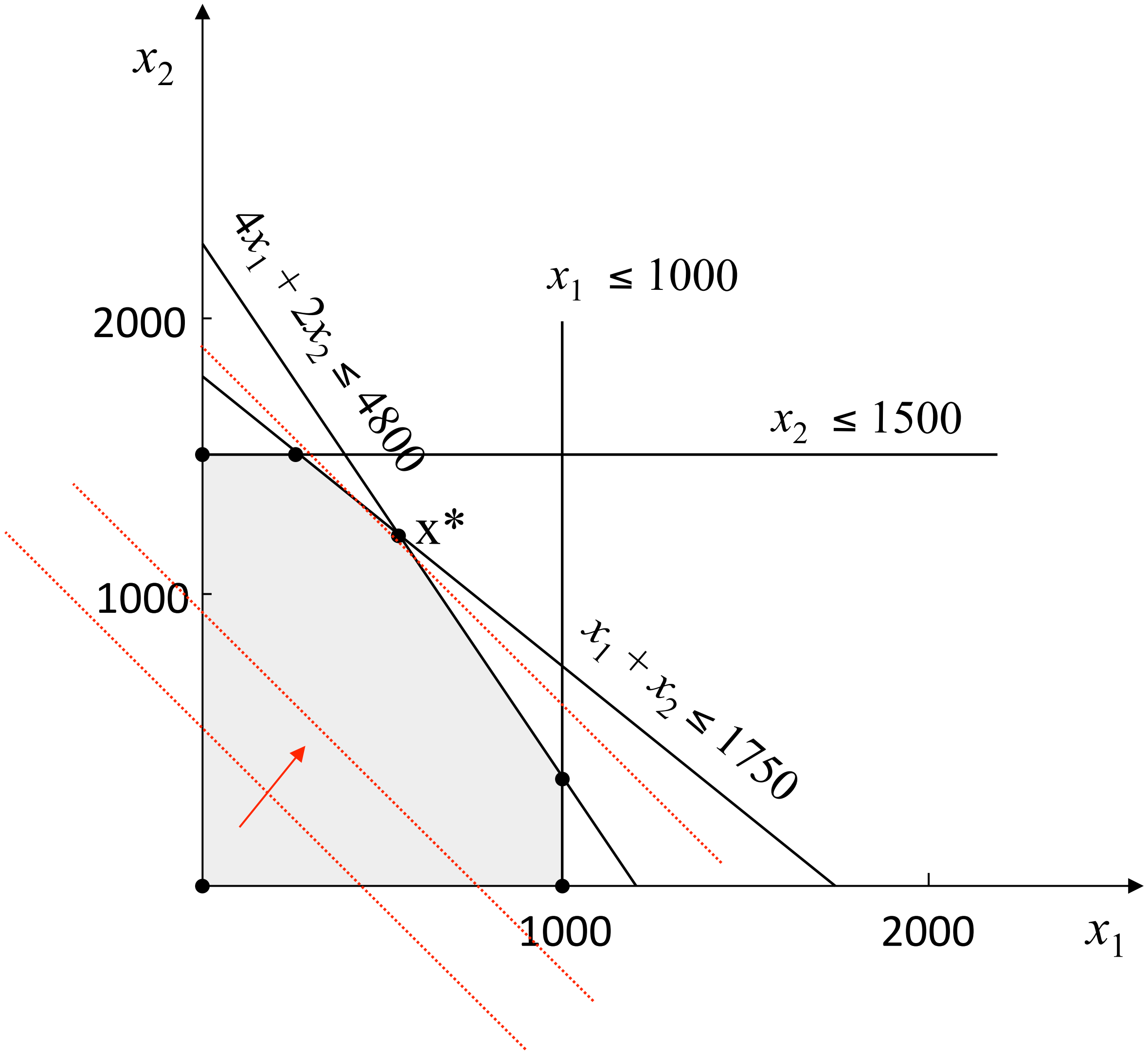
$$
\begin{array}{ccc}
\mathbf{c} & & \mathbf{x} \\
\max\ [12,\ 9] & & \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}
\end{array}
\qquad n = 2
$$

$$
\begin{array}{ccccc}
\text{sa} & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} & \leq & \begin{bmatrix} 1000 \\ 1500 \\ 1750 \\ 4800 \end{bmatrix} \\
 & \mathbf{A} & \mathbf{x} & \leq & \mathbf{b}
\end{array}
\qquad m = 4
$$

$$
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \geq 0
$$

$$
\mathbf{x} \quad \geq 0
$$

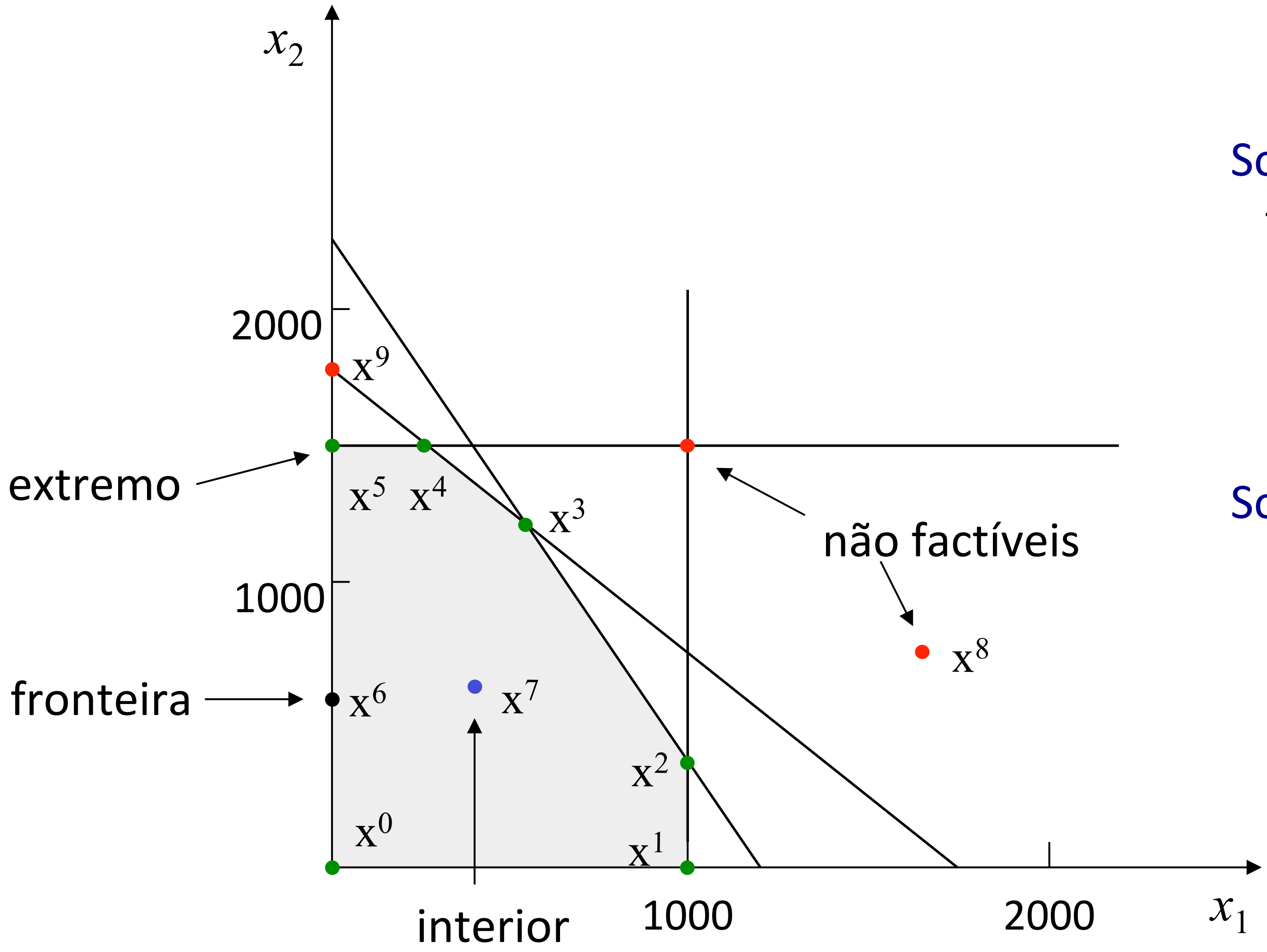
Solução gráfica



x* = (650, 1100)

max local = max global

2-Soluções e forma padrão



Soluções factíveis
- fronteira
- interiores
- extremos

Solução ótima
- ponto da fronteira
- única $\Rightarrow$ ponto extremo

Modelo na forma padrão

$$\max \ 12x_1 + 9x_2$$

$$\begin{array}{llllll}
\text{sa} & x_1 & & + x_3 = 1000 & & x_3 \\
& x_2 & & + x_4 = 1500 & & x_4 \\
& x_1 + & x_2 & + x_5 = 1750 & & x_5 \\
& 4x_1 + & 2x_2 & + x_6 = 4800 & & x_6 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 & & & &
\end{array}$$

variáveis de folga

$$\begin{array}{lll}
\min(\max) \ \mathrm{cx} & & \mathrm{c} \in \mathrm{R}^n \\
\text{sa} & \mathrm{Ax} = \mathrm{b} & \mathrm{b} \in \mathrm{R}^m \\
& \mathrm{x} \geq 0 & \mathrm{x} \in \mathrm{R}^n
\end{array}$$

forma padrão

Para restrições ≥ : subtrair x_i's ≥ 0

variáveis de excesso

$$\begin{array}{lll} \min(\max) & cx & c \in R^n \\ \text{sa} & Ax = b & b \in R^m \\ & x \geq 0 & x \in R^n \end{array}$$

forma padrão

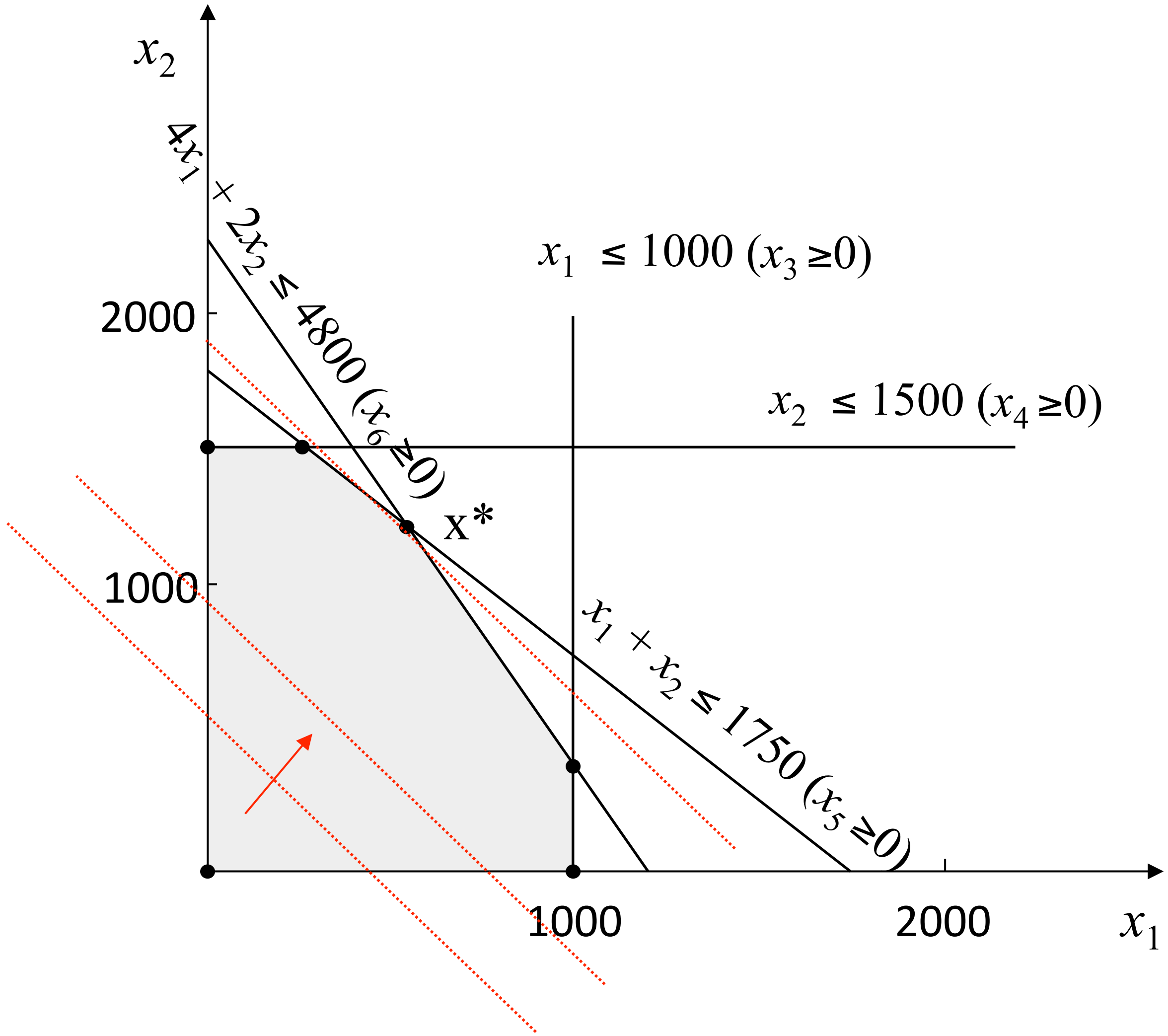
$$P = (x \in R^n \mid Ax = b,\ x \geq 0\}$$

poliedro forma padrão

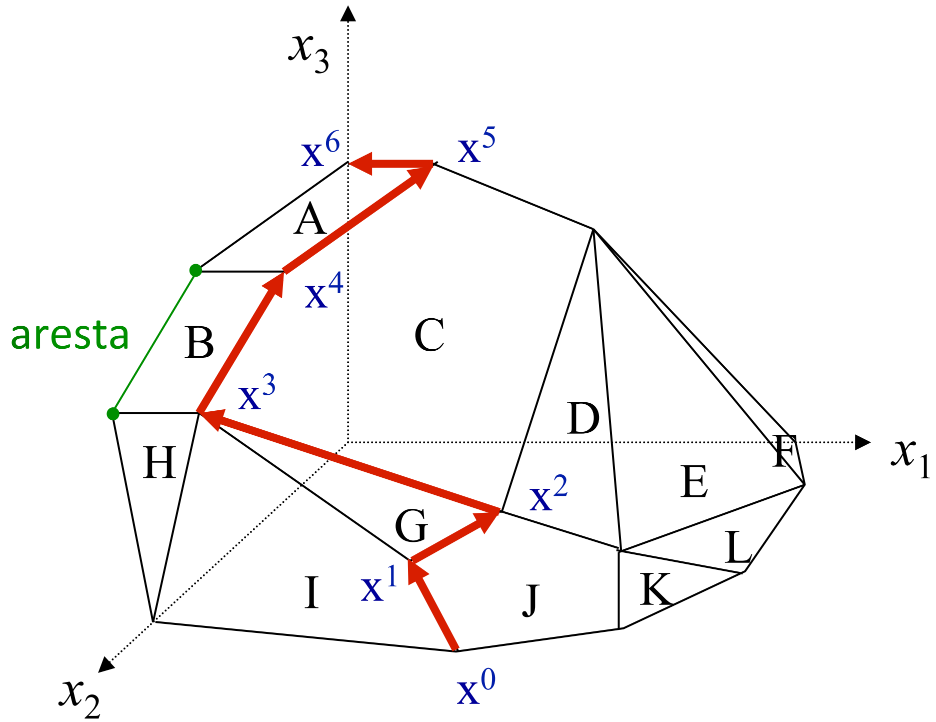
$x \in P$ significa que x é uma solução factível

Poliedros: conjuntos convexos e podem ser limitados ou ilimitados

Interpretação do modelo na forma padrão



- Pontos extremos
  - definidos pelas restrições que estão simultâneamente ativas somente neste ponto
- Pontos extremos adjacentes
  - restrições ativas diferem de um elemento
- Aresta
  - segmento de reta que conecta dois pontos extremos



3-Soluções básicas

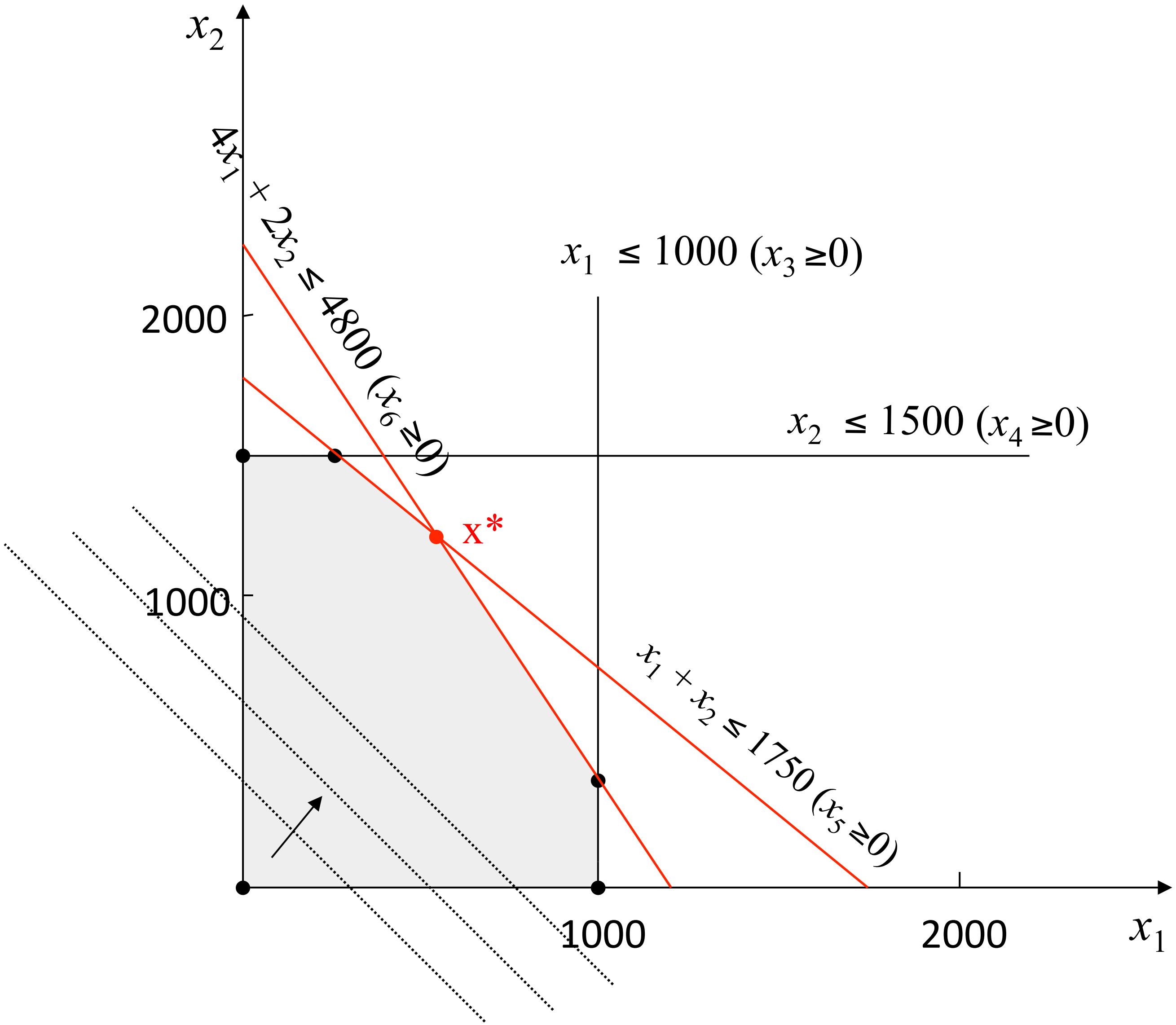
$$
\begin{array}{llllllll}
\max & 12\,x_1 + 9\,x_2 & & & & & & \\
\text{sa} & x_1 & & + x_3 & & & & = 1000 \\
 & & x_2 & & + x_4 & & & = 1500 \\
 & x_1 + & x_2 & & & + \; x_5 & & = 1750 \\
 & 4x_1 + & 2x_2 & & & & + x_6 & = 4800 \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 & & & & & &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lllllll}
x_1 & & + x_3 & & & & = 1000 \\
 & x_2 & & + x_4 & & & = 1500 \\
x_1 + & x_2 & & & + \; 0 & & = 1750 \\
4x_1 + & 2x_2 & & & & + \; 0 & = 4800
\end{array}
$$

não básicas

$$x_1 = 650,\ x_2 = 1100,\ x_3 = 350,\ x_4 = 400$$

básicas


x_2
$4x_1 + 2x_2 \leq 4800$ $(x_6 \geq 0)$
$x_1 \leq 1000$ $(x_3 \geq 0)$
2000
$x_2 \leq 1500$ $(x_4 \geq 0)$
x*
1000
$x_1 + x_2 \leq 1750$ $(x_5 \geq 0)$
1000
2000
x_1

Existência de soluções básicas

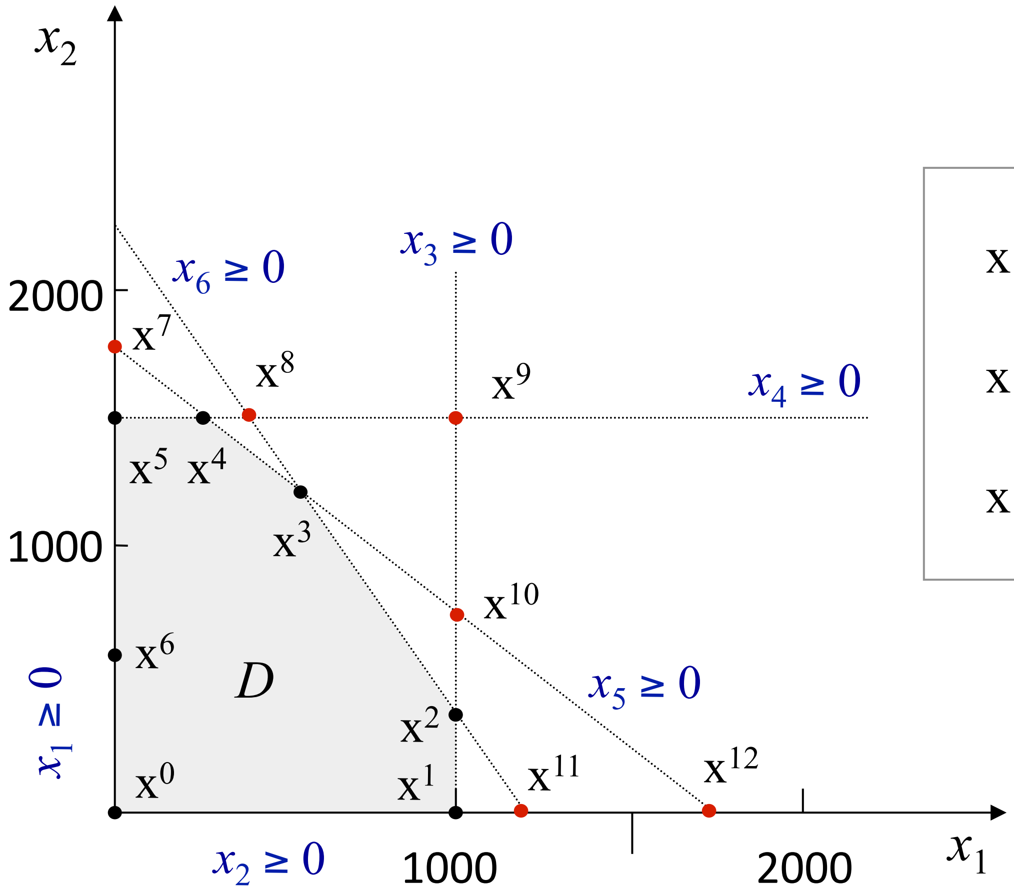
$$\begin{aligned}
x_1 \quad\quad + x_3 \quad\quad\quad &= 1000 \\
x_2 \quad\quad + x_4 \quad\quad &= 1500 \\
x_1 + x_2 \quad\quad\quad + 0 \quad &= 1750 \\
4x_1 + 2x_2 \quad\quad\quad\quad + 0 &= 4800
\end{aligned}
\qquad
\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -2 \neq 0$$

$$\begin{aligned}
x_1 \quad\quad + x_3 \quad\quad\quad &= 1000 \\
0 \quad\quad + 0 \quad\quad &= 1500 \\
x_1 + 0 \quad\quad\quad + x_5 \quad &= 1750 \\
4x_1 + 0 \quad\quad\quad\quad + x_6 &= 4800
\end{aligned}
\qquad
\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 0$$

solução básica existe se e somente se as colunas das restrições de
de igualdade correspondentes às m variáveis básicas são linearmente
independentes (formam uma base)(solução não degenerada).

Solução básica factível: solução básica não negativa

Soluções básicas factíveis: pontos extremos de D



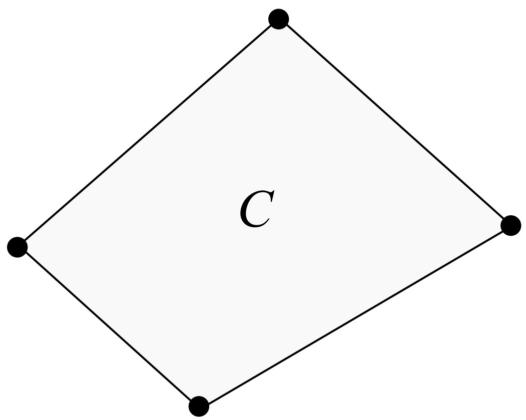
$$x^{11} = (1200,\ 0,\ -200,\ 1500,\ 550,\ 0)$$

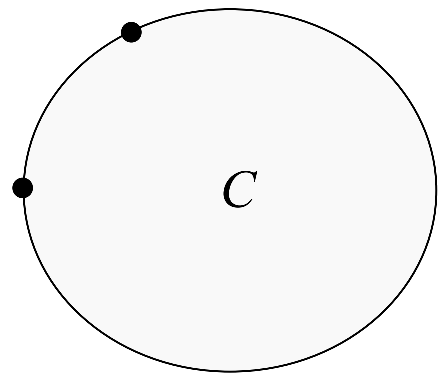
$$x^9 = (1000,\ 1500,\ 0,\ 0,\ -750,\ -2200)$$

$$x^2 = (1000,\ 400,\ 0,\ 1100,\ 350,\ 0)$$

Ponto extremo

Um ponto x de um conjunto convexo C é um ponto extremo se não existem dois pontos distintos x^1 e x^2 em C tal que, para algum α, $0 < \alpha < 1$, $x = \alpha x^1 + (1 - \alpha) x^2$





Resultados importantes: resumo

Teorema 1: equivalência pontos extremos e soluções básicas

Considere um poliedro não vazio $P = \{x \in R^n \mid Ax = b \text{ e } x \geq 0\}$. Um vetor x é um ponto extremo de P se e somente se x é uma solução básica factível de $Ax = b$, $x \geq 0$.

Teorema 2: representação de soluções básicas factíveis

Considere um modelo de PL na forma padrão e sejam $x^1,..,x^k$ soluções básicas factíveis do modelo. Então, qualquer ponto $x \in P$ pode ser escrito como

$$x = d + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x^i$$

onde ou $d = 0$ ou é uma direção ilimitada e $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1,\ \lambda_i \geq 0$

Teorema 3: resultado fundamental da programação linear

Dado um modelo de programação linear na forma padrão, então:

3.1 se existe uma solução factível, então existe uma solução básica factível,
3.2 se existe uma solução factível ótima, então existe uma solução básica factível ótima.

Resultado fundamental da PL sob o ponto de vista algébrico

Colorário 1: existência de pontos extremos

Se um poliedro $P = \{x \in R^n \mid Ax = b \text{ e } x \geq 0\}$ é não vazio, então P possui no mínimo um ponto extremo.

Colorário 2: solução ótima finita é um ponto extremo

Se existe uma solução ótima finita para um modelo de PL, então existe uma solução ótima finita que é um ponto extremo de P.

Colorário 3: número de pontos extremos

O poliedro P possui no máximo um número finito de pontos extremos.

Colorário 4: representação de poliedros limitados

Se o poliedro P é limitado e não vazio, então P é o conjunto dos pontos que são combinações convexas de seus pontos pontos extremos.

Teorema 4: resultado fundamental da programação linear

Uma função objetivo linear $f(\mathrm{x}) = \mathrm{cx}$ atinge seu mínimo sobre um poliedro limitado P em um ponto extremo de P.

Prova (Luenberger, 1973):

Sejam $\mathrm{x}^1, \mathrm{x}^2, \ldots, \mathrm{x}^k$ pontos extremos de P. Como P é limitado e convexo,

todo ponto $\mathrm{x} \in \mathrm{P}$ pode ser expresso como

$\mathrm{x} = \alpha_1 \mathrm{x}^1 + \alpha_2 \mathrm{x}^2 + \ldots + \alpha_k \mathrm{x}^k, \quad \alpha_i \geq 0,\ i = 1,\ldots,k;\ \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_k = 1$

Logo $f(\mathrm{x}) = \mathrm{cx} = \alpha_1 (\mathrm{cx}^1) + \alpha_2 (\mathrm{cx}^2) + \ldots + \alpha_k (\mathrm{cx}^k)$

Seja $\mathrm{z} = \min \{\mathrm{cx}^i,\ i = 1,\ldots, k\}$. Então $\mathrm{cx} \geq (\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_k)\mathrm{z} = \mathrm{z}$

Logo, o mínimo de $f(\mathrm{x}) = \mathrm{cx}$ sobre P é z.

Resultado fundamental da PL sob o ponto de vista geométrico

4-Algoritmo simplex

1-solução básica factível inicial: ponto extremo

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
max c	12	9	0	0	0	0	
	1	0	1	0	0	0	1000
A	0	1	0	1	0	0	1500
	1	1	0	0	1	0	1750
	4	2	0	0	0	1	4800
	N	N	B	B	B	B	
x^0	0	0	1000	1500	1750	4800	

2-Direções de busca (direções simplex)

Direção simplex

construída aumentando o valor de uma única variável não básica de forma que os valores das variáveis não básicas restantes não sejam modificados e reavaliando os valores das variáveis básicas para preservar as restrições de igualdade

$$A\,\Delta x = 0$$

aumentando x_1

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_1 = 1 \\ \Delta x_2 = 0 \\ \Delta x_3 \\ \Delta x_4 \\ \Delta x_5 \\ \Delta x_6 \end{bmatrix} = 0$$

$$\Delta x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & -4 \end{bmatrix}$$

aumentando x_2

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_1 = 0 \\ \Delta x_2 = 1 \\ \Delta x_3 \\ \Delta x_4 \\ \Delta x_5 \\ \Delta x_6 \end{bmatrix} = 0$$

$$\Delta x = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

3-Direções que melhoram objetivo e custo reduzido

$$f(\mathrm{x}) = \mathrm{cx} = \sum_{j=1}^{n} c_{\mathrm{j}} x_{\mathrm{j}} \quad \rightarrow \quad \nabla f(\mathrm{x}) = \mathrm{c} = [c_1, c_2, \cdots c_n],\ \forall \mathrm{x}$$

$\overline{c_{\mathrm{j}}} = \mathrm{c}\,\Delta\mathrm{x}$ $\Delta\mathrm{x} =$ direção simplex que aumenta x_j custo reduzido

$\overline{c_{\mathrm{j}}} > 0$ direção simplex melhora para max

$\overline{c_{\mathrm{j}}} < 0$ direção simplex melhora para min

$$\overline{c_1} = [12,\ 9,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0]\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ -4 \end{bmatrix} = 12 > 0\ ;\ \overline{c_2} = [12,\ 9,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0]\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix} = 9 > 0$$

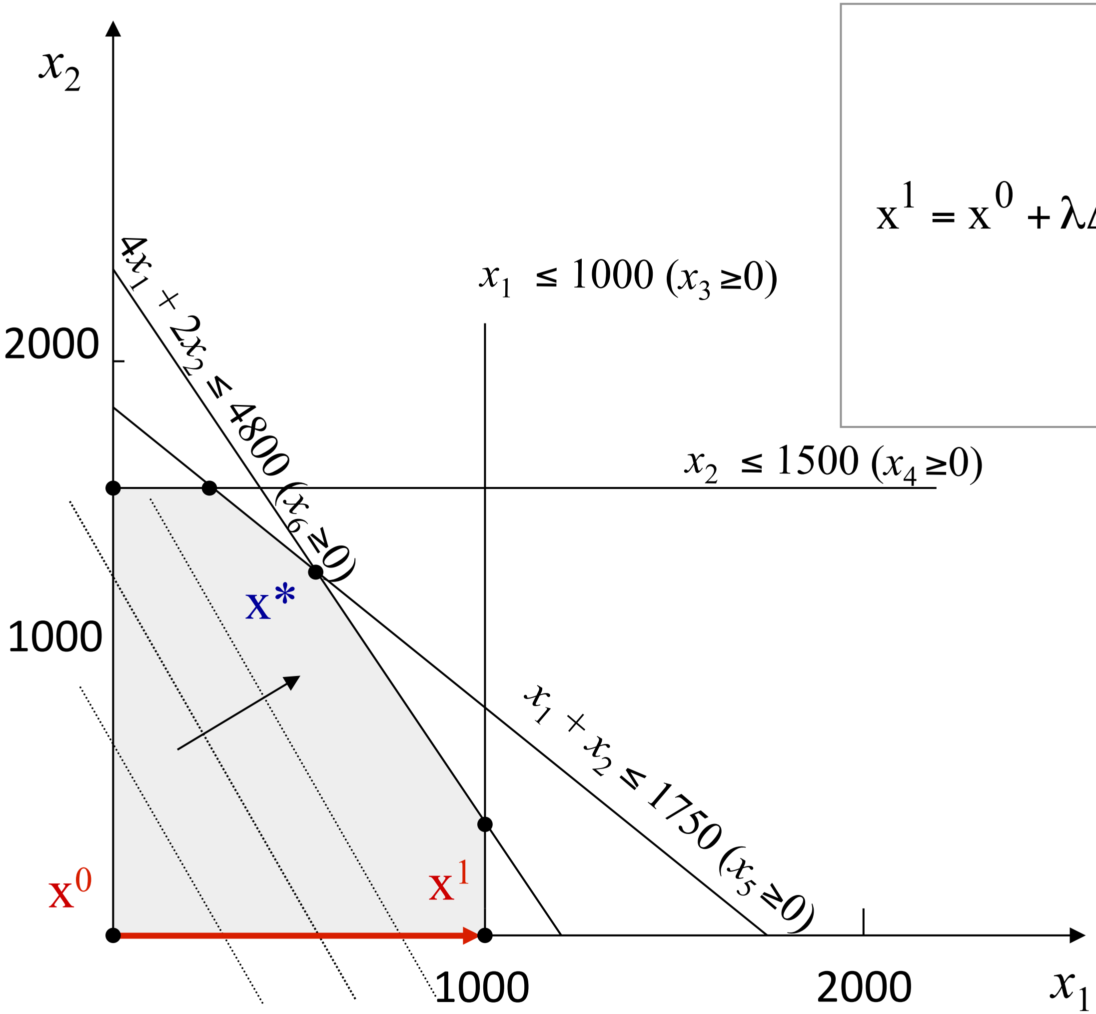
4-Passo na direção de busca

$$\lambda = \min\left\{ \frac{x_j^t}{-\Delta x_j} \; : \; \Delta x_j < 0 \right\}$$ se $\nexists \; \Delta x_j < 0$ modelo é ilimitado

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
max c	12	9	0	0	0	0	
	1	0	1	0	0	0	1000
A	0	1	0	1	0	0	1500
	1	1	0	0	1	0	1750
	4	2	0	0	0	1	4800
	N	N	B	B	B	B	
x^0	0	0	1000	1500	1750	4800	
Δx	1	0	-1	0	-1	-4	
			1000/-(-1)		1750/-(-1)	4800/-(-4)	

$$\lambda = \min\{1000,\ 1750,\ 1200\} = 1000$$

5-Atualização da base



$$
x^1 = x^0 + \lambda \Delta x = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1000 \\ 1500 \\ 1750 \\ 4800 \end{bmatrix} + 1000 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1000 \\ 0 \\ 0 \\ 1500 \\ 750 \\ 800 \end{bmatrix}
$$

variável x_1 entra na base, variável x_3 sai da base

Algoritmo simplex

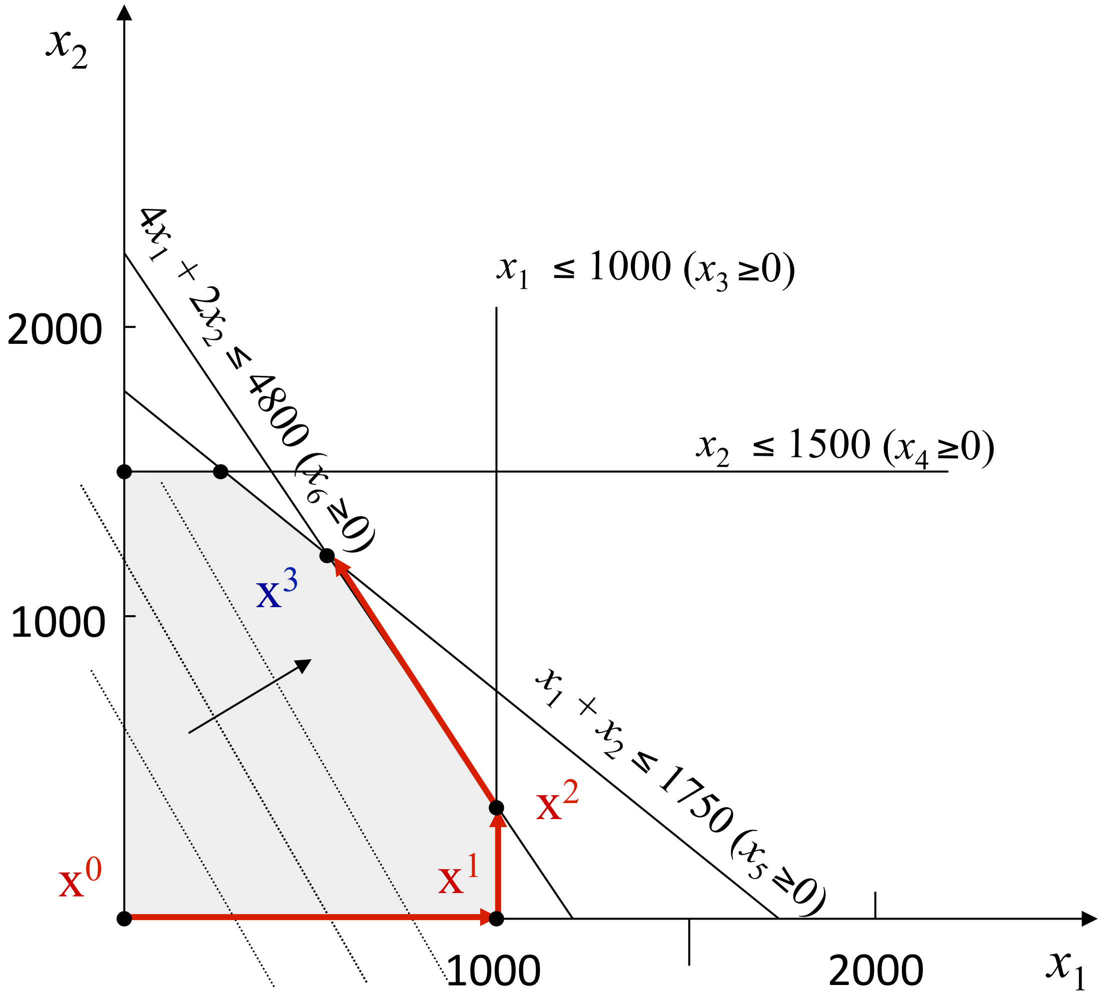
Passo 0 Inicialização: com solução básica factível x^0, $t \leftarrow 0$;

Passo 1 Direções simplex: construir $\Delta\mathrm{x}$ associada com não básica x_j
calcular custo reduzido $\underline{c}_j = \mathrm{c}\,\Delta\mathrm{x}$;

Passo 2 Otimalidade: se nenhuma direção melhora ($\nexists\ \underline{c}_j > 0$ para max
$\underline{c}_j < 0$ para min), então parar, x^t é ótima; senão escolher nova
direção $\Delta\mathrm{x}$ que melhora valor função objetivo; seja x_p a variável
que entra na base;

Passo 3 Passo: se todas componentes de $\Delta\mathrm{x}$ forem não negativas, então
parar, o modelo é ilimitado; senão determinar λ e escolher
variável que deixa a base, x_r: $\lambda \leftarrow (\ x_r / -\Delta x_r\ )$;

Passo 4 Novo ponto e base: determinar nova solução $\mathrm{x}^{t+1} = \mathrm{x}^t + \lambda\ \Delta\mathrm{x}^{t+1}$
e trocar x_r por x_p; $t = t + 1$; ir para o Passo 1;



x_2
2000
1000
$4x_1 + 2x_2 \leq 4800$ ($x_6 \geq 0$)
$x_1 \leq 1000$ ($x_3 \geq 0$)
$x_2 \leq 1500$ ($x_4 \geq 0$)
$x_1 + x_2 \leq 1750$ ($x_5 \geq 0$)
x^3
x^2
x^1
x^0
1000
2000
x_1

5-Tableau simplex

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
$\underline{a}_{11}$	$\underline{a}_{12}$	1	0	0	0	$\underline{b}_1$
$\underline{a}_{21}$	$\underline{a}_{22}$	0	1	0	0	$\underline{b}_2$
$\underline{a}_{31}$	$\underline{a}_{32}$	0	0	1	0	$\underline{b}_3$
$\underline{a}_{41}$	$\underline{a}_{42}$	0	0	0	1	$\underline{b}_4$
$\underline{c}_1$	$\underline{c}_2$	0	0	0	0	$-\underline{z}$

Método de eliminação de Gauss e o algoritmo simplex

1- Se $\exists\ \underline{c}_j > 0$ ($\underline{c}_j < 0$, min) então coluna $q = \max_j \{\underline{c}_j, j \in N\}$
linha $p = \min_i \{\underline{b}_i/\underline{a}_{iq}, \underline{a}_{iq} > 0, i = 1,\ldots,m\}$

Se $\underline{c}_j < 0, \forall j$ ($\underline{c}_j > 0$, min) então solução ótima

Se $\nexists\ \underline{a}_{iq} > 0$ então o modelo é ilimitado

2- Atualizar elementos do tableau

Atualização do tableau simplex

					q			
	x_1	x_2	x_3	....	x_q	....	x_n	
	y_{11}	y_{12}	y_{13}	....		....	y_{1n}	$y_{1,n+1}$
	y_{21}	y_{22}	y_{23}	....		....	y_{1n}	$y_{2,n+1}$
	....	....	....	....	....	....	....	....
p	y_{p1}			....	$\boxed{y_{pq}}$	....		
	....	....	....	....	....	....	....	....
	y_{m1}	y_{m2}	y_{m3}	....		....	y_{1n}	$y_{m,n+1}$
	$y_{m+1,1}$	$y_{m+1,2}$	$y_{m+1,3}$	....		....	$y_{m+1,n}$	$y_{m+1,n+1}$

y_{pq} = pivô

$$y'_{ij} = y_{ij} - \frac{y_{pj}}{y_{pq}} y_{iq} \qquad i \neq p$$

$$y'_{pj} = \frac{y_{pj}}{y_{pq}} \qquad i = p$$

$q = 1$ $\quad t = 0$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
1	0	1	0	0	0	1000
0	1	0	1	0	0	1500
1	1	0	0	1	0	1750
4	2	0	0	0	1	4800
12	9	0	0	0	0	0

$p = 1$

$$q = \max_j \{\underline{c}_1, \underline{c}_2\} = \max_j \{12, 9\} = 1$$

$$p = \min_i \left\{ \frac{\underline{b}_1}{\underline{a}_{11}}, \frac{\underline{b}_2}{\underline{a}_{21}}, \frac{\underline{b}_3}{\underline{a}_{31}}, \frac{\underline{b}_4}{\underline{a}_{41}} \right\} = \min_i \{1000, \times, 1750, 1200\} = 1$$

$q = 2$

$t = 1$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
	1	0	1	0	0	0	1000
	0	1	0	1	0	0	1500
	0	1	-1	0	1	0	750
$p = 4 \rightarrow$	0	2	-4	0	0	1	800
	0	9	-12	0	0	0	-12000

$$q = \max_j \left\{ \underline{c}_2, \underline{c}_3 \right\} = \max_j \left\{ 9, -12 \right\} = 2$$

$$p = \min_i \left\{ \frac{\underline{b}_1}{\underline{a}_{12}}, \frac{\underline{b}_2}{\underline{a}_{22}}, \frac{\underline{b}_3}{\underline{a}_{32}}, \frac{\underline{b}_4}{\underline{a}_{42}} \right\} = \min_i \left\{ \times, 1500, 750, 400 \right\} = 4$$

$q = 3$

$t = 2$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
1	0	1	0	0	0	1000
0	0	2	1	0	-0.5	1100
0	0	1	0	1	-0.5	350
0	1	-2	0	0	0.5	400
0	0	6	0	0	-4.5	-15600

$p = 3 \rightarrow$

$$q = \max_j \{ \underline{c}_3, \underline{c}_6 \} = \max_j \{ 6, -4.5 \} = 3$$

$$p = \min_i \left\{ \frac{\underline{b}_1}{\underline{a}_{13}}, \frac{\underline{b}_2}{\underline{a}_{23}}, \frac{\underline{b}_3}{\underline{a}_{33}}, \frac{\underline{b}_4}{\underline{a}_{43}} \right\} = \min_i \{ 1000, 550, 350, \times \} = 3$$

$t = 3$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
1	0	0	0	-1	0.5	650
0	0	0	1	-2	0.5	400
0	0	1	0	1	-0.5	350
0	1	0	0	2	-0.5	1100
0	0	0	0	-6	-1.5	-17700

$x^* = (650 \;\; 1100 \;\; 350 \;\; 400 \;\; 0 \;\; 0)$

Algoritmo simplex com duas Fases

Passo 0 Modelo Artificial: se ∃ solução básica factível x^0 , então ir para 3;
senão criar modelo artificial somando (subtraindo) variáveis artificiais;

Passo 1 Fase I: inicializar modelo artificial com solução básica artifical factível e minimizar soma das variáveis artificiais;

Passo 2 Factibilidade: se Fase I termina com $soma > 0$, então parar (modelo original infactível); senão utilizar solução final como solução básica factível inicial para o modelo original;

Passo 3 Fase II: aplicar algoritmo simplex inicializando-o com a solução básica factível obtida no Passo 2 para obter ou a solução ótima, ou detetar que o problema é ilimitado.

Exemplo

$$
\begin{aligned}
\min\ & 4x_1 + x_2 + x_3 \\
\text{sa}\ & 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 4 \\
& 3x_1 + 3x_2 + x_3 = 3 \\
& x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

Fase I

$$
\begin{aligned}
\min\ & x_4 + x_5 \\
\text{sa}\ & 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 4 \\
& 3x_1 + 3x_2 + x_3 + \quad + x_5 = 3 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0
\end{aligned}
$$

modelo artificial

Tableau inicial

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
2	1	2	1	0	4
3	3	1	0	1	3
0	0	0	-1	-1	0

Primeiro tableau

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
2	1	2	1	0	4
3	3	1	0	1	3
5	4	3	0	0	7

Segundo tableau

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	-1	$\boxed{4/3}$	1	-2/3	2
1	1	1/3	0	1/3	1
0	-1	4/3	0	-5/3	2

Terceiro tableau

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	-3/4	1	3/4	-1/2	3/2
1	5/4	0	-1/4	1/2	1/2
0	0	0	-1	-1	0

Fase II

$$\begin{aligned} \min \quad & 4x_1 + x_2 + x_3 \\ \text{sa} \quad & 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 4 \\ & 3x_1 + 3x_2 + x_3 = 3 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Tableau inicial

x_1	x_2	x_3	
0	-3/4	1	3/2
1	5/4	0	1/2
-4	-1	-1	0

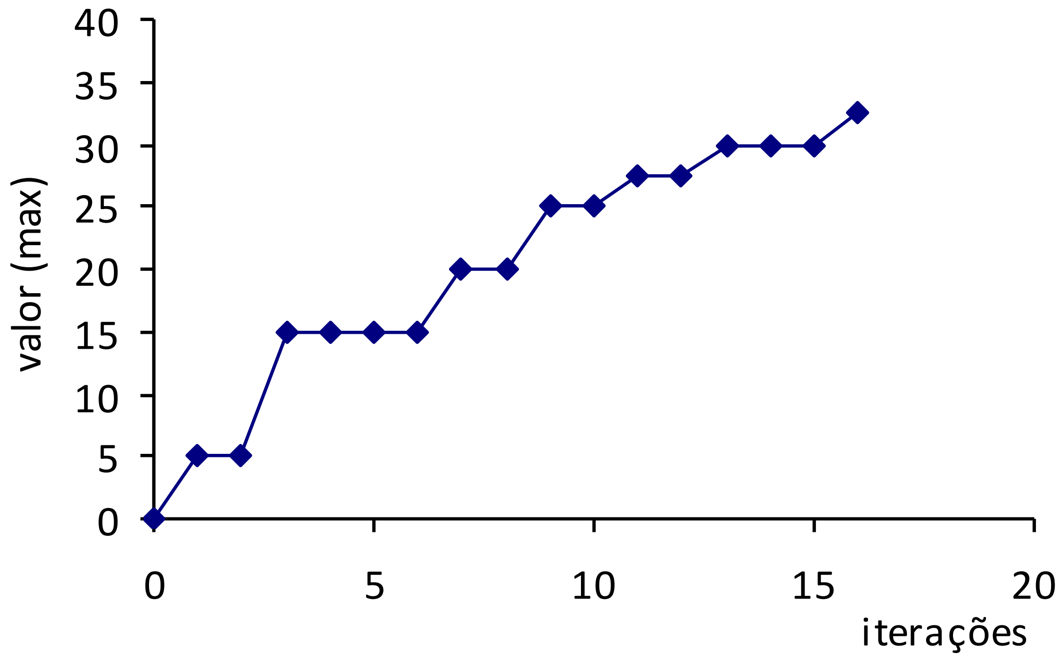
Primeiro tableau

x_1	x_2	x_3	
0	-3/4	1	3/2
1	5/4	0	1/2
0	13/4	0	7/2

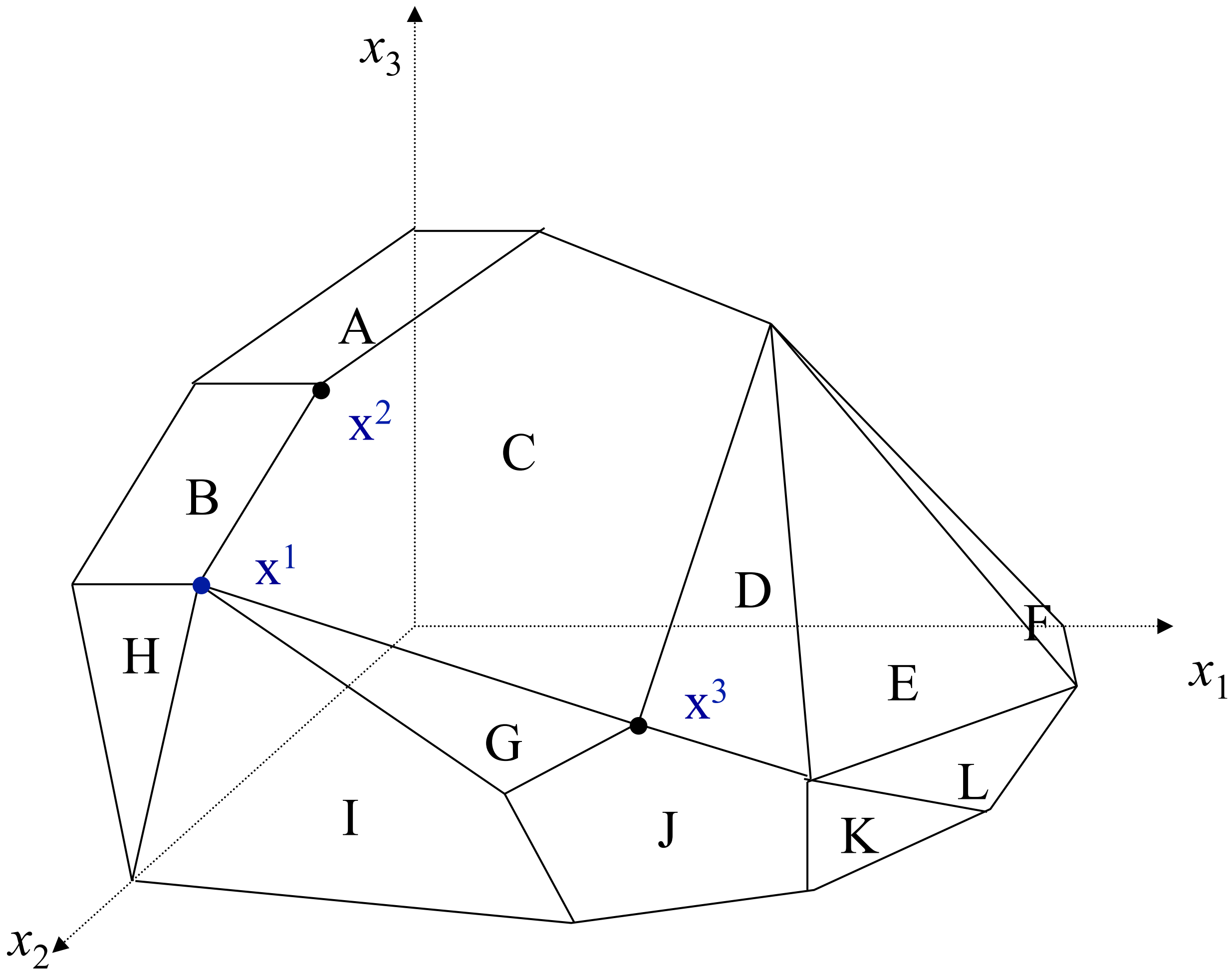
Segundo tableau

x_1	x_2	x_3	
3/5	0	1	9/5
4/5	1	0	2/5
-13/5	0	0	11/5

6-Soluções degeneradas, convergência



Solução básica factível degenerada: se restrições de não negatividade para algumas variáveis básicas estão ativas (algumas variáveis básicas são nulas) ↔ várias bases produzem a mesma solução básica



x^1 é uma solução degenerada

Convergência e ciclagem

- se a cada iteração existe um valor $\lambda > 0$, então o algoritmo simplex pára após um número finito de iterações, indicando ou a solução ótima ou concluindo que o modelo é ilimitado.
- com o algoritmo de duas fases, deteta-se também infactibilidade.
- existência de soluções degeneradas pode provocar que $\lambda = 0$.
- sequência de soluções pode se repetir $\rightarrow$ ciclagem

$$\text{n}^{\text{o}} \text{ máximo de bases} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Observação

Este material refere-se às notas de aula do curso EA 044 Planejamento e Análise de Sistemas de Produção da Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação da Unicamp. Não substitui o livro texto, as referências recomendadas e nem as aulas expositivas. Este material não pode ser reproduzido sem autorização prévia dos autores. Quando autorizado, seu uso é exclusivo para atividades de ensino e pesquisa em instituições sem fins lucrativos.