

Resolução da Lista 2 - Modelos determinísticos

Exercício 1

- a) x_{ij} são as variáveis de decisão apropriadas para o problemas pois devemos indicar quantos vagões devem se movimentar de uma região para a outra.
- b) O número de vagões pode ser considerado uma variável contínua, pois é suficientemente grande, da ordem de centenas de vagões. Portanto, não deverá existir diferença significativa em aproximar as variáveis contínuas pelos números inteiros. Ou seja, quando um número é relativamente grande, os valores fracionais podem ser arredondados sem muitas perdas.
- c) Custo da movimentação de um vagão da região i para a região j : $c_{i,j}$
Número de vagões existentes na região i : e_i
Demanda de vagões na região i : d_i
Diferença entre a demanda e o número de vagões existentes na região i : $b_i = d_i - e_i$
- d) Função objetivo: $\text{Min} \sum_{i=1}^5 \sum_{j=1}^5 c_{i,j} x_{i,j}$
Onde: $c_{i,j}$ representa o custo de sair de região i para a região j , esse custo é dado pela tabela do exercício 1. Quando $i = j$ o custo de movimentação será nulo, ou seja, $c_{i,j} = 0$.
Na tabela do exercício 1, a matriz de custos é simétrica $c_{i,j} = c_{j,i}$, ou seja, o custo de mover um vagão da região i para a região j corresponde ao custo de mover um vagão da região j para a região i .
- e) As restrições são representadas pela equação abaixo, que asseguram que o que é movido para a região i menos o que é movido da região i deve atender a demanda líquida (b_k).

$$\sum_{\substack{i=1, \\ i \neq k}}^5 x_{i,k} - \sum_{\substack{j=1, \\ j \neq k}}^5 x_{k,j} = b_k = d_k - e_k, k = 1, \dots, 5$$

Expandindo os somatórios e determinando os valores de b_k , temos:

Restrição para a região 1: $x_{2,1} + \dots + x_{5,1} - x_{1,2} - \dots - x_{1,5} = 85$

Restrição para a região 2: $x_{1,2} + \dots + x_{5,2} - x_{2,1} - \dots - x_{2,5} = 115$

Restrição para a região 3: $x_{1,3} + \dots + x_{5,3} - x_{3,1} - \dots - x_{3,5} = 390$

Restrição para a região 4: $x_{1,4} + \dots + x_{5,4} - x_{4,1} - \dots - x_{4,5} = -280$

Restrição para a região 5: $x_{1,5} + \dots + x_{4,5} - x_{5,1} - \dots - x_{5,4} = -310$

f)
$$\text{Min} \sum_{i=1}^5 \sum_{\substack{j=1, \\ j \neq i}}^5 c_{i,j} x_{i,j}$$

s.a.

$$x_{2,1} + \dots + x_{5,1} - x_{1,2} - \dots - x_{1,5} = 85$$

$$x_{1,2} + \dots + x_{5,2} - x_{2,1} - \dots - x_{2,5} = 115$$

$$x_{1,3} + \dots + x_{5,3} - x_{3,1} - \dots - x_{3,5} = 390$$

$$x_{1,4} + \dots + x_{5,4} - x_{4,1} - \dots - x_{4,5} = -280$$

$$x_{1,5} + \dots + x_{4,5} - x_{5,1} - \dots - x_{5,4} = -310$$

$$x_{i,j} \leq 0, i, j = 1, \dots, 5; i \neq j$$

g) Trata-se um modelo de Programação Linear (PL) pois, a função objetivo e as restrições são lineares e todas as variáveis são contínuas.

h)

Exercício 2

a) As variáveis de decisão do problema são:

$$x_{i,j} \triangleq \begin{cases} 1 & \text{se o módulo } i \text{ estiver na posição } j \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Assim, $x_{i,j}$ é a variável que irá decidir qual módulo (i) irá para qual posição (j).

b) O comprimento entre os módulos i e i' qualquer pode ser expresso por $x_{i,j} x_{i',j'} = 1$, logo o módulo i está na posição j e o módulo i' está na posição j' . Somando todos os valores possíveis temos o comprimento da conexão entre os módulos i e i' .

c) Função objetivo:
$$\text{Min} \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{i'=i+1}^m a_{i,i'} c_{i,i'}$$

d) A restrição, $\sum_{j=1}^n x_{i,j} = 1, i = 1, \dots, m$, assegura que cada módulo será alocado à uma única posição m .

e) A restrição, $\sum_{i=1}^m x_{i,j} = 1, j = 1, \dots, n$, assegura que em cada posição há no máximo um módulo.

f) Modelo de otimização resultante:

$$\begin{aligned} & \text{Min} \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{i'=i+1}^m a_{i,i'} c_{i,i'} \\ & \text{s.a.} \\ & \sum_{j=1}^n x_{i,j} = 1, \quad i = 1, \dots, m \\ & \sum_{i=1}^m x_{i,j} = 1, \quad j = 1, \dots, n \\ & x_{i,j} \in \{0,1\}; \quad i = 1, \dots, m; \quad j = 1, \dots, n \end{aligned}$$

g) Trata-se de um modelo de otimização de Programação Não Linear Inteira (PNLI), pois a função objetivo é produto de termos não lineares ($C_{i,i'}$) com variáveis discretas ($a_{i,i'}$).

Exercício 3

a) Determinando os pontos x_1 e x_2 que satisfazem as restrições do problema.

Restrição (1): $-x_1 + x_2 \leq 4$

Para $x_1 = 0$, temos: $0 + x_2 \leq 4 \rightarrow x_2 \leq 4$.

Para $x_2 = 0$, temos: $-x_1 + 0 \leq 4 \rightarrow x_1 \leq -4$.

Restrição (2): $x_1 \leq 8$

O gráfico da figura 1(a) mostra o conjunto viável (factível) do problema de otimização, esse conjunto é formado pelos pontos do plano cartesiano que satisfazem cada uma das restrições do problema. As flechas indicam o semiplano que satisfaz cada uma das restrições. Para este exemplo a solução ótima do problema está contida em qualquer ponto do segmento de reta entre os pontos de coordenadas (8,0) e (8,12).

b) Determinando os pontos x_1 e x_2 que satisfazem as restrições do problema: Idem ao exemplo (a).

Para determinarmos a solução ótima, para este caso, vamos substituir os valores do vértices do semiplano do conjunto viável.

Função objetivo: $-3x_1 + x_2$

$(0,0) \rightarrow -3 * 0 + 0 = 0$

$$\begin{aligned}(8,0) &\rightarrow -3 * 8 + 0 = -24 \\(8,12) &\rightarrow -3 * 8 + 12 = -12 \\(0,4) &\rightarrow -3 * 0 + 4 = 4\end{aligned}$$

Neste caso, o ponto $(x_1^*, x_2)^* = (0,4)$ é a solução ótima e o maior valor que a função pode assumir é 4 (valor ótimo) do problema. Conforme gráfico da figura 1(b).

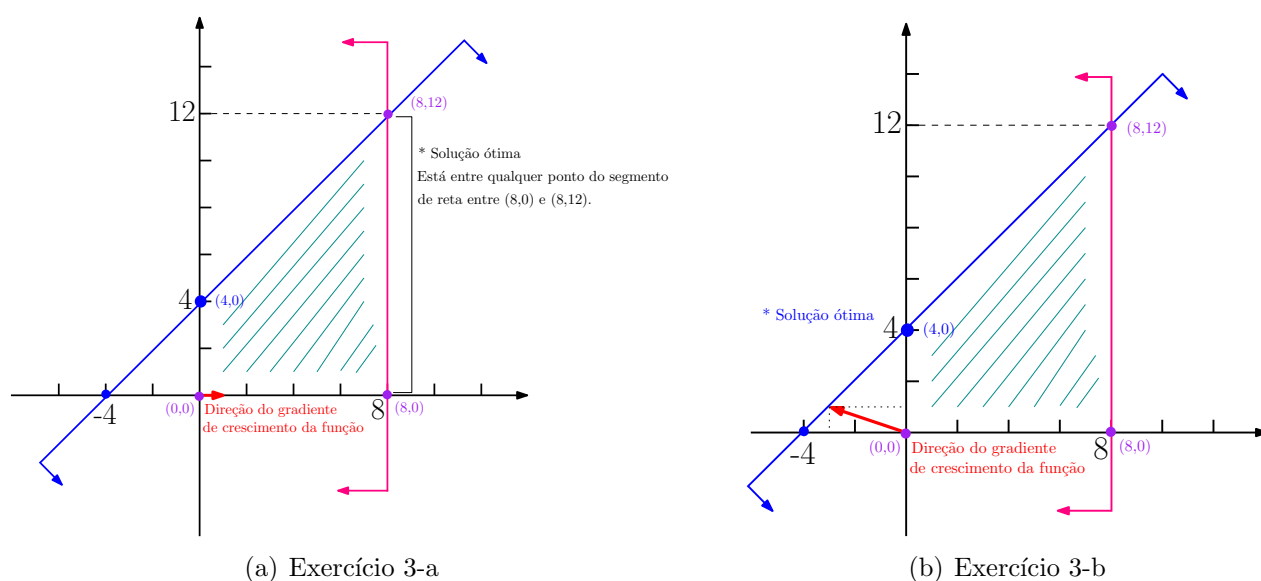


Figura 1:

c) O conflito em maximizar ambos objetivos nesse problema deve-se ao fato do gradiente de crescimento de cada função objetivo indicar para direções opostas.

Exercício 4

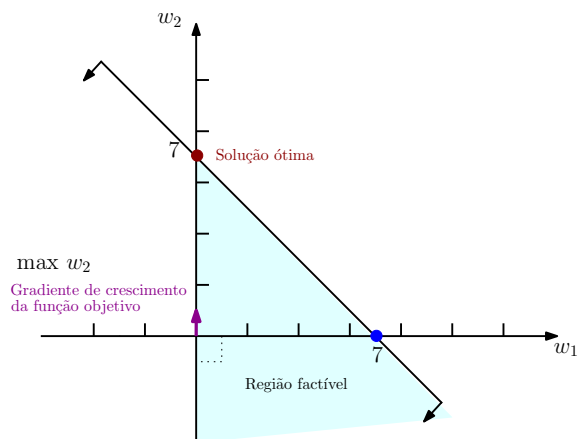
a) Determinando os pontos w_1 e w_2 que satisfazem as restrições do problema.

Restrição (1): $w_1 + w_2 \leq 7$

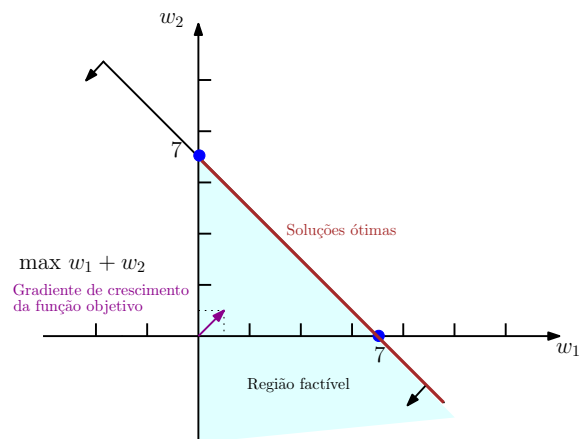
Para $w_1 = 0$, temos: $0 + w_2 \leq 7 \rightarrow w_2 \leq 7$.

Para $w_2 = 0$, temos: $w_1 + 0 \leq 7 \rightarrow w_1 \leq 7$.

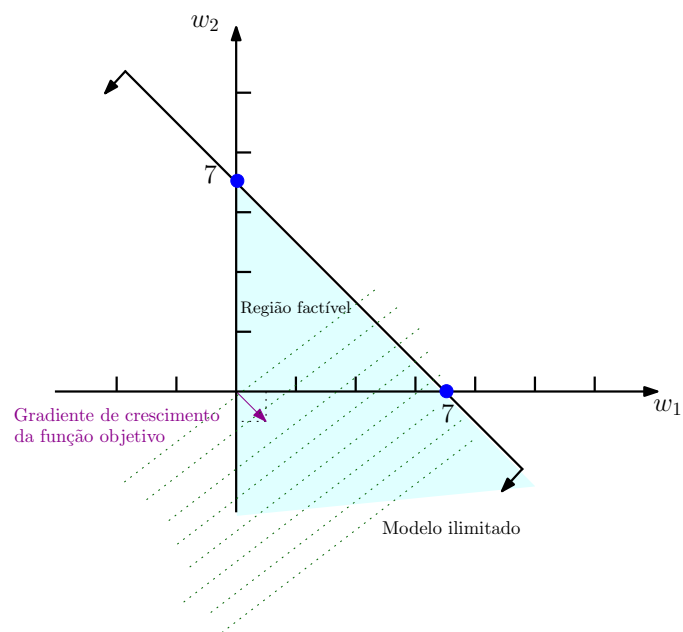
Restrição (2): $w_1 \leq 0$



(a) Exercício 4-a

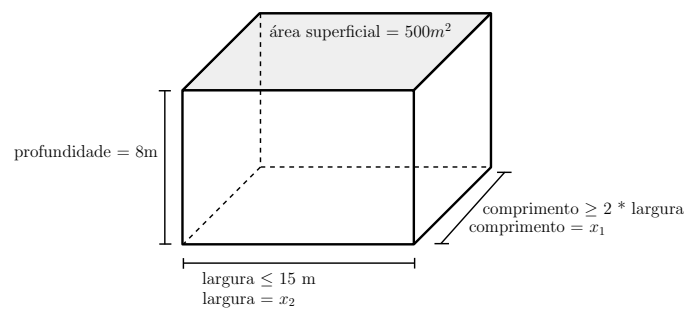


(b) Exercício 4-b



(c) Exercício 4-c

Exercício 5



a) Restrições do problema:

- (1) Área superficial do reservatório: $x_1 * x_2 = 500$
- (2) O comprimento deverá ser de pelo menos duas a sua largura: $x_1 \geq 2x_2$
- (3) A largura do reservatório deve ser de até 15m de largura: $x_2 \leq 15$
- (4) Função objetivo

A área de cada parede do reservatório é dada pela equação: $area = base * altura$. Neste caso, a altura do reservatório é de 8m e as bases serão x_1 e x_2 . O problema tem por objetivo minimizar a área de concreto dessas paredes, assim teremos como função objetivo:

$$\text{Min } 8x_1 + 8x_1 + 8x_2 + 8x_2 \rightarrow \text{Min } 16x_1 + 16x_2$$

c) Determinando os pontos x_1 e x_2 que satisfazem as restrições do problema.

Restrição (1): $x_1 * x_2 = 500$

Para $x_2 = 15$, temos: $x_1 * 15 = 500 \rightarrow x_1 = 500/15 = 33,33$.

Restrição (2): $x_1 \leq 2 * x_2$

Para $x_2 = 15$, temos: $x_1 \leq 2 * 15 \rightarrow x_1 \leq 30$.

A região factível do problema está indicada na figura abaixo, temos duas restrições de desigualdade (2 e 3) que irão restringir a região factível do problema. Para a restrição de igualdade (1) as possíveis soluções factíveis fazem parte dos pontos formam a parábola.

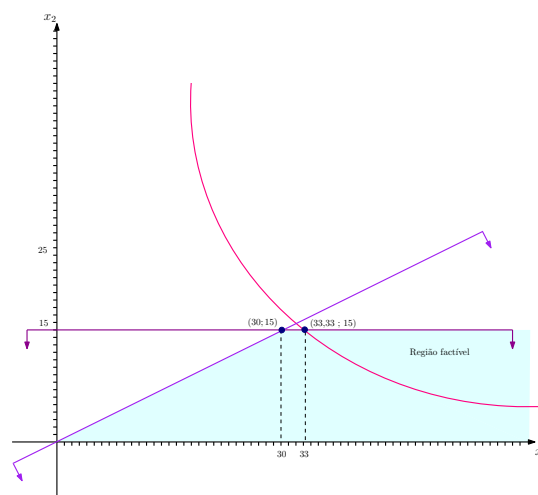


Figura 2: Exercício 5-c

- d) O problema torna-se infactível caso o reservatório tenha mais do que 25m de comprimento pois de acordo com o gráfico apenas as duas restrições de desigualdade do problema serão atendidas, como indicado na figura (região factível). A restrição de igualdade da área superficial do reservatório não é atendida, pois está fora da região factível do problema.

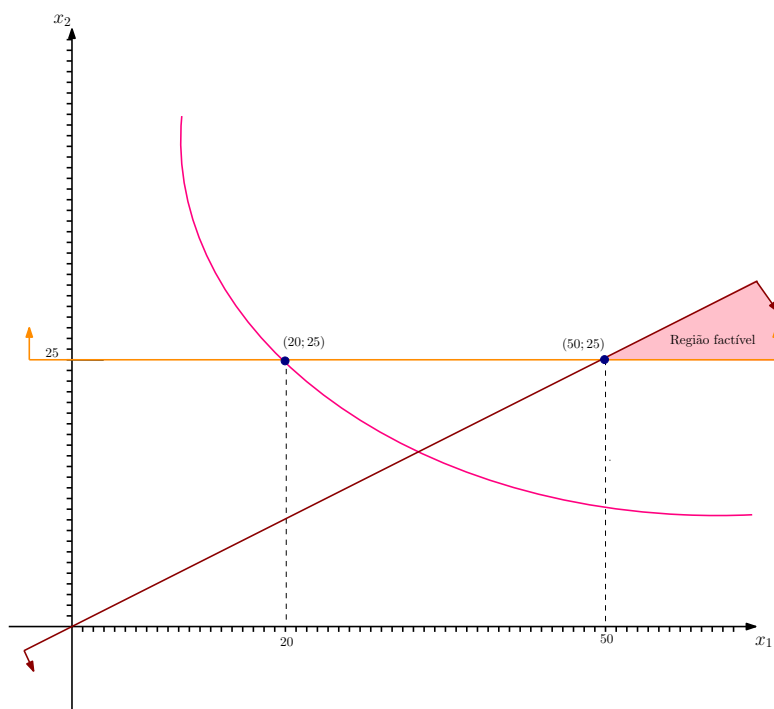


Figura 3: Exercício 5-d

Exercício 6

a) Modelo matemático

Função objetivo: $\text{Min } 0,092x_4 + 0,112x_5 + 0,141x_6 + 0,420x_9 + 0,719x_{12}$

s.a.

$$(1) \ x_4 + x_5 + x_6 + x_9 + x_{12} = 16000$$

$$(2) \ 0,279x_4 + 0,160x_5 + 0,120x_6 + 0,065x_9 + 0,039x_{12} \leq 1600$$

$$(3) \ 0,00175x_4 + 0,00130x_5 + 0,00161x_6 + 0,00095x_9 + 0,00048x_{12} \leq 8,5$$

$$x_i \geq 0, \ i = 4, 5, 6, 9, 12$$

(1) Restrição da quantidade (m) de linha telefônica a ser construída

(2) Restrição da resistência (ohms/m) máxima que a linha telefônica deverá oferecer.

(3) Restrição da atenuação (db/m) máxima que a linha telefônica deverá oferecer.

Exercício 7

a) $x_j, j = (1, \dots, 8)$ representam as variáveis de decisão do problema pois trata-se de um problema de alocação e x_j é a variável que irá indicar qual projeto foi selecionado.

b) Atribuindo valores simbólicos as constantes da tabela.

Lucro: $l_1, l_2, \dots, l_8$

Pessoas-dia: $p_1, p_2, \dots, p_8$

CPU: $c_1, c_2, \dots, c_8$

c) Max $2,1x_1 + 0,5x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 + 1,5x_6 + 0,6x_7 + 1,8x_8$

d) A restrição $\sum_{i=1}^8 p_i x_i \geq 7 * 240$ assegura que pelo menos 7 engenheiros trabalharão na empresa.

Já a restrição $\sum_{i=1}^8 p_i x_i \leq 10 * 240$ assegura que no máximo 10 engenheiros trabalharão na empresa.

e) Restrições:

$$(1) x_3 + x_4 + x_5 + x_8 \geq 1$$

Pelo menos um dos projetos favoritos do diretor será selecionado.

$$(2) \sum_{i=1}^8 x_i \geq 3$$

Ao menos três projetos serão selecionados.

$$(3) 200x_1 + 150x_2 + 400x_3 + 450x_4 + 300x_5 + 150x_6 + 200x_7 + 600x_8 \leq 1000$$

Essa restrição garante que o número de horas de CPU necessárias à cada projeto não irão ultrapassar o número de horas de CPU disponíveis (1000 horas) ao longo do ano.

f) $x_i \in \{0,1\} \forall i \in (1, \dots, 8)$

Exercício 8

a) x_j representa a fração do montante investido numa determinada categoria j .

$$b) \text{Max } \sum_{j=1}^n x_j v_j$$

$$c) \text{Min } \sum_{j=1}^n x_j r_j$$

d) $\sum_{j=1}^n = 1$

e) $l_j \leq x_j \leq u_j$

f) Trata-se de um modelo linear, multiobjetivo.