

Resolução da Lista 6 - Dualidade e Sensibilidade em Programação Linear

Exercício 1

$$\text{Min } 14x_1 + 30x_2 + 11x_3$$

$$\text{s.a. } 2x_1 + 5x_2 + 1x_3 \geq 50$$

$$3x_1 + 2x_2 + 9x_3 \leq 75$$

$$1x_1 + 7x_2 + 2x_3 \leq 60$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

x_j : bateladas do j-ésimo processo (atividade j)

Objetivo: minimizar o custo de produção

1ª restrição: garantir o atendimento da demanda

2ª restrição: não ultrapassar ofertas (estoques disponíveis)

b) Unidades associadas com:

1) Função objetivo: custo (\$), unidade 1000\$

2) Restrições: toneladas produto (t), toneladas ingrediente 1 e 2 (t)

c) Atividade 1 (processo 1):

Entradas: 3t ingrediente 1, 1t ingrediente 2

Saída: 2t produto

Custo: 14

Atividade 2 (processo 2):

Entradas: 2t ingrediente 1, 7t ingrediente 2

Saída: 5t produto

Custo: 30

Atividade 3 (processo 3):

Entradas: 9t ingrediente 1, 2t ingrediente 2

Saída: 1t produto

Custo: 11

2) Considerando o modelo obtido no item (a) acima:

a) v_1 : 1000\$/t variação no custo ótimo por tonelada de produto

v_2 : 1000\$/t variação no custo ótimo por tonelada do ingrediente 1

v_3 : 1000\$/t variação no custo ótimo por tonelada do ingrediente 2

b) $v_1 \geq 0$: aumento do lado direito 'aperta' quando a restrição é do tipo $\geq$

$v_2, v_3 \leq 0$: aumento do lado direito 'relaxa' quando a restrição é do tipo $\leq$

c) $2v_1 + 3v_2 + v_3 \leq 14$

$5v_1 + 2v_2 + 7v_3 \leq 30$

$v_1 + 9v_2 + 2v_3 \leq 11$

Valores (implícitos) das atividades não devem exceder os custos (coeficientes da função objetivo).

d) $\max 50v_1 + 75v_2 + 60v_3$

Maximizar o valor (implícito)

e) No *Solver* do Excel as variáveis duais são chamadas de *shadow prices* (preços/custos marginais). portanto, da tabela obtemos:

$v_1 = 7,56, v_2 = 0, v_3 = -1,11$ e $x_1 = 5,56, x_2 = 7,78, x_3 = 0$

Logo, o valor da função objetivo do modelo primal correspondente à solução ótima é $fp = 311,1$ e a do modelo dual $fd = 311,1$.

f) $2x_1 + 5x_3 + 1x_3 = 50$ (ativa) ou $v_1 = 0$

$3x_1 + 2x_2 + 9x_3 = 75$ (ativa) ou $v_2 = 0$

$1x_1 + 7x_2 + 2x_3 = 60$ (ativa) ou $v_3 = 0$

Isto é, ou uma restrição do primal está ativa ou uma pequena variação no valor correspondente do lado direito desta restrição não tem impacto no valor da função objetivo.

g) $2v_1 + 3v_3 + 1v_3 = 14$ (ativa) ou $x_1 = 0$

$$5v_1 + 2v_2 + 7v_3 = 30 \text{ (ativa) ou } x_2 = 0$$

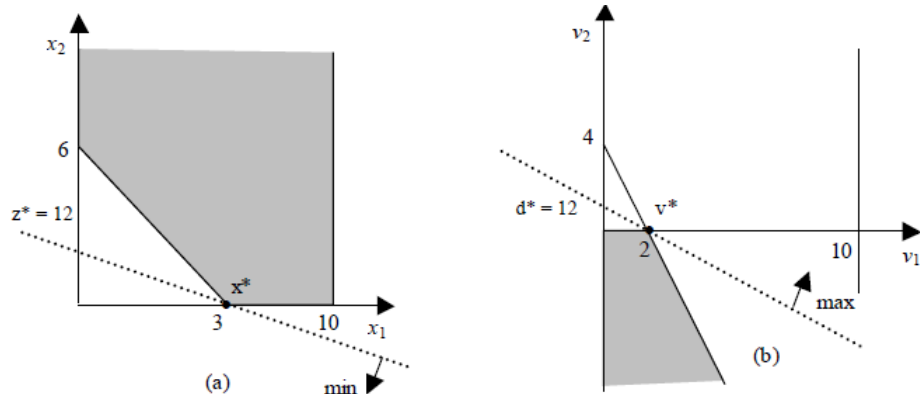
$$1v_1 + 9v_2 + 2v_3 = 11 \text{ (ativa) ou } x_3 = 0$$

Isto é, uma restrição do primal deve ser utilizada somente se o seu valor implícito é igual ao seu custo (coeficiente correspondente da função objetivo do primal).

h) Folga complementar primal: observar na Tabela 1 que toda restrição ou tem o valor da variável dual associada nula, ou tem folga correspondente nula (lembrar que $[\sum_j a_{ij}x_j - b_i]v_i = 0$).

Folga complementar dual: verificar que o custo reduzido é nulo para todas as variáveis primais positivas (lembrar que $[c_j - \sum_i a_{ij}v_i]x_j = 0$).

3) Analisar os esboços abaixo:



4) Sabemos que $vB = (c_{1st}, c_{2nd}, \dots, c_{mth})$. Logo:

$$(v_1, v_2) \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = (6, 1) \Rightarrow v_1 = 3, v_2 = 1/3$$