Teorema fundamental da programação linear: Dado um modelo de programação linear na forma padrão onde A é uma matriz $(m \times n)$ de posto m ,

$$\begin{aligned} \min \quad & cx \\ \text{s.a.} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

A-se existe uma solução factível, então existe uma solução básica factível.

B-se existe uma solução factível ótima, então existe uma solução básica factível ótima.

Prova

A-Sejam $A_1, A_2, \dots, A_n$ os vetores coluna da matriz A . Suponha que $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ seja uma solução factível. Então, em termos das colunas de A , esta solução satisfaz:

$$x_1A_1 + x_2A_2 + \dots + x_nA_n = b \quad (1)$$

Suponha que exatamente p das variáveis x_i são maior do que zero e, por conveniência, que estas são as p primeiras variáveis. Então podemos re-escrever (1) como

$$x_1A_1 + x_2A_2 + \dots + x_pA_p = b \quad (2)$$

Temos então que considerar dois casos, dependendo se os vetores $A_1, A_2, \dots, A_p$ são linearmente independentes (LI) ou não (LD).

Caso 1: Suponha que $A_1, A_2, \dots, A_p$ são LI. Então $p \leq m$. Se $p = m$, a solução é uma solução básica. Se $p < m$, então podemos selecionar $m - p$ vetores entre os $n - p$ restantes tal que o conjunto dos m vetores formado por $A_1, A_2, \dots, A_p$ e os $m - p$ escolhidos são LI, pois o posto de A é m . Atribuindo o valor zero as $m - p$ variáveis correspondentes, obtemos uma solução básica factível (degenerada neste caso).

Caso 2: Suponha que $A_1, A_2, \dots, A_p$ são LD. Então, por definição de LD, existe uma combinação não trivial destes vetores que é nula. Isto é, existem constantes $y_1, y_2, \dots, y_p$, com pelo menos um delas positiva, tal que

$$y_1A_1 + y_2A_2 + \dots + y_pA_p = 0 \quad (3)$$

Multiplicando (3) por um escalar ε e subtraindo de (2) obtemos

$$(x_1 - \varepsilon y_1)A_1 + (x_2 - \varepsilon y_2)A_2 + \dots + (x_p - \varepsilon y_p)A_p = b \quad (4)$$

A expressão (4) é válida para qualquer ε e, para cada ε , as componentes $x_i - \varepsilon y_i$ correspondem a uma solução de (14), embora a restrição $x_i - \varepsilon y_i \geq 0$ possa ser violada. Fazendo $y = (y_1, y_2, \dots, y_p, 0, 0, \dots, 0)$ vemos que, para qualquer ε , uma solução de (4) é:

$$x - \varepsilon y \tag{5}$$

Para $\varepsilon = 0$, x é a solução básica factível original. Quando ε cresce a partir de zero, as componentes de x podem aumentar, diminuir, ou permanecerem as mesmas, dependendo se os valores correspondentes de y_i são negativos, positivos ou nulos. Como estamos supondo que pelo menos um dos valores de y_i é positivo, pelo menos uma das componentes diminui quando ε aumenta. Vamos aumentar ε até que uma ou mais das componentes tornam-se nulas, isto é, vamos considerar o seguinte valor de ε :

$$\varepsilon = \min\{x_i/y_i : y_i > 0\} \tag{6}$$

Para este valor de ε , a solução dada por (5) é factível e possui no máximo $p - 1$ variáveis positivas. Repetindo este processo, se necessário, podemos eliminar as variáveis positivas até que se tenha uma solução factível com as colunas correspondentes LI, situação onde o caso 1 se aplica.

B- Suponha que $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ seja uma solução factível ótima e, como no caso da prova da parte A acima, suponha que somente p variáveis, $x_1, x_2, \dots, x_p$, sejam positivas. Temos, de novo, dois casos.

Caso 1: corresponde ao caso LI e é tratado exatamente da mesma forma como acima.

Caso 2: corresponde ao caso LD e também é tratado da mesma forma com no caso correspondente da prova da parte A, mas neste caso temos que mostrar que ε na solução (5) é ótimo. Para isso, sabemos que o valor da função objetivo para a solução $x - \varepsilon y$ é:

$$c'x - \varepsilon c'y \tag{7}$$

Para ε suficientemente pequeno, $x - \varepsilon y$ é uma solução factível para valores positivos e negativos de ε . Podemos então concluir que $c'y = 0$ pois se $c'y \neq 0$, um valor pequeno de ε com um sinal apropriado poderia ser encontrado para fazer (7) menor que $c'x$, mantendo a factibilidade, o que contraria a hipótese que x é uma solução ótima. Portanto $c'y = 0$. Portanto, com isso obtém-se uma nova solução factível com um número menor de componentes positivas. O restante da prova prossegue, então, como no na parte A. €

Comentário: este teorema mostra que resolver um modelo de programação linear reduz-se a um problema de busca sobre o conjunto das soluções básicas factíveis. A prova do teorema sugere o método simplex. O teorema também tem um carácter puramente algébrico. Uma interpretação geométrica pode ser obtida em termos de conjuntos convexos.

Referência: D. Luenberger, Introduction to Linear and Nonlinear Programming, Addison Wesley, 1973.