Teorema da equivalência entre pontos extremos e soluções básicas: Seja A uma matriz ($m \times n$) de posto m e b um vetor ($m \times 1$). Seja P o poliedro convexo, o conjunto dos pontos $P = \{ x \in R^n \mid Ax = b$ e $x \geq 0\}$. Um vetor x é um ponto extremo de P se e somente se x é uma solução básica factível.

Prova

($\rightarrow$) Suponha que $x = (x_1, x_2,..., x_m, 0, 0, ...,0)$ seja uma solução básica factível de $Ax = b$, $x \geq 0$. Então

$x_1A_1 + x_2A_2 + ...+ x_mA_m = b$, onde $A_1, ...,A_m$ são m colunas de A linearmente independentes.

Suponha que x possa ser expresso como uma combinação convexa de dois outros pontos y e z de P, isto é:

$x = \alpha\, y + (1 - \alpha)\, z,\ 0 < \alpha < 1,\ y \neq z$

Como todas as componentes de x, y e z são não negativas e como $0 < \alpha < 1$, concluimos imediatamente que as ($n - m$) componentes de y e z são nulas. Então, em particular, temos que

$y_1A_1 + y_2A_2 + ...+ y_mA_m = b$ e $z_1A_1 + z_2A_2 + ...+ z_mA_m = b$

Como os vetores $A_1, ...,A_m$ linearmente independentes, temos que $x = y = z$. Logo x é um ponto extremo de P.

($\leftarrow$) Suponhamos que x é um ponto extremo de P. Assuma que as componentes não nulas de x sejam as primeiras k componentes. então

$x_1A_1 + x_2A_2 + ...+ x_kA_k = b,\ x_i > 0,\ i = 1,..., k.$

Para mostrar que c é uma solução básica factível, devemos mostrar que os vetores $A_1, ...,A_m$ linearmente independentes. Mostra-se este fato por contradição. Suponha que $A_1, ...,A_m$ sejam linearmente dependentes. Então existe uma combinação linear não trivial que é nula, isto é:

$y_1A_1 + y_2A_2 + ...+ y_kA_k = 0$

Defina o vetor ($n \times 1$) $y = (y_1, y_2,...., y_k, 0, 0,...,0)$. Como , $x_i > 0,\ 1 \leq i \leq k$, é possível escolher ε tal que $x + \varepsilon y \geq 0$, $x - \varepsilon y \geq 0$. Temos então que

$x = ½(x + \varepsilon y) + ½(x - \varepsilon y)$

o que expressa x como uma combinação convexa de dois pontos distintos de P. Este fato não pode ocorrer, pois x é um ponto extremo de P. Logo $A_1, ...,A_k$ linearmente independentes e x é uma solução básica factível. €

Referência: D. Luenberger, Introduction to Linear and Nonlinear Programming, Addison Wesley, 1973.