EA044 - Planejamento e Análise de Sistemas de Produção

# Lista 2 - Modelos determinísticos

**Exercício 1**

A Companhia Ferroviária do Brasil (CFB) está planejando a alocação de vagões a 5 regiões do país para se preparar para o transporte da safra anual. A tabela abaixo mostra quanto custa movimentar um vagão entre cada par de regiões, o número de vagões existentes e o número de vagões necessários para o transporte entre as regiões.

| | Região | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| De | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 1 | - | 10 | 12 | 17 | 35 |
| 2 | 10 | - | 18 | 8 | 46 |
| 3 | 12 | 18 | - | 9 | 27 |
| 4 | 17 | 8 | 9 | - | 20 |
| 5 | 35 | 46 | 27 | 20 | - |
| Existente | 115 | 385 | 410 | 480 | 610 |
| Necessário | 200 | 500 | 800 | 200 | 300 |

**a)** Justificar, sucintamente, porque as variáveis de decisão apropriadas para este problema são $x_{i,j}$ = número de vagões a mover da região $i$ para a região $j$.

**b)** O número de vagões devido a razões físicas, deve ser um número inteiro, mas é provavelmente interessante assumir que estas variáveis sejam contínuas (número real). Explicar porque.

**c)** Atribuir valores simbólicos para as constantes da tabela.

**d)** Determinar a função objetivo que represente o custo total da movimentação.

**e)** Determinar as cinco restrições principais, supondo que o número de vagões em cada região após o deslocamento será o suficiente.

**f)** Completar a modelagem e escrever o modelo de otimização resultante.

**g)** Classificar o modelo (linear, não linear, inteiro, mono/multicritério, etc.).

**h)** Resolver o modelo utilizando o software de apoio de sua preferência.

**Exercício 2**

O departamento de engenharia da Companhia de Computadores do Brasil (CCB) deseja determinar como alocar módulos $i = 1, \cdots, m$ entre as posições $j = 1, \cdots, n$ disponíveis em uma placa. Eles já sabem que:

$$a_{i,i'} = \begin{cases} 1 & \text{se uma conexão é necessária entre } i \text{ e } i' \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$d_{j,j'}$ = distância entre as posições $j$ e $j'$

Utilizando esta informação, os engenheiros desejam escolher a combinação de posições que minimiza o comprimento total das conexões necessárias.

**a)** Definir as variáveis de decisão para este problema. Justificar a resposta.

**b)** Explicar porque o comprimento entre os módulos $i$ e $i'$ qualquer pode ser expresso por:

$$C_{i,i'} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{j'=1}^{n} d_{ij'} x_{ij} x_{i'j'}$$

**c)** Utilizar a expressão acima para formular uma função objetivo que traduza o comprimento total das conexões.

**d)** Formular um sistema de $m$ restrições para assegurar que cada módulo será alocado à uma posição.

**e)** Formular um sistema de $n$ restrições para assegurar que cada posição contém, no máximo, um módulo.

**f)** Completar a modelagem e escrever o modelo de otimização resultante.

**g)** Classificar o modelo de otimização (linear, não linear, etc.). Explicar.

**Exercício 3**

Considere o problema de otimização multiobjetivo abaixo:

max $x_1$
max $-3x_1 + x_2$
s.a. $-x_1 + x_2 \leq 4$
$x_1 \leq 8$
$x_1, x_2 \geq 0$

**a)** Determinar, graficamente, a solução ótima considerando somente a primeira função objetivo.

**b)** Determinar, graficamente, a solução ótima considerando somente a segunda função objetivo.

**c)** Discutir o conflito inerente à tentativa de maximizar ambos objetivos simultaneamente.

**Exercício 4**

Suponha que um modelo de otimização com variáveis de decisão $w_1$ e $w_2$ possua as seguintes restrições:

$-w_1 + w_2 \leq 7$
$w_1 \geq 0$

**a)** Criar um problema linear de otimização cujo modelo tenha uma solução ótima única. Demonstre esse fato graficamente.

**b)** Criar um problema linear de otimização cujo modelo tenha várias soluções ótimas. Demonstre esse fato graficamente.

**c)** Criar um problema linear de otimização cujo modelo é ilimitado. Demonstre esse fato graficamente.

**Exercício 5**

Uma fábrica está construindo um reservatório retangular com uma área superficial de $500m^2$ para o resfriamento da água que provém do seu principal processo de fabricação. O reservatório terá 8 metros de profundidade, o comprimento deverá ser de pelo menos duas vezes a sua largura, e há um espaço disponível para construção de um reservatório de até 15 metros de largura. Deseja-se escolher um projeto que minimize o custo minimizando a área de concreto das paredes do reservatório.

**a)** Formular um modelo de programação matemática com as três principais restrições para escolher uma solução ótima usando as variáveis de decisão $x_1 \triangleq$ comprimento do reservatório e $x_2 \triangleq$ largura do reservatório.

**b)** Resolver o modelo utilizando o software de apoio de sua preferência.

**c)** Usando um gráfico 2-D, resolver o modelo graficamente para mostrar a solução ótima.

**d)** Em um outro gráfico 2-D, mostrar graficamente que o problema torna-se infactível caso o reservatório tenha mais do que 25m de comprimento.

**Exercício 6**

A empresa *México comunicações* está escolhendo o cabo para os novos 16000 metros linha telefônica. A tabela a seguir mostra os diâmetros disponíveis, juntamente com o custo associado, a resistência e a atenuação por cada metro de cabo.

| Diâmetro (0.1)mm | Custo (\$/m) | Resistência (ohms/m) | Atenuação (db/m) |
|---|---|---|---|
| 4 | 0,092 | 0,279 | 0,00175 |
| 5 | 0,112 | 0,160 | 0,00130 |
| 6 | 0,141 | 0,120 | 0,00161 |
| 9 | 0,420 | 0,065 | 0,00095 |
| 12 | 0,719 | 0,039 | 0,00048 |

A empresa deseja escolher a combinação de cabos com o menor custo que deverão fornecer a linha telefônica até 1600 ohms de resistência e 8,5 db de atenuação.

**a)** Formular um modelo matemático contendo três restrições principais para encontrar uma combinação ótima de cabos utilizando as variáveis de decisão $(d = 4, 5, 6, 9, 12)$.
$x_d \triangleq$ metros do cabo de diâmetro $d$ usado
Considere que a resistência e a atenuação crescem linearmente com comprimento do cabo usado.

**b)** Resolver o modelo utilizando o software de apoio de sua preferência

**Exercício 7**

Uma pequena empresa de consultoria de engenharia está definindo os planos para novos projetos do próximo ano. O diretor e os três sócios devem se encontrar para decidirem de quais projetos irão participar.

Uma pesquisa preliminar foi realizada com oito projetos. O lucro esperado para cada projeto é dado pela seguinte tabela, com o número de pessoas-dia necessário para realizar cada projeto e o tempo (em horas) de processamento computacional - computer processing unit (CPU) - que será demandado.

| Projeto | Lucro | Pessoas-Dia | CPU |
|---|---|---|---|
| 1 | 2,1 | 550 | 200 |
| 2 | 0,5 | 400 | 150 |
| 3 | 3,0 | 300 | 400 |
| 4 | 2,0 | 350 | 450 |
| 5 | 1,0 | 450 | 300 |
| 6 | 1,5 | 500 | 150 |
| 7 | 0,6 | 350 | 200 |
| 8 | 1,8 | 200 | 600 |

É estimado que 1000 horas de CPU ficarão disponíveis ao longo do ano. Atualmente trabalham na empresa 10 engenheiros (incluindo o diretor e os sócios); cada um trabalha 240 dias por ano. Até 3 engenheiros podem deixar a empresa, e a administração não deseja contratar novos engenheiros para o próximo ano, devido as incertezas do mercado. No mínimo três projetos deverão ser selecionados, então, cada sócio ficará responsável por pelo menos um projeto por ano. O diretor tem 4 projetos favoritos $(3, 4, 5 \text{ e } 8)$, e a empresa precisará selecionar ao menos um deles.

A empresa deseja formular um modelo de otimização para determinar quais projetos deverá escolher, assumindo que todos os projetos devem ser selecionados na base do tudo-ou-nada.

**a)** Justificar por que as variáveis de decisão do modelo são $(j = 1, \ldots, 8)$

$$x_j \triangleq \begin{cases} 1 & \text{se o projeto } j \text{ for selecionado} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

**b)** Atribuir valores simbólicos para as constantes da tabela.

**c)** Formular a função objetivo para maximizar o lucro total dos projetos selecionados.

**d)** Formular um par de restrições para fazer cumprir o número mínimo e máximo de engenheiros pessoa-dia, considerar a demissão de até 3 engenheiros.

**e)** Formular três restrições para fazer cumprir o limite de tempo computacional, atender a restrição de selecionar ao menos três projetos e incluir um dos projetos favoritos do diretor.

**f)** Completar a modelagem e escrever o modelo de otimização resultante.

**g)** Classificar o modelo (linear, não linear, inteiro, não linear inteiro, mono/multicritério, etc.). Explicar.

**h)** Resolver o modelo utilizando o software de apoio de sua preferência.

**Exercício 8**

O *Fundo Papiro's* é um fundo de investimento em ações ordinárias nas categorias $(j = 1, \ldots, n)$. Pelo menos uma fração $l_j$ e no máximo uma fração $u_j$ do capital do fundo é investido em qualquer categoria $j$. O fundo mantém estimativas, $v_j$, do retorno anual esperado de ganho de capital e dividendos para cada dólar investido na categoria $j$. Também estima-se o risco $r_j$ por dólar investido em cada categoria $j$. O objetivo é maximizar o retorno com o mínimo risco.

**a)** Justificar, sucintamente, porque as variáveis de decisão apropriadas para o modelo são:
$x_j \triangleq$ fração do capital investido no fundo na categoria $j$

**b)** Formular uma função objetivo para maximizar o retorno esperado por dólar investido.

**c)** Formular uma função objetivo para minimizar o risco por dólar investido, assumindo que os riscos para diferentes categorias são independentes um dos outros.

**d)** Formular uma restrição que assegure que 100% do capital do fundo é investido em algum lugar.

**e)** Formular um sistema com $n$ restrições assegurando os limites inferiores e superiores da fração do capital do fundo investido em cada categoria.

**f)** Classificar o modelo (linear, não linear, inteiro, mono/multicritério, etc.). Explicar.