EA044 - Planejamento e Análise de Sistemas de Produção

Resolução da Lista 5 - Algoritmo Simplex

Exercício 1

a) Problema original:

$$\begin{aligned}
&\text{Min } 4x_1 + 2x_2 - 33x_3 \\
&\text{s.a. } x_1 - 4x_2 + x_3 \leq 12 \\
&\qquad 9x_1 + 6x_3 = 15 \\
&\qquad -5x_1 + 9x_2 \geq 3 \\
&\qquad x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{aligned}$$

Forma padrão:

$$\begin{aligned}
&\text{Min } 4x_1 + 2x_2 - 33x_3 \\
&\text{s.a. } x_1 - 4x_2 + x_3 + x_4 = 12 \\
&\qquad 9x_1 + 6x_3 = 15 \\
&\qquad -5x_1 + 9x_2 - x_5 = 3 \\
&\qquad x_1, \cdots, x_6 \geq 0
\end{aligned}$$

$$\text{A} = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 1 & 1 & 0 \\ 9 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ -5 & 9 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \text{ b= } \begin{bmatrix} 12 \\ 15 \\ 3 \end{bmatrix}, \text{ c= } \begin{bmatrix} 41 & 2 & -33 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

b) Problema original:

$$\begin{aligned}
&\text{Max } 15(x_1 + 2x_2) + 11(x_2 - x_3) \\
&\text{s.a. } 3x_1 \geq x_1 + x_2 + x_3 \\
&\qquad 0 \leq x_j \leq 3,\ j = 1, \cdots, 3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\text{Max } 15x_1 + 30x_2 + 11x_2 - 11x_3 \\
&\text{s.a. } 3x_1 - x_1 - x_2 - x_3 \geq 0 \\
&\qquad x_1 \leq 3 \\
&\qquad x_2 \leq 3 \\
&\qquad x_3 \leq 3 \\
&\qquad x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{aligned}$$

Forma Padrão:

Max $15x_1 + 41x_2 - 11x_3$

s.a. $2x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 0$

$x_1 + x_5 = 3$

$x_2 + x_6 = 3$

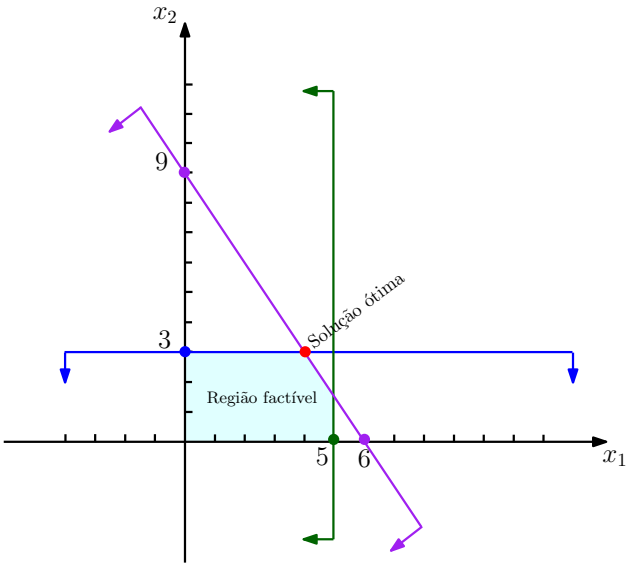
$x_3 + x_7 = 3$

$x_1, \cdots, x_7 \geq 0$

$$\text{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{b=} \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}, \text{c=} \begin{bmatrix} 15 & 41 & -11 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Exercício 2

a)



b) Forma padrão

Max $2x_1 + 5x_2$

s.a.

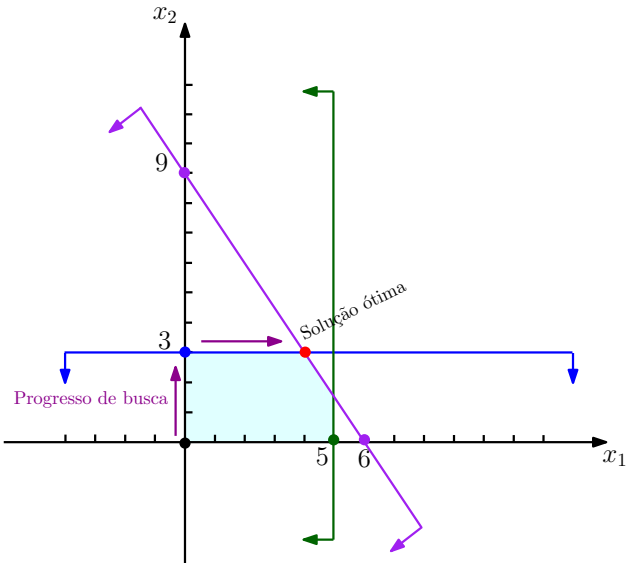
$3x_1 + 2x_2 + x_3 = 18$

$x_1 + x_4 = 5$

$x_2 + x_5 = 3$

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$

d)



Exercício 3

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
3	2	1	0	0	18
1	0	0	1	0	5
0	1	0	0	1	3
2	5	0	0	0	0
N	N	B	B	B	

Qual o maior custo reduzido? $5 \rightarrow x_2$ entra na base
Qual o menor passo? $\frac{18}{2} = 9$; $\frac{3}{1} = 3 \rightarrow x_5$ sai da base

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
3	0	1	0	-2	12
1	0	0	1	0	5
0	1	0	0	1	3
2	0	0	0	-5	-15
N	B	B	B	N	

Qual o maior custo reduzido? $2 \rightarrow x_1$ entra na base
Qual o menor passo? $\frac{12}{3} = 4$; $\frac{5}{1} = 5 \rightarrow x_3$ sai da base

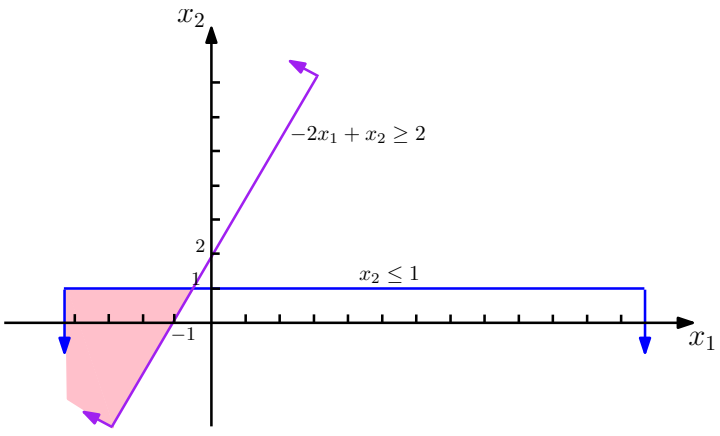
x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
1	0	$\frac{1}{3}$	0	$-\frac{2}{3}$	4
0	0	$-\frac{1}{3}$	1	$\frac{2}{3}$	1
0	1	0	0	1	3
0	0	$-\frac{2}{3}$	0	$-\frac{11}{3}$	-23
B	B	N	B	N	

Os custos reduzidos associados às variáveis não-básicas são negativos. Temos uma direção simplex factível mas não há melhora no valor da função objetivo. Sendo assim, convém parar o método simplex.

Neste ultimo *Tableau Simplex* as variáveis não básicas assumem os valores de:
$x_1 = 4$; $x_2 = 3$; $x_4 = 1$
E $z = 23$ representa o valor da solução ótima do problema.

Exercício 4

a) O modelo não é factível, pois a região factível do problema não atende todas as restrições do problema. Temos que x_1 e x_2 devem ser maiores ou iguais a zero. De acordo com o gráfico essa restrição não é atendida.



b) Modelo artificial

Min $x_4 + x_6$
s.a. $-2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 2$
$x_2 + x_5 + x_6 = 1$
$x_1, \cdots, x_6 \geq 0$

Iniciando o *Tableau* para a Fase 1:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b
-2	1	-1	1	0	0	2
0	1	0	0	1	1	1
0	0	0	-1	0	-1	0
N	N	N	B	N	B	

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b
-2	1	-1	1	0	0	2
0	1	0	0	1	1	1
-2	2	-1	0	1	0	3
N	N	N	B	N	B	

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b
2	0	1	-1	0	0	-1
0	1	0	0	1	1	1
2	0	1	-2	1	0	1
N	B	N	B	N	N	

A partir desse *Tableau* não temos mais como determinar uma solução ótima.
Temos então um modelo infactível!

Exercício 5

Determinando a solução ótima do PL do exercício 1 utilizando o *algoritmo simplex revisado*.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
Max c	2	5	0	0	0	b
	3	2	1	0	0	18
A	1	0	0	1	0	5
	0	1	0	0	1	3
$t=0$	N	N	1^{st}	2^{nd}	3^{rd}	
x^0	0	0	18	5	3	0 obs: valor da F.O.

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \; v = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ obs: } v = [c_{1st},...,c_{mth}]B^{-1}$$

$\underline{c}$	2	5	0	0	0	obs: $\underline{c} = c_j - va^j$
Δx^2	0	1	-2	0	-1	obs: $\Delta x^j = -B^{-1}a^j$
	x	x	$\frac{18}{2}$	x	$\frac{3}{1}$	$\lambda = \min\{9,3\} = 3$

$t=1$	N	3^{rd}	1^{st}	2^{nd}	N	
x^1	0	3	12	5	0	15 obs: valor da F.O.

$$B^{-1} = EoldB^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \; v = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$\underline{c}$	2	0	0	0	-5	
Δx^1	1	0	-3	-1	0	
	x	x	$\frac{12}{2}$	$\frac{5}{1}$	x	$\lambda = \min\{6,5\} = 5$

$t=2$	1^{st}	3^{rd}	N	2^{nd}	N	
x^2	4	3	0	1	0	23 obs: valor da F.O.

$$B^{-1} = EoldB^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \; v = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ 0 \\ \frac{11}{3} \end{bmatrix}$$

$\underline{c}$ 0 0 $-\frac{2}{3}$ 0 $-\frac{11}{3}$

Custos reduzidos não positivos $\Rightarrow$ parar!
Encontramos a solução ótima x*

$$x^* = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, z = 23$$