EA044 - Planejamento e Análise de Sistemas de Produção

Resolução da Lista 7 - Caminhos mínimos e programação dinâmica discreta

Exercício 1

a)

v[1,2] = 4,	1-3-2	v[1,3] = 3,	1-3	v[1,4] = 10,	1-3-2-4
v[2,1] = 8,	2-1	v[2,3] = 10,	2-4-3	v[2,4] = 6,	2-4
v[3,1] = 3,	3-1	v[3,2] = 1,	3,2	v[3,4] = 7,	3-2-4
v[4,1] = 7,	4-3-1	v[4,2] = 5,	4-3-2	v[4,3] = 3,	4,3

b) v[1,4] = min ∞, v[1,2] + v[2,4], v[1,3] + v[3,4] = min∞, 4 + 6, 3 + 7 = 10

c) Caminho ótimo de 1 $\rightarrow$ 4: 1-3-2-4
Sub-caminhos de 1 $\rightarrow$ 4: 1-3, 1-3-2, 3-2, 3-2-4, 2-4.
Observar que todos eles são caminhos ótimos entre os respectivos nós (veja item a). Princípio de otimalidade de Bellman.

d) As equações funcionais são suficientes na ausência de ciclos negativos. No grafo todos os valores associados aos arcos e ramos são positivos, o que evita ciclos negativos.

Exercício 2

a) Algoritmo de Bellman-Ford, pois trata-se de caminho mínimo de um nó para todos os outros, sem a presença de ciclos negativos.

t=1

$v^1\ [2] = \min\ \{0 + c_{12},\ \ \infty + c_{32},\ \ \infty + c_{52}\} = \min\ \{10, \infty, \infty\} = 10$ $\qquad d^1[2] = 1$

$v^1\ [3] = \min\ \{0 + c_{13}\} = 3$ $\qquad d^1[3] = 1$

$v^1\ [4] = \min\ \{0 + c_{14},\ \ \infty + c_{34},\ \ \infty + c_{54}\} = \min\{7, \infty + 9, \infty + 4\} = 7$ $\qquad d^1[4] = 1$

$v^1\ [5] = \min\ \{\infty + c_{45},\ \ \infty + c_{35},\ \ \infty + c_{25}\} = \infty$

t=2

$v^2\ [2] = \min\ \{0 + c_{12},\ \ 3 + c_{32},\ \ \infty + c_{52}\} = \min\ \{10, 8, \infty\} = 8 \qquad d^2[2] = 3$

$v^2\ [3] = \min\ \{0 + c_{13}\} = 3 \qquad d^2[3] = 1$

$v^2\ [4] = \min\ \{0 + c_{14},\ \ 3 + c_{34},\ \ \infty + c_{54}\} = \min\{7, 12, \infty + 4\} = 7 \qquad d^2[4] = 1$

$v^2\ [5] = \min\ \{7 + c_{45},\ \ 3 + c_{35},\ \ 10 + c_{25}\} = \min\{11, 4, 12\} = 4 \qquad d^2[5] = 3$

t=3

$v^3\ [2] = \min\ \{0 + c_{12},\ \ 3 + c_{32},\ \ 4 + c_{52}\} = \min\ \{10, 8, 6\} = 6 \qquad d^3[2] = 5$

$v^3\ [3] = \min\ \{0 + c_{13}\} = 3 \qquad d^3[3] = 1$

$v^3\ [4] = \min\ \{0 + c_{14},\ \ 3 + c_{34},\ \ 4 + c_{54}\} = \min\{7, 12, 8\} = 7 \qquad d^3[4] = 1$

$v^3\ [5] = \min\ \{7 + c_{45},\ \ 3 + c_{35},\ \ 8 + c_{25}\} = \min\{11, 4, 10\} = 4 \qquad d^3[5] = 3$

t=4

não muda; fim

b) O grafo tem n=5 nós. Logo, o número máximo de arcos/ramos será:

arcos/ramos = n-1 = 4

c)

$1 \rightarrow 2$, 1-3-5-2

$1 \rightarrow 3$, 1-3

$1 \rightarrow 4$, 1-4

$1 \rightarrow 5$, 1-3-5

Exercício 3

a) Bellman-Ford, Floyd-Warshall ou Dijstra podem ser utilizados, mas o Dijstra é o mais eficiente pois todos os valores associados aos arcos são não negativos.

b) Inicialização: $v[1] = 0, \quad v[2] = \infty, \quad v[3] = \infty, \quad v[4] = \infty$

p=1

$v[2] = \min\ \{\infty, v[1] + c_{12}\} = 18 \qquad d[2] = 1$

$v[3] = \min\ \{\infty, v[1] + c_{13}\} = 10 \qquad d[3] = 1$

Novo permanente: $\min\ \{v[2], v[3]\} = \min\ \{18, 10\} \rightarrow$ p=3

p=3

$v[4] = \min\ \{\infty, v[3] + c_{34}\} = 19$ $\qquad d[4] = 3$

Novo permanente: $\min\ \{v[2], v[4]\} = \min\ \{18, 19\} \rightarrow$ p=2

p=2

$v[4] = \min\ \{19, v[2] + c_{24}\} = 19$ $\qquad d[4] = 1$

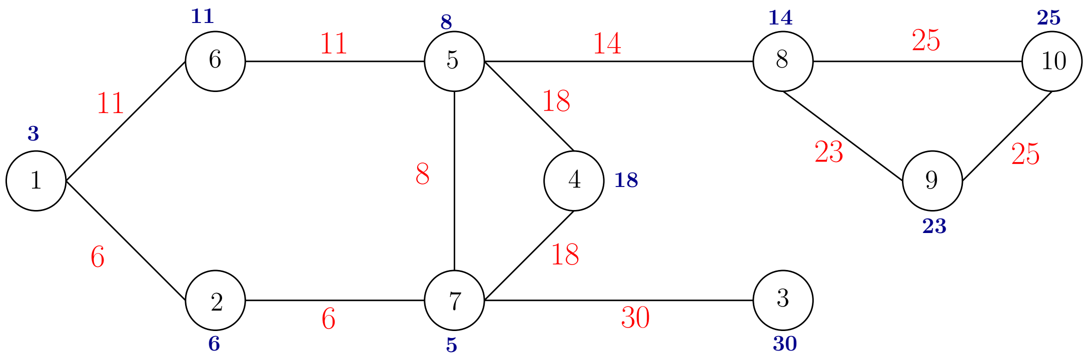
p=4, fim

Caminhos:

$1 \rightarrow 2$,	1-2	$v[2] = 18$
$1 \rightarrow 3$,	1-3	$v[3] = 10$
$1 \rightarrow 4$,	1-3-4	$v[4] = 19$

Exercício 4

a) As rotas correspondem aos caminhos mínimos (menor tempo neste exercício).



b) Caminhos mínimos de um nó a todos os outros; ramos com valores não negativos: Dijstra é o algoritmo mais eficiente.

c) Ver resumo nas tabelas abaixo.

	v[1]	v[2]	v[3]	v[4]	v[5]	v[6]	v[7]	v[8]	v[9]	v[10]
inicialização	0	oo	oo	oo	oo	oo	oo	oo	oo	oo
p = 1	p	6				11				
p = 2		p					12			
p = 6					22	p				
p = 7			42	30	20		p			
p = 5					p			34		
p = 4				p						
p = 8								p	57	59
p = 3			p							
p = 9									p	
p = 10										p
fim	0	6	42	30	20	11	12	34	57	59

	d[1]	d[2]	d[3]	d[4]	d[5]	d[6]	d[7]	d[8]	d[9]	d[10]
inicialização	0	oo	oo	oo	oo	oo	oo	oo	oo	oo
p = 1		1				1				
p = 2							2			
p = 6					6					
p = 7			7	7	7					
p = 5								5		
p = 4										
p = 8									8	8
p = 3										
p = 9										
p = 10										
fim	-	1	7	7	7	1	2	5	8	8