**Definição**: seja $S = \{x \in R^n \mid Ax = b, x \geq 0\}$. Um vetor não nulo $\Delta x$ é uma direção ilimitada se $\forall\ x \in S$ e $\forall \lambda \geq 0$, $x + \lambda \Delta x \in S$.

**Teorema**: para um modelo de programação linear na forma padrão, com restrições $Ax = b$ e $x \geq 0$, uma direção $\Delta x$ é uma direção ilimitada se e somente se $A\Delta x = 0$ e $\Delta x \geq 0$.

Prova

($\rightarrow$) Suponha que $A\Delta x = 0$, $\Delta x \geq 0$ e que x seja factível. Então para todo $\lambda \geq 0$, $x + \lambda\Delta x \geq 0$. Além disso, $A(x + \lambda\Delta x) = Ax = b$. Logo $\forall \lambda \geq 0$, $x + \lambda\Delta x$ é factível.

($\leftarrow$) Mostraremos que se $A\Delta x = 0$ e $\Delta x \geq 0$ não são verificadas simultaneamente, então d não é uma direção ilimitada. Em outras palavras, isto significa que as condições $A\Delta x = 0$ e $\Delta x \geq 0$ devem ser verificadas simultaneamente se $\Delta x$ é uma direção ilimitada.

Se $A\Delta x = 0$ não se verifica, então $x + \lambda\Delta x$ não é factível e então $\Delta x$ não é uma direção ilimitada. Se $\Delta x \geq 0$ não se verifica, então pelo menos uma componente, digamos, a *i*-ésima componente do vetor $\Delta x$ é negativa. Então, para $\lambda$ suficientemente grande, a i-ésima componente de $x + \lambda\Delta x$ será negativa e, neste caso, $x + \lambda\Delta x$ não é uma solução factível e $\Delta x$ não pode ser uma direção ilimitada. €

Exemplo:

$$
\begin{aligned}
\min\ & 50x_1 + 100x_2 \\
\text{s.a. }\ & 7x_1 + 2x_2 - x_3 = 28 \\
& 2x_1 + 12x_2 - x_4 = 24 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0
\end{aligned}
$$

$$
\Delta x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 9 \\ 14 \end{bmatrix}
$$

**Referência**: W. Winston, Operations Research: Applications and Algorithms, 4th Edition, Thomson, 2004.