EA044 - Planejamento e Análise de Sistemas de Produção

Resolução da Lista 9 - Programação não linear irrestrita

Exercício 1

$f(x) = x^3 - 3x^2 + 11x$,   Taylor em $x = 3$

$f(x) = x^3 - 3x^2 + 11x$
Para $x = 3$, temos:
$f(3) = 3^3 - 3 \cdot 3^2 + 11 \cdot 3 = 27 - 27 + 33 = 33$

Derivada de primeira ordem: $\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 6x + 11$
Para $x = 3$, temos:
$\frac{\partial f}{\partial x} = 3 \cdot (3)^2 - 6 \cdot (3) + 11 = 27 - 18 + 11 = 20$

Derivada de segunda ordem: $\frac{\partial^2 f}{\partial x} = 6x - 6$
Para $x = 3$, temos:
$\frac{\partial f^2}{\partial x} = 6 \cdot 3 - 6 = 12$

a) $f(x + \lambda) = f(x)|_{x=3} + \lambda \frac{\partial f}{\partial x}|_{x=3}$
$f(x + \lambda) = 33 + 20\lambda$

b) $f(x + \lambda) = f(x)|_{x=3} + \ \lambda \frac{\partial f}{\partial x}|_{x=3} + \ \frac{1}{2}\lambda^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x}|_{x=3}$
$f(x + \lambda) = 33 + 20\lambda + \ \frac{1}{2} \ \cdot 12\lambda^2$
$f(x + \lambda) = 33 + 20\lambda + \ 6\lambda^2$

Exercício 2

a) $min\ (x_1)^2 + x_1 x_2 - 6x_1 - 8x_2;\ x = (8, -10)$.

(1) $\frac{\partial f}{\partial x_1} = 2x_1 + x_2 - 6 = 0$

(2) $\frac{\partial f}{\partial x_2} = x_1 - 8 = 0 \ \rightarrow \ x_1 - 8 = 0 \rightarrow x_1 = 8$

Substituindo (2) em (1), temos:
$2x_1 + x_2 - 6 = 0 \rightarrow 2 \cdot 8 + x_2 - 6 = 0 \rightarrow x_2 = -10$

Logo, x é um ponto estacionário!

b) $max\ 10(x_1)^2 + 12lnx_2;\ x = (1{,}2)$
(1) $\frac{\partial f}{\partial x_1} = 20x_1 = 0\ \rightarrow x_1 = 0$

(2) $\frac{\partial f}{\partial x_2} = 12 \cdot \frac{1}{x_2} = 0\ \rightarrow x_2 = \infty$

Como $x = (1{,}\infty) \neq x = (1{,}2)$; x não é um ponto estacionário!

Direção de busca: $\Delta x = \nabla f|_x = \begin{pmatrix} 20 \\ 6 \end{pmatrix}$
(1) $\frac{\partial f}{\partial x_1} = 20x_1 = 0$
Para $x_1 = 1$, temos: $20x_1 = 20$

(2) $\frac{\partial f}{\partial x_2} = 12 \cdot \frac{1}{x_2} = 0$
Para $x_2 = 2$, temos: $12 \cdot \frac{1}{x_2} = 6$

c) $min\ x_1x_2 - 10x_1 + 4x_2,\ x = (-4{,}10)$

(1) $\frac{\partial f}{\partial x_1} = x_2 - 10 = 0\ \rightarrow x_2 - 10 = 0 \rightarrow x_2 = 10$

(2) $\frac{\partial f}{\partial x_2} = x_1 + 4 = 0\ \rightarrow x_1 + 4 = 0 \rightarrow x_1 = -4$

Logo, x é um ponto estacionário!

Exercício 3
a) $f(x_1, x_2) = 3(x_1)^2 - x_1x_2 + (x_2)^2 - 11x_1;\ x = (2{,}1)$

(1) $\frac{\partial f}{\partial x_1} = 6x_1 - x_2 - 11 = 0$

(2) $\frac{\partial f}{\partial x_2} = -x_1 + 2x_2 = 0$

De **(1)**, temos: $6x_1 - x_2 - 11 = 0 \rightarrow x_2 = 6x_1 - 11$ **(3)**

Substituindo **(3)** em **(2)**:

$-x_1 + 2(6x_1 - 11) = 0$
$-x_1 + 12x_1 - 22 = 0 \rightarrow 11x1 = 22 \rightarrow x_1 = 2$ **(4)**

Substituindo **(4)** em **(3)**:
$x_2 = 6x_1 - 11$
$x_2 = 6 \cdot 2 - 11 \rightarrow x_2 = 1$

Logo, x é um ponto estacionário!

Calculando a Hessiana:
$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = 6$; $\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = 2$; $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = -1$; $\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} = -1$

$$\text{H} = \begin{bmatrix} 6 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$\det[6] = 6 \ > 0$
$\det[\text{H}] = 11 \ > 0$

Temos uma matriz Hessiana positiva definida.
Mínimo local definitivamente.

b) $f(x_1, x_2) = -(x_1)^2 - 6x_1x_2 + 9(x_2)^2 - 11x_1;\ x = (-3{,}1)$
(1) $\frac{\partial f}{\partial x_1} = -2x_1 - 6x_2 = 0$

(2) $\frac{\partial f}{\partial x_2} = -6x_1 - 18x_2 = 0$

Substituindo $x = (-3{,}1)$, em **(1)** e **(2)**, temos:

$\frac{\partial f}{\partial x_1} = -(2 \cdot -3) - (6 \cdot 1) = 0 \rightarrow 0 = 0$

$\frac{\partial f}{\partial x_2} = -(6 \cdot -3) - (18 \cdot 1) = 0 \rightarrow 0 = 0$

Logo, x é um ponto estacionário!

Calculando a Hessiana:

$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = -2$; $\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = -18$; $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = -6$; $\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} = -6$

H = $\begin{bmatrix} -2 & -6 \\ -6 & -18 \end{bmatrix}$ det[-2] = -2 < 0

det[H] = 36 - 36 = 0

Temos uma matriz Hessiana semi-negativa definida. Possivelmente é um máximo local.

Exercício 4

a) $f(x_1, x_2) = ln(x_1)^2 + 20ln(x_2) - 11x_1, \ \forall x_1, x_2 > 0$

Derivada de primeira ordem: $\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{1}{x_1}$; $\frac{\partial f}{\partial x_2} = \frac{1}{x_2}$

Derivada de segunda ordem: $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = -\frac{1}{x_1^2}$; $\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = -\frac{1}{x_2^2}$

Calculando a Hessiana:

$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = 0$; $\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} = 0$

H = $\begin{bmatrix} -\frac{1}{x_1} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{x_2} \end{bmatrix}$

Temos uma matriz Hessiana semi-negativa definida. A função é côncava.

b) $f(x) = x \ senx, \ x \in [0, 2\pi]$

Derivada de primeira ordem: $\frac{\partial f}{\partial x} = x \ cosx \ + senx$

Derivada de segunda ordem: $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -x \ senx + cosx \ - cosx = -x \ senx \begin{cases} \leq 0 & x \in [0,\pi] \\ \geq 0 & x \in [\pi,2\pi] \end{cases}$

Função nem é concava, nem é convexa!

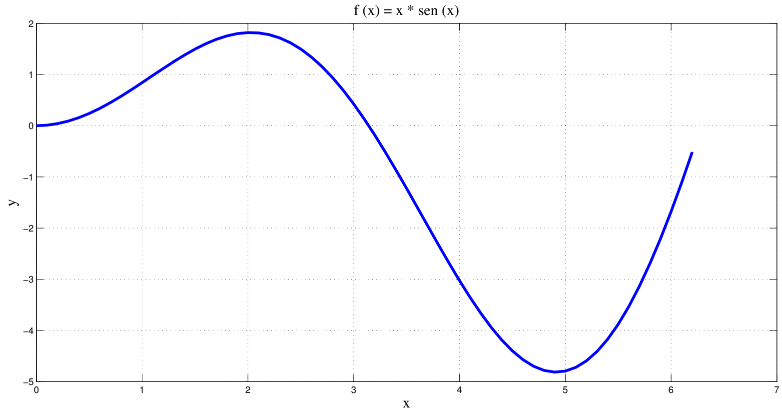

Figura 1: f(x) = x * sen(x)

Exercício 5

a)

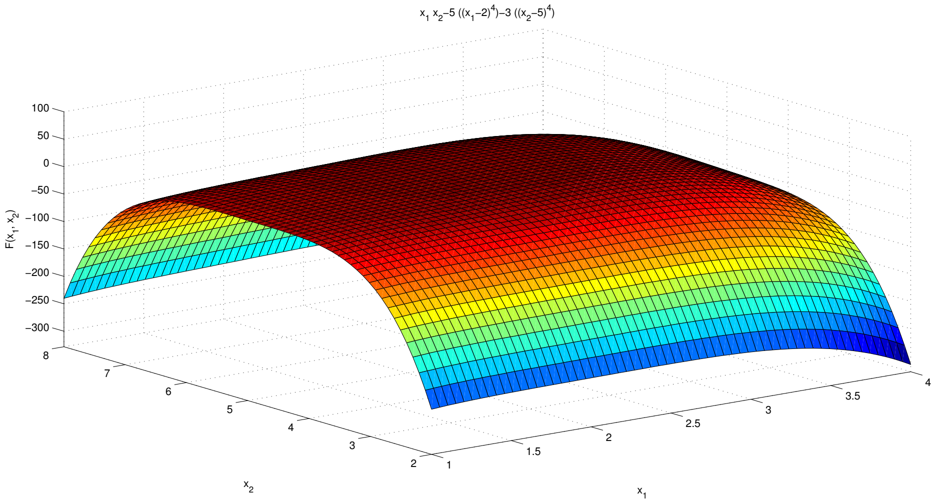

Figura 2: Função para $x_1 \in [1{,}4]$ e $x_2 \in [2{,}8]$

b) Derivada de primeira ordem:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = x_2 - 20(x_1 - 2)^3$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = x_1 - 12(x_2 - 5)^3$$

Determinando a direção de busca, $x_0 = (1{,}3)$

$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 3 - 20(1-2)^3 = 3 - 20(-1)^3 = 23$

$\frac{\partial f}{\partial x_2} = 1 - 12(3-5)^3 = 1 - 12(-2)^3 = 97$

c)

$\max_{\lambda > 0} \quad f(x^0 + \lambda \cdot \nabla f(x^0)) = 0$

$\max_{\lambda > 0} \quad f((1+23\lambda) \cdot (3+97\lambda) - 5((1+23\lambda)-2)^4 - 3((3+97\lambda)-5)^4)$

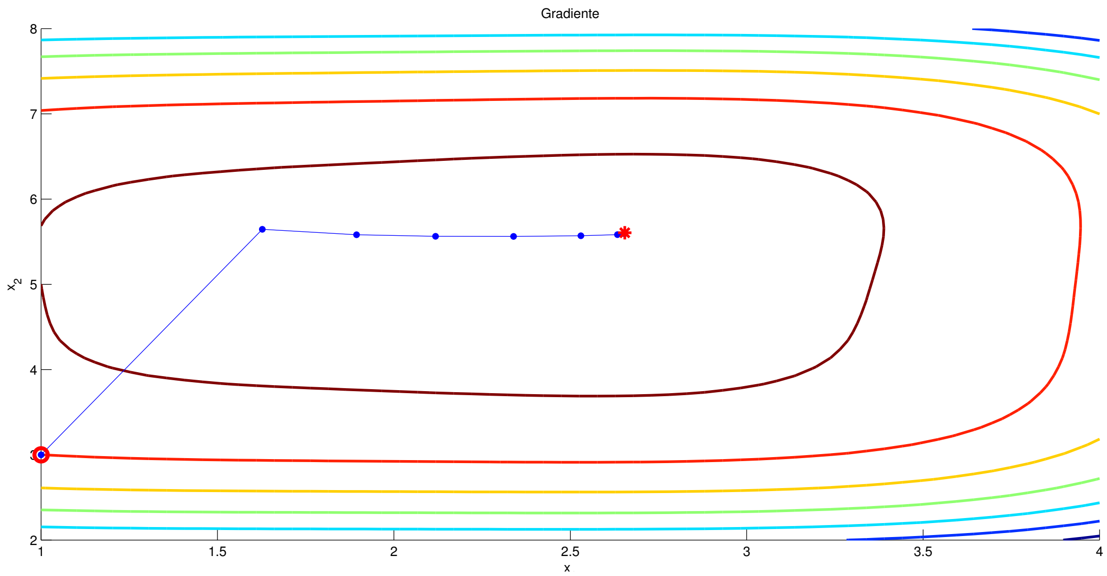

Figura 3: Busca unidimensional pelo método do gradiente

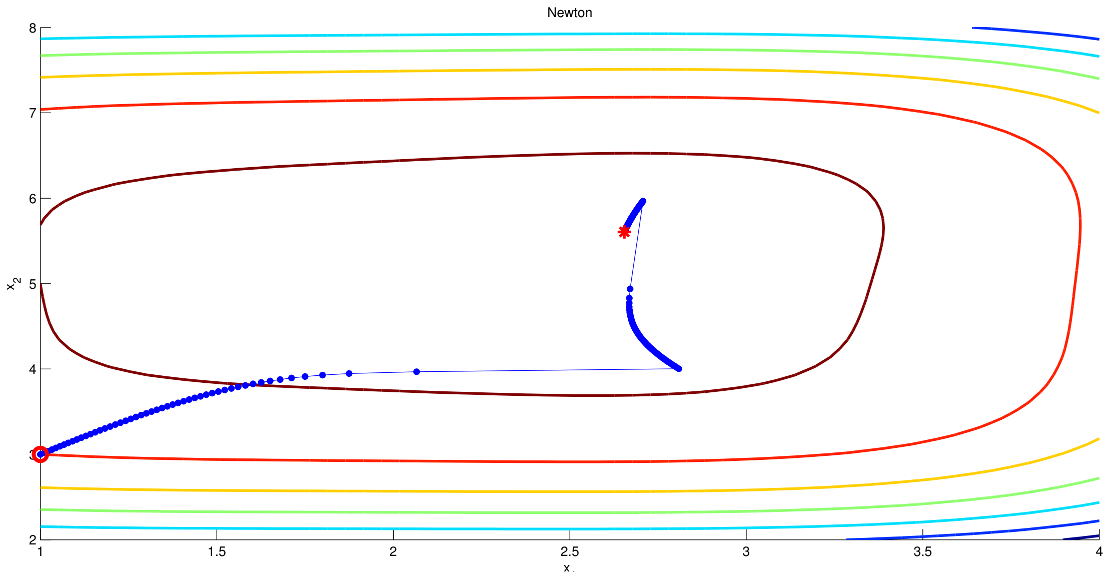

Figura 4: Busca unidimensional pelo método de Newton

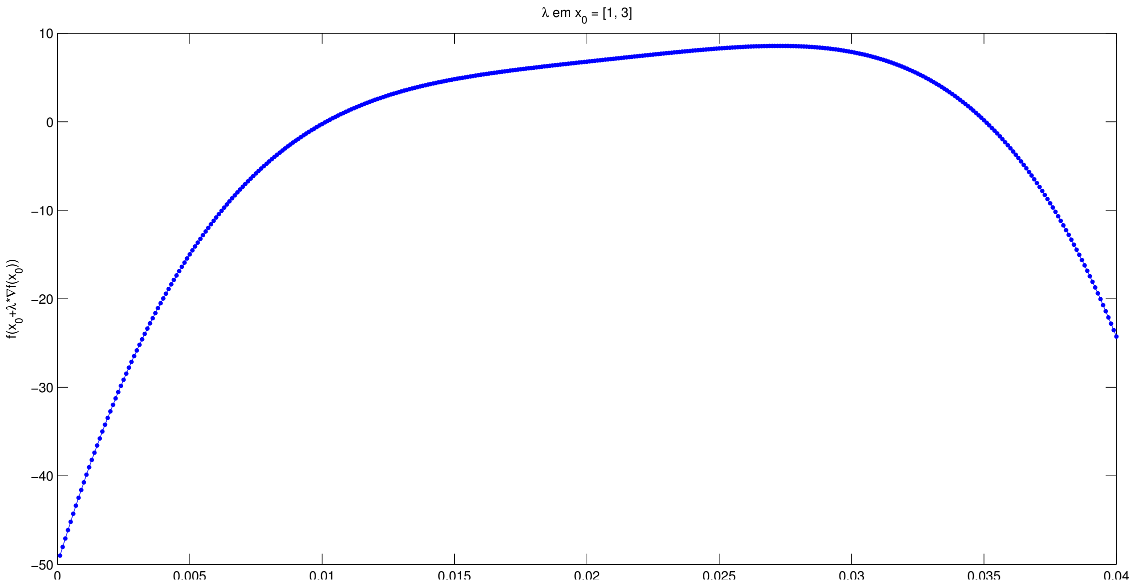

Figura 5: Lambda

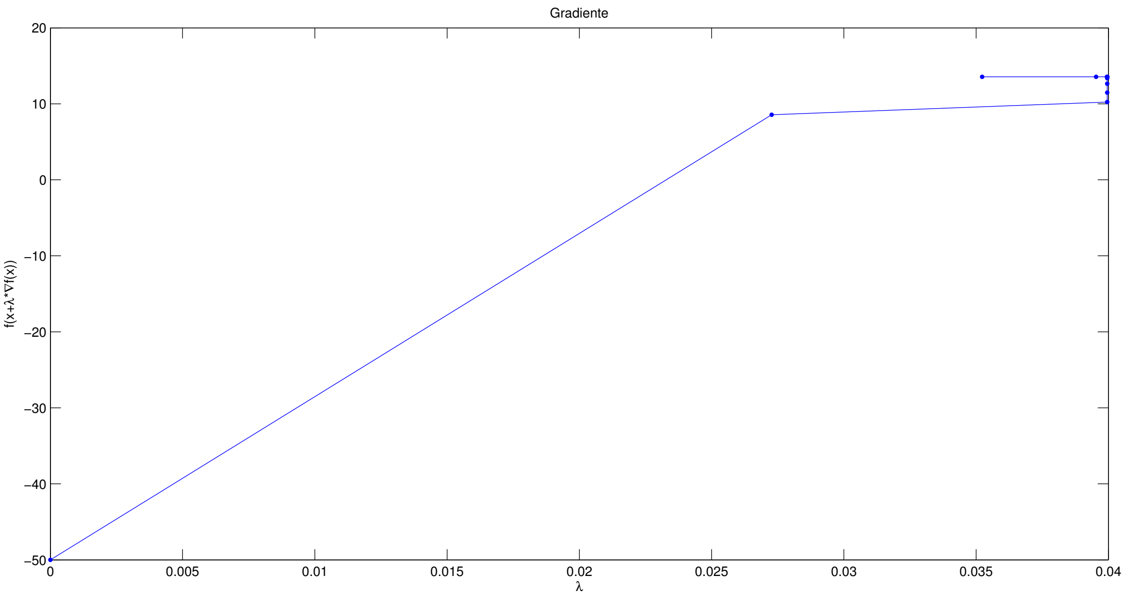

Figura 6: Lambda ótimo para cada iteração utilizando o método do gradiente

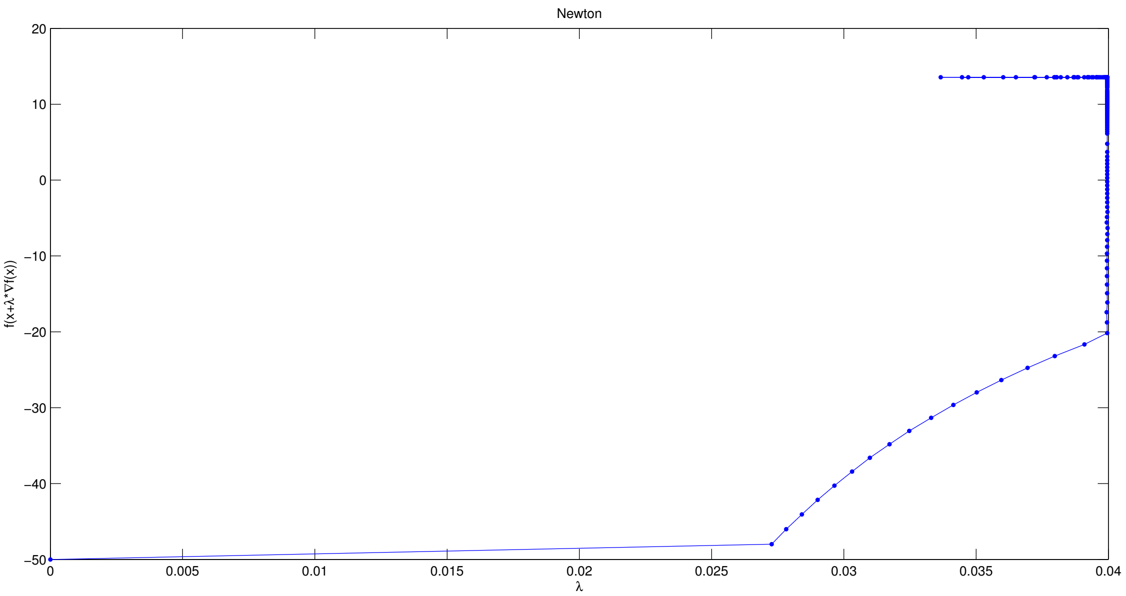

Figura 7: Lambda ótimo para cada iteração utilizando o método de Newton