Programação Linear

Modelo de programação linear (PL)

$$\begin{aligned} \max \quad & cx \\ \text{sa} \quad & Ax \le b \\ & x \ge 0 \end{aligned}$$

$x \in \mathrm{R}^n \quad (n \times 1) \qquad b \in \mathrm{R}^m \quad (m \times 1)$

$A \in \mathrm{R}^{m \times n} \quad (m \times n) \qquad c \in \mathrm{R}^n \quad (1 \times n)$

$$P = (x \in \mathrm{R}^n \mid Ax \leq b, x \geq 0\}$$

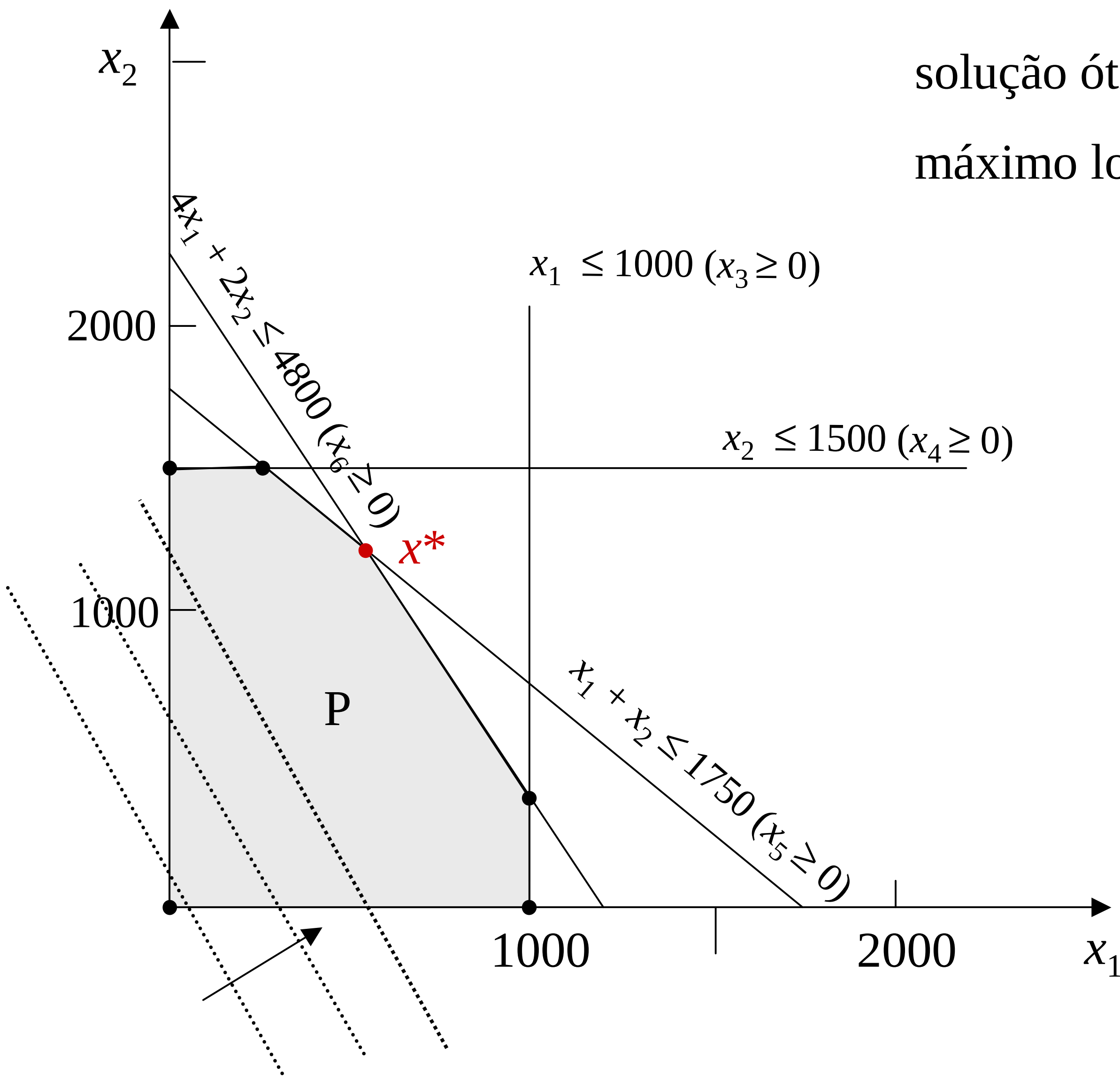
- P é um poliedro
  - poliedros são conjuntos convexos
  - poliedros podem ser limitados ou ilimitados

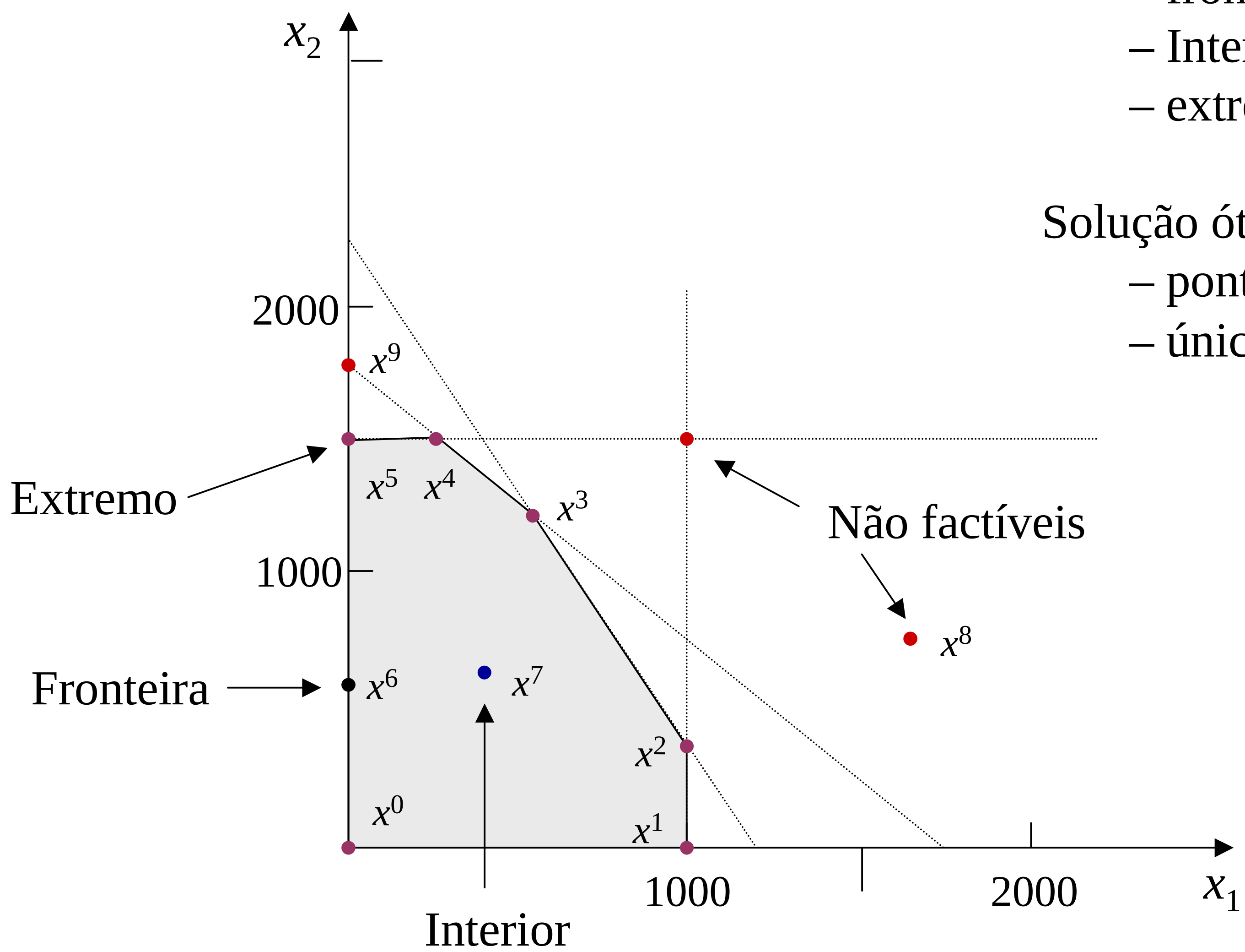
Exemplo

$$
\begin{array}{lrcrl}
\max & 12\,x_1 & + & 9\,x_2 & \\
sa & x_1 & & & \leq 1000 \\
 & & & x_2 & \leq 1500 \\
 & x_1 & + & x_2 & \leq 1750 \\
 & 4x_1 & + & 2x_2 & \leq 4800 \\
 & x_1, x_2 \geq 0 & & &
\end{array}
$$

solução ótima: $x^* = (650, 1100)$

máximo local = máximo global





Solução factível

- fronteira
- Interior
- extremo

Solução ótima

- ponto da fronteira
- única $\Rightarrow$ ponto extremo

Forma padrão de modelos PL

$$
\begin{aligned}
\max \quad & 12\,x_1 + 9\,x_2 \\
\text{sa} \quad & x_1 + x_3 = 1000 \\
& x_2 + x_4 = 1500 \\
& x_1 + x_2 + x_5 = 1750 \\
& 4x_1 + 2x_2 + x_6 = 4800 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0
\end{aligned}
$$

x_3, x_4, x_5, x_6 : variáveis de folga

$$
\boxed{
\begin{array}{lll}
\min\,(\max) & cx & c \in \mathrm{R}^n \\
\text{sa} & Ax = b & b \in \mathrm{R}^m \\
 & x \geq 0 & x \in \mathrm{R}^n
\end{array}
}
$$

Forma padrão

OBS: para restrições $\geq$ subtrai-se x_i's $\rightarrow$ variáveis de excesso

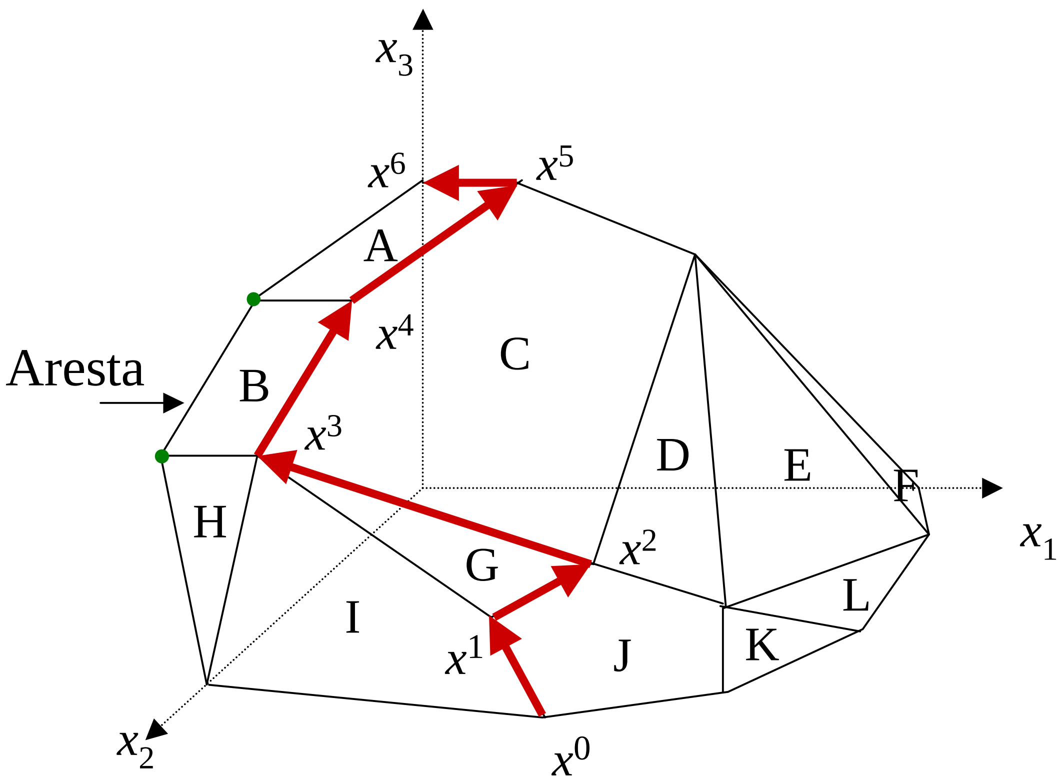
$$\begin{array}{llll} \min (\max)\ cx & & c \in \mathrm{R}^n & \\ \text{sa} & Ax = b & b \in \mathrm{R}^m & \text{Forma padrão} \\ & x \geq 0 & x \in \mathrm{R}^n & \end{array}$$

$$\mathrm{P} = (x \in \mathrm{R}^n \mid Ax = b,\ x \geq 0\}$$ Poliedro forma padrão

$x \in \mathrm{P}$ significa que x é uma solução factível

OBS: poliedros são conjuntos convexos (limitados ou ilimitados)

- Pontos extremos
  - definidos pelas restrições que estão simultâneamente ativas nos pontos
- Pontos extremos adjacentes
  - restrições ativas diferem de uma única restrição
- Aresta
  - segmento de reta que conecta dois pontos extremos



Soluções básicas

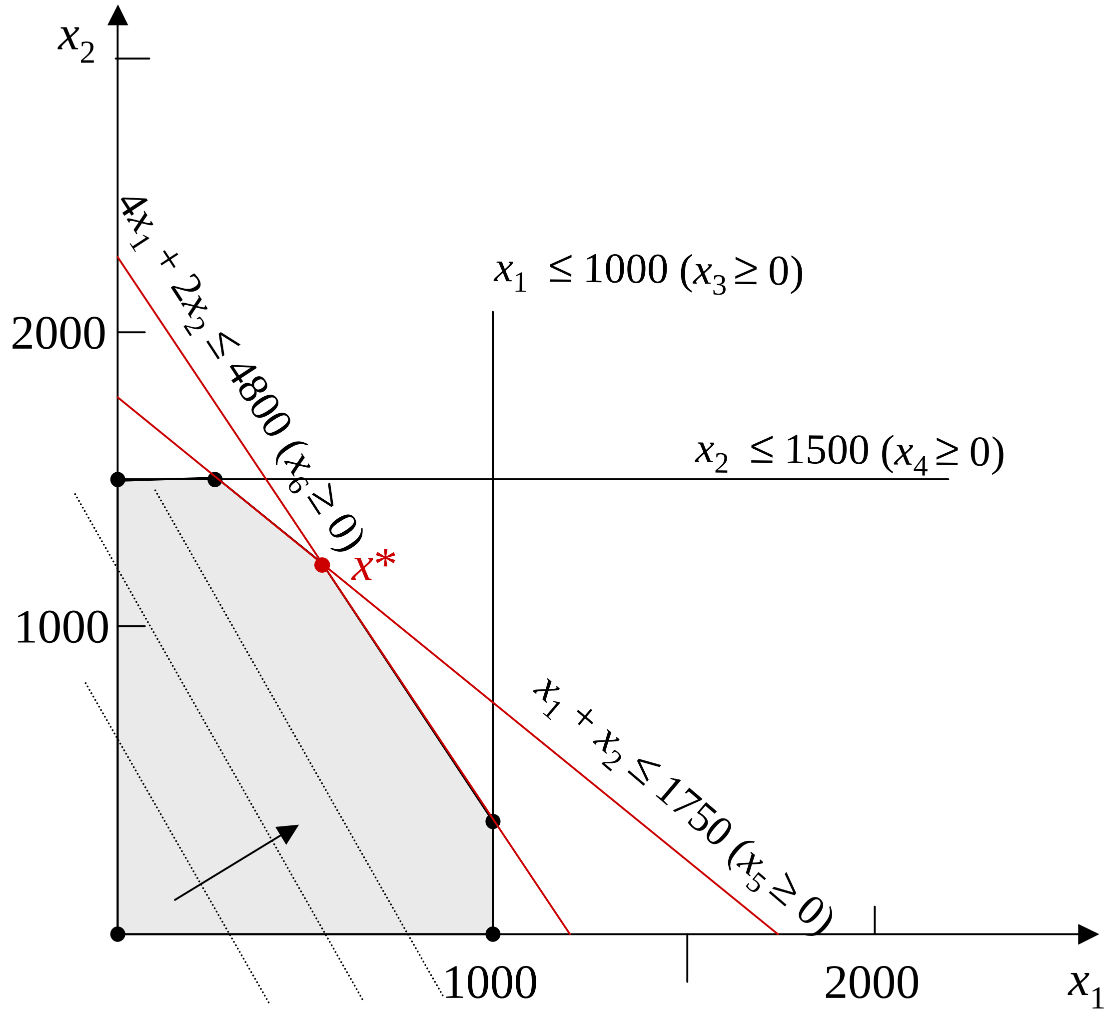
$$
\begin{array}{lllllllll}
\max & 12x_1 + 9x_2 & & & & & & \\
\text{sa} & x_1 & & + x_3 & & & & = 1000 \\
& & x_2 & & + x_4 & & & = 1500 \\
& x_1 + & x_2 & & & + x_5 & & = 1750 \\
& 4x_1 + & 2x_2 & & & & + x_6 & = 4800 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 & & & & & &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{llllll}
x_1 & & + x_3 & & & = 1000 \\
& x_2 & & + x_4 & & = 1500 \\
x_1 + & x_2 & & & + 0 & = 1750 \\
4x_1 + & 2x_2 & & & + 0 & = 4800
\end{array}
$$

$$x_1 = 650,\ x_2 = 1100,\ x_3 = 350,\ x_4 = 400$$

Básicas

Não básicas



x_2
2000
1000
$4x_1 + 2x_2 \leq 4800$ ($x_6 \geq 0$)
$x_1 \leq 1000$ ($x_3 \geq 0$)
$x_2 \leq 1500$ ($x_4 \geq 0$)
x^*
$x_1 + x_2 \leq 1750$ ($x_5 \geq 0$)
1000
2000
x_1

Existência de soluções básicas

$$\boxed{\begin{aligned} x_1 \quad + x_3 \quad &= 1000 \\ x_2 \quad + x_4 \quad &= 1500 \\ x_1 + x_2 \quad + 0 \quad &= 1750 \\ 4x_1 + 2x_2 \quad + 0 &= 4800 \end{aligned}}$$

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -2 \neq 0$$

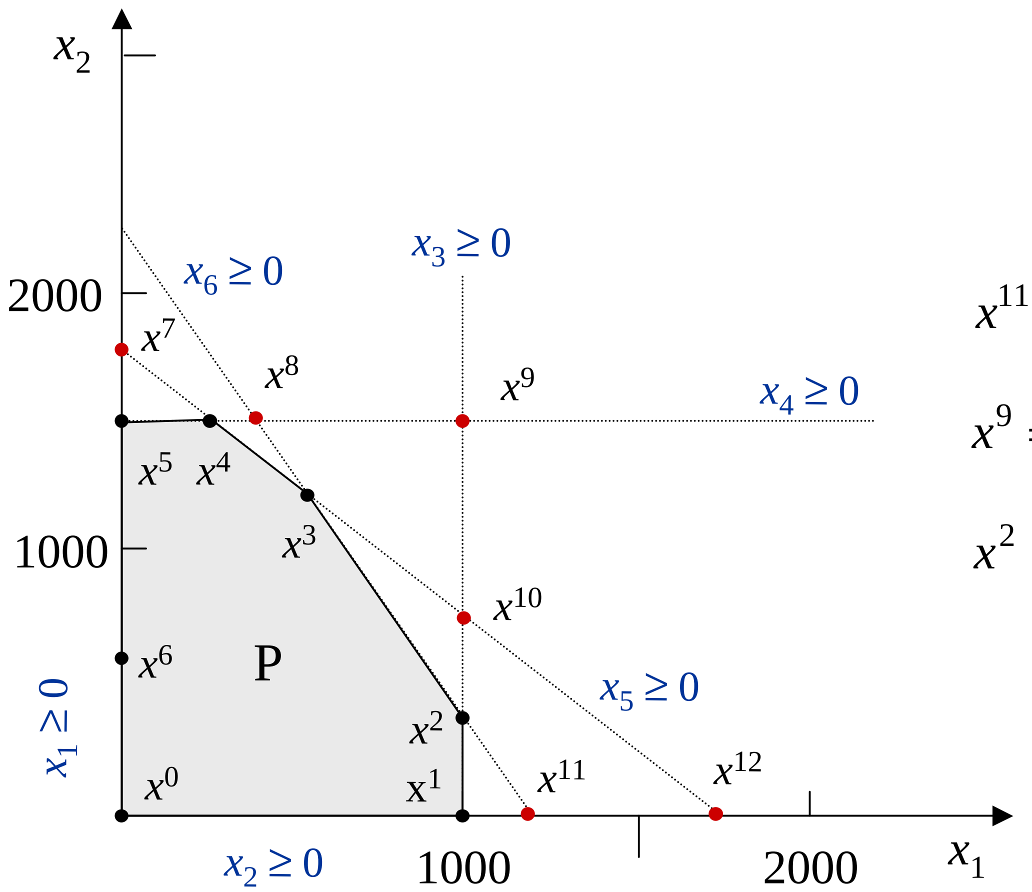
$$\boxed{\begin{aligned} x_1 \quad + x_3 \quad &= 1000 \\ 0 \quad + 0 \quad &= 1500 \\ x_1 + 0 \quad + x_5 \quad &= 1750 \\ 4x_1 + 0 \quad + x_6 &= 4800 \end{aligned}}$$

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 0$$

Solução básica existe se e somente se as colunas das restrições de igualdade correspondentes às m variáveis básicas são linearmente independentes isto é, formam uma base (solução não degenerada).

- Solução básica factível: solução básica não negativa

- Soluções básicas factíveis: pontos extremos de P



$$x^{11} = (1200,\ 0,\ -200,\ 1500,\ 550,\ 0)$$

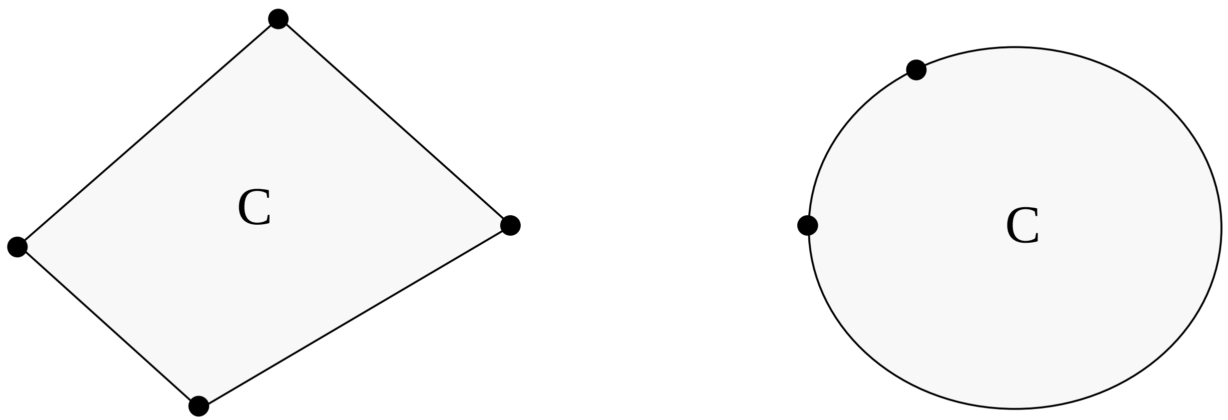
$$x^{9} = (1000,\ 1500,\ 0,\ 0,\ -750,\ -2200)$$

$$x^{2} = (1000,\ 400,\ 0,\ 1100,\ 350,\ 0)$$

Ponto extremo

Um ponto *x* de um conjunto convexo C é um ponto extremo se não existem dois pontos distintos, x^1 e x^2 em C tal que, para algum α, $0 < \alpha < 1$

$$x = \alpha\, x^1 + (1 - \alpha)\, x^2$$



Resultados importantes: resumo

- Teorema 1: equivalência de pontos extremos e soluções básicas

  Considere um poliedro não vazio P = $\{x \in \mathrm{R}^n \mid Ax = b \text{ e } x \geq 0\}$. Um vetor x é um ponto extremo de P se e somente se x é uma solução básica factível de $Ax = b$, $x \geq 0$.

- Teorema 2: representação de soluções básicas factíveis

  Considere um modelo de PL na forma padrão e sejam $x^1,..,x^k$ soluções básicas factíveis do modelo. Então, qualquer ponto $x \in$ P pode ser escrito como

  $$x = d + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x^i$$

  onde ou $d = 0$ ou uma direção ilimitada e $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1,\ \lambda_i \geq 0$

- Teorema 3: teorema fundamental da programação linear (a)

Dado um modelo de programação linear na forma padrão, então:

3.1 se $\exists$ uma solução factível, então $\exists$ uma solução básica factível;

3.2 se $\exists$ uma solução factível ótima, então $\exists$ uma solução básica factível ótima.

(resultado fundamental da PL sob o ponto de vista algébrico)

- Colorário 1: existência de pontos extremos

Se um poliedro P = $\{x \in R^n \mid Ax = b \text{ e } x \geq 0\}$ é não vazio, então P possui no mínimo um ponto extremo.

- Colorário 2: solução ótima finita é um ponto extremo

Se existe uma solução ótima finita para um modelo de PL, então existe uma solução ótima finita que é um ponto extremo de P.

- Colorário 3: número de pontos extremos

O poliedro P possui no máximo um número finito de pontos extremos.

- Colorário 4: representação de poliedros limitados

Se o poliedro P é limitado e não vazio, então P é o conjunto dos pontos que são combinações convexas de seus pontos pontos extremos.

- Teorema 4: teorema fundamental da programação linear (b)

Uma função objetivo linear $f = cx$ atinge seu mínimo sobre um poliedro limitado P em um ponto extremo de P.

Prova (Luenberger, 1973):

Sejam $x^1, x^2, ..., x^k$ pontos extremos de P. Como P é limitado e convexo, todo ponto $x \in$ P pode ser expresso como
$x = \alpha_1 x^1 + \alpha_2 x^2 + ... + \alpha_k x^k, \quad \alpha_i \geq 0, i = 1,....,k; \alpha_1 + \alpha_2 + ...+ \alpha_k = 1$
Logo $cx = \alpha_1 (cx^1) + \alpha_2 (cx^2) + ... + \alpha_k (cx^k)$
Seja $z = \min \{cx^i, i = 1,....,k\}$. Então $cx \geq (\alpha_1 + \alpha_2 + ...+ \alpha_k)z = z$
Logo, o mínimo de cx sobre P é z.

(resultado fundamental da PL sob o ponto de vista geométrico)

Algoritmo simplex

1-solução básica factível inicial: ponto extremo

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
max c	12	9	0	0	0	0	
	1	0	1	0	0	0	1000
A	0	1	0	1	0	0	1500
	1	1	0	0	1	0	1750
	4	2	0	0	0	1	4800
	N	N	B	B	B	B	
x^0	0	0	1000	1500	1750	4800	

2-Direções de busca (direções simplex)

Direções simplex: construídas aumentando-se uma única variável não básica de tal forma que as variáveis não básicas restantes permaneçam constantes e determinando as correções correspondentes para as variáveis básicas para que as restrições de igualdade sejam preservadas

$$A\Delta x = 0$$

aumentando x_1

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_1 = 1 \\ \Delta x_2 = 0 \\ \Delta x_3 \\ \Delta x_4 \\ \Delta x_5 \\ \Delta x_6 \end{bmatrix} = 0$$

$$\Delta x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & -4 \end{bmatrix}$$

aumentando x_2

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_1 = 0 \\ \Delta x_2 = 1 \\ \Delta x_3 \\ \Delta x_4 \\ \Delta x_5 \\ \Delta x_6 \end{bmatrix} = 0$$

$$\Delta x = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

3-Direções que melhoram valor função objetivo e custo reduzido

$$f(x) = cx = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \quad \rightarrow \quad \nabla f(x) = c = [c_1, c_2, \cdots c_n],\ \forall x$$

$\overline{c}_j = c\,\Delta x, \quad \Delta x =$ direção simplex que aumenta x_j — custo reduzido

$\overline{c}_j > 0$ direção simplex melhora, para maximização

$\overline{c}_j < 0$ direção simplex melhora, para minimização

$$\overline{c}_1 = [12,\ 9,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0]\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ -4 \end{bmatrix} = 12 > 0\ ;\quad \overline{c}_2 = [12,\ 9,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0]\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix} = 9 > 0$$

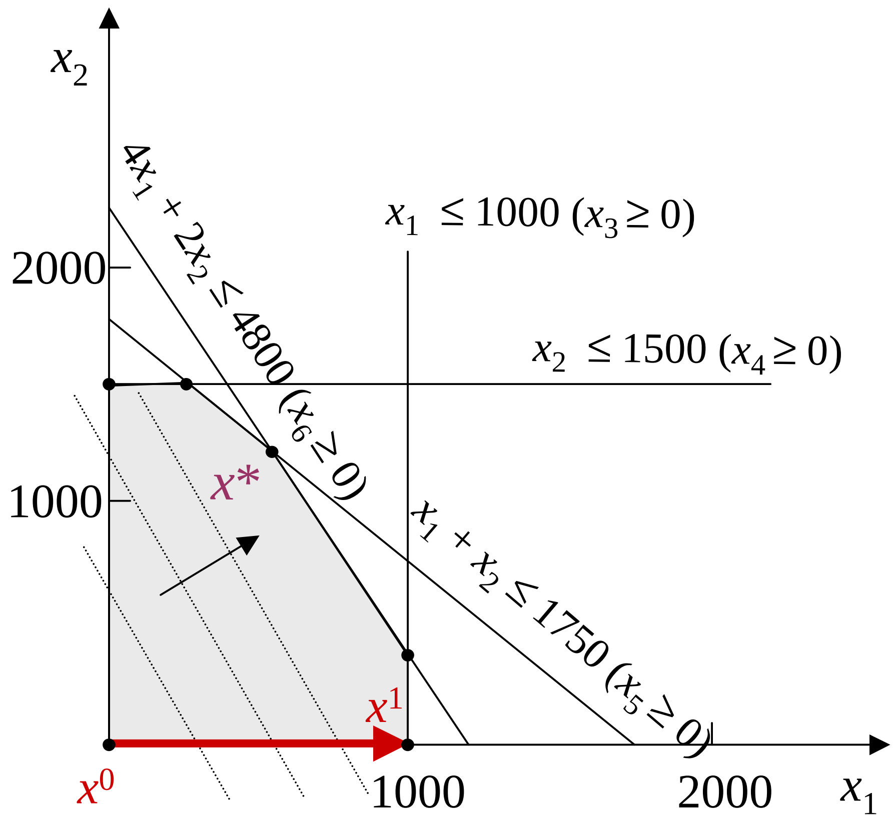
4-Passo na direção de busca

$$\lambda = \min\left\{ \frac{x_j^t}{-\Delta x_j} : \ \Delta x_j < 0 \right\} \quad \text{se } \Delta x_j \geq 0,\ \forall j, \text{ então problema ilimitado}$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
max c	12	9	0	0	0	0	
	1	0	1	0	0	0	1000
A	0	1	0	1	0	0	1500
	1	1	0	0	1	0	1750
	4	2	0	0	0	1	4800
	N	N	B	B	B	B	
x^0	0	0	1000	1500	1750	4800	
Δx	1	0	-1	0	-1	-4	
			1000/-(-1)		1750/-(-1)	4800/-(-4)	

$$\lambda = \min\{1000,\ 1750,\ 1200\} = 1000$$

5-Atualização da base



$$x^1 = x^0 + \lambda \Delta x = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1000 \\ 1500 \\ 1750 \\ 4800 \end{bmatrix} + 1000 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1000 \\ 0 \\ 0 \\ 1500 \\ 750 \\ 800 \end{bmatrix}$$

- variável x_1 entra na base
- variável x_3 sai da base

Algoritmo simplex básico

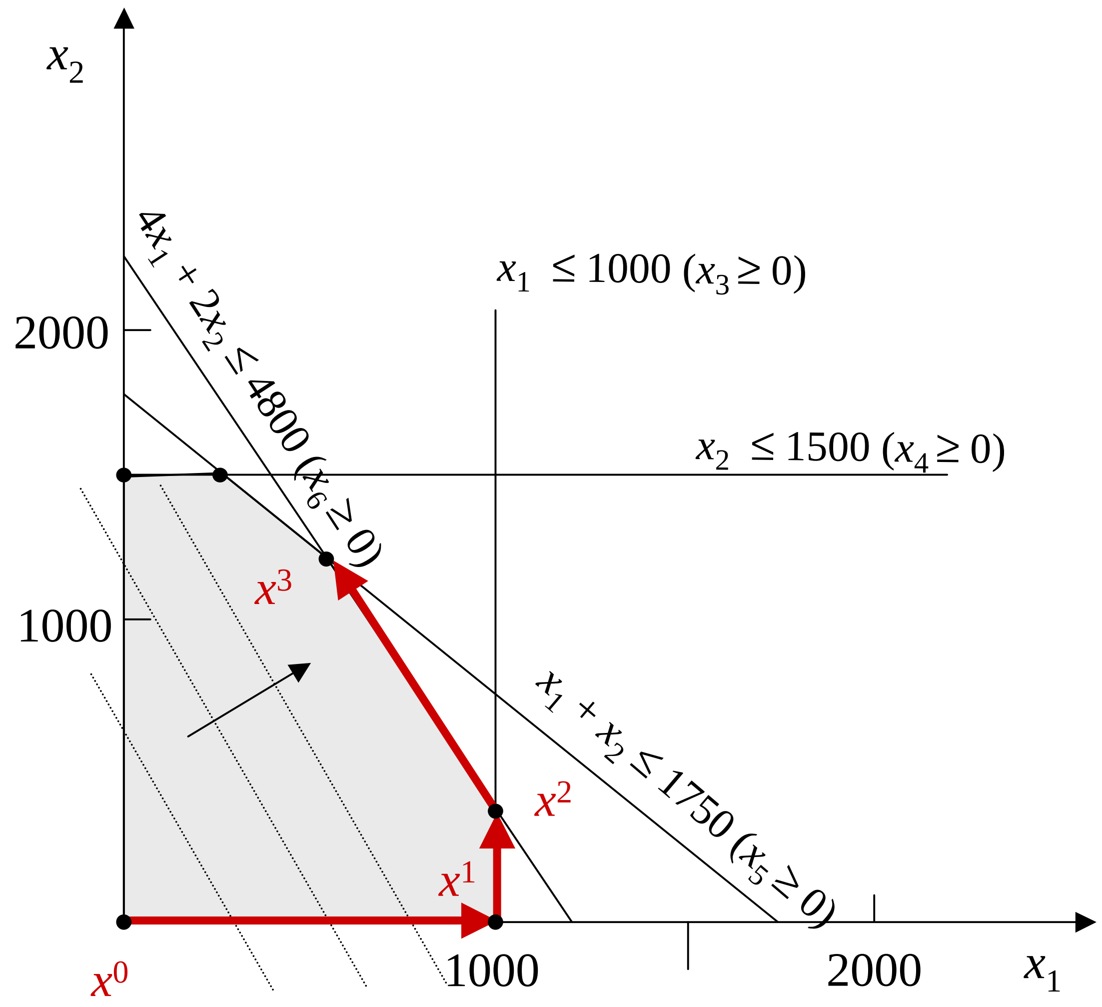
Passo 0 Inicialização: escolher uma solução básica factível x^0 , $t \leftarrow 0$;

Passo 1 Direções simplex: construir Δx associada com não básica x_j
calcular custo reduzido $\underline{c}_j = c\,\Delta x$;

Passo 2 Otimalidade: se nenhuma direção melhora ($\nexists\ \underline{c}_j > 0$ para *max*
$\underline{c}_j < 0$ para *min*), então parar, x^t é ótima; senão escolher nova
direção Δx que melhora valor função objetivo; seja x_p a variável
que entra na base;

Passo 3 Passo: se todos componentes de Δx forem não negativas, então parar
o *modelo é ilimitado*; senão determinar λ e escolher variável que
deixa a base, x_r : $\lambda \leftarrow (x_r / - \Delta x_r)$;

Passo 4 Novo ponto e base: determinar nova solução $x^{t+1} = x^t + \lambda\, \Delta x^{t+1}$ e
trocar x_r por x_p ; $t = t + 1$; ir para o Passo 1;



x_2
2000
1000
$4x_1 + 2x_2 \leq 4800$ ($x_6 \geq 0$)
$x_1 \leq 1000$ ($x_3 \geq 0$)
$x_2 \leq 1500$ ($x_4 \geq 0$)
x^3
$x_1 + x_2 \leq 1750$ ($x_5 \geq 0$)
x^2
x^1
x^0
1000
2000
x_1

Tableau simplex

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
$\underline{a}_{11}$	$\underline{a}_{12}$	1	0	0	0	$\underline{b}_1$
$\underline{a}_{21}$	$\underline{a}_{22}$	0	1	0	0	$\underline{b}_2$
$\underline{a}_{31}$	$\underline{a}_{32}$	0	0	1	0	$\underline{b}_3$
$\underline{a}_{41}$	$\underline{a}_{42}$	0	0	0	1	$\underline{b}_4$
$\underline{c}_1$	$\underline{c}_2$	0	0	0	0	$-\underline{z}$

Método de eliminação de Gauss e o algoritmo simplex

1- se $\exists\ \underline{c}_j > 0$ ($\underline{c}_j < 0$, *min*) então coluna $q = \max_j \{\underline{c}_j, j \in N\}$

linha $p = \min_i \{\underline{b}_i / \underline{a}_{iq}, \underline{a}_{iq} > 0, i = 1,\ldots,m\}$

Se $\underline{c}_j < 0, \forall j$ ($\underline{c}_j > 0$, *min*) então solução ótima

Se $\nexists\ \underline{a}_{iq} > 0$ então o modelo é ilimitado

2- Atualizar elementos do tableau

Atualização do tableau simplex

					q			
	x_1	x_2	x_3	….	x_q	….	x_n	
	y_{11}	y_{12}	y_{13}	….		….	y_{1n}	$y_{1,n+1}$
	y_{21}	y_{22}	y_{23}	….		….	y_{1n}	$y_{2,\mathrm{n}+1}$
	….	….	….	….	….	….	….	….
p	y_{p1}			….	$\boxed{y_{pq}}$	….		
	….	….	….	….	….	….	….	….
	y_{m1}	y_{m2}	y_{m3}	….		….	y_{1n}	$y_{m,n+1}$
	$y_{m+1,1}$	$y_{m+1,2}$	$y_{m+1,3}$	….		….	$y_{m+1,n}$	$y_{m+1,n+1}$

$$y'_{ij} = y_{ij} - \frac{y_{pj}}{y_{pq}} y_{iq} \qquad i \neq p$$

$$y'_{pj} = \frac{y_{pj}}{y_{pq}} \qquad i = p$$

y_{pq} = pivô

$q = 1$

$t = 0$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
$\boxed{1}$	0	1	0	0	0	1000
0	1	0	1	0	0	1500
1	1	0	0	1	0	1750
4	2	0	0	0	1	4800
12	9	0	0	0	0	0

$p = 1 \rightarrow$

$$q = \max_j \{\underline{c}_1, \underline{c}_2\} = \max_j \{12, 9\} = 1$$

$$p = \min_i \left\{ \frac{\underline{b}_1}{\underline{a}_{11}}, \frac{\underline{b}_2}{\underline{a}_{21}}, \frac{\underline{b}_3}{\underline{a}_{31}}, \frac{\underline{b}_4}{\underline{a}_{41}} \right\} = \min_i \{1000, \times, 1750, 1200\} = 1$$

$q = 2$ $\downarrow$ $\qquad\qquad$ $t = 1$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
	1	0	1	0	0	0	1000
	0	1	0	1	0	0	1500
	0	1	-1	0	1	0	750
$p = 4 \rightarrow$	0	$\boxed{2}$	-4	0	0	1	800
	0	9	-12	0	0	0	-12000

$$q = \max_j \{\underline{c}_2, \underline{c}_3\} = \max_j \{9, -12\} = 2$$

$$p = \min_i \left\{ \frac{\underline{b}_1}{\underline{a}_{12}}, \frac{\underline{b}_2}{\underline{a}_{22}}, \frac{\underline{b}_3}{\underline{a}_{32}}, \frac{\underline{b}_4}{\underline{a}_{42}} \right\} = \min_i \{\times, 1500, 750, 400\} = 4$$

$q = 3$ $\downarrow$

$t = 2$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
1	0	1	0	0	0	1000
0	0	2	1	0	-0.5	1100
0	0	1	0	1	-0.5	350
0	1	-2	0	0	0.5	400
0	0	6	0	0	-4.5	-15600

$p = 3 \rightarrow$

$$q = \max_j \{\underline{c}_3, \underline{c}_6\} = \max_j \{6, -4.5\} = 3$$

$$p = \min_i \left\{ \frac{\underline{b}_1}{\underline{a}_{13}}, \frac{\underline{b}_2}{\underline{a}_{23}}, \frac{\underline{b}_3}{\underline{a}_{33}}, \frac{\underline{b}_4}{\underline{a}_{43}} \right\} = \min_i \{1000, 550, 350, \times\} = 3$$

$t = 3$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
1	0	0	0	-1	0.5	650
0	0	0	1	-2	0.5	400
0	0	1	0	1	-0.5	350
0	1	0	0	2	-0.5	1100
0	0	0	0	-6	-1.5	-17700

$x^* = (\ 650\ \ 1100\ \ 350\ \ 400\ \ 0\ \ 0\ )$

Algoritmo simplex com duas fases

Passo 0 Modelo artificial: se ∃ solução básica factível x^0 , então ir para 3; senão criar modelo artificial somando (subtraindo) variáveis artificiais;

Passo 1 Fase I: inicializar modelo artificial com solução básica artifical factível e minimizar soma das variáveis artificiais;

Passo 2 Factibilidade: se Fase I termina com *soma* > 0, então parar (modelo original infactível); senão utilizar solução final como solução básica factível inicial para o modelo original;

Passo 3 Fase II: aplicar algoritmo simplex inicializando-o com a solução básica factível obtida no Passo 2 para obter ou a solução ótima, ou detetar que o problema é ilimitado.

Exemplo

$$\begin{aligned}\min\ & 4x_1 + x_2 + x_3 \\ \text{sa}\ & 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 4 \\ & 3x_1 + 3x_2 + x_3 = 3 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0\end{aligned}$$

Fase I: modelo artificial

$$\begin{aligned}\min\ & x_4 + x_5 \\ \text{sa}\ & 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 4 \\ & 3x_1 + 3x_2 + x_3 + \quad + x_5 = 3 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0\end{aligned}$$

Tableau inicial

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
2	1	2	1	0	4
3	3	1	0	1	3
0	0	0	-1	-1	0

Primeiro tableau

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
2	1	2	1	0	4
$\boxed{3}$	3	1	0	1	3
5	4	3	0	0	7

Segundo tableau

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	-1	4/3	1	-2/3	2
1	1	1/3	0	1/3	1
0	-1	4/3	0	-5/3	2

Terceiro tableau

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	-3/4	1	3/4	-1/2	3/2
1	5/4	0	-1/4	1/2	1/2
0	0	0	-1	-1	0

$$
\begin{aligned}
\min \quad & 4x_1 + x_2 + x_3 \\
\text{sa} \quad & 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 4 \\
& 3x_1 + 3x_2 + x_3 = 3 \\
& x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

Fase II: tableau inicial

x_1	x_2	x_3	
0	-3/4	1	3/2
1	5/4	0	1/2
-4	-1	-1	0

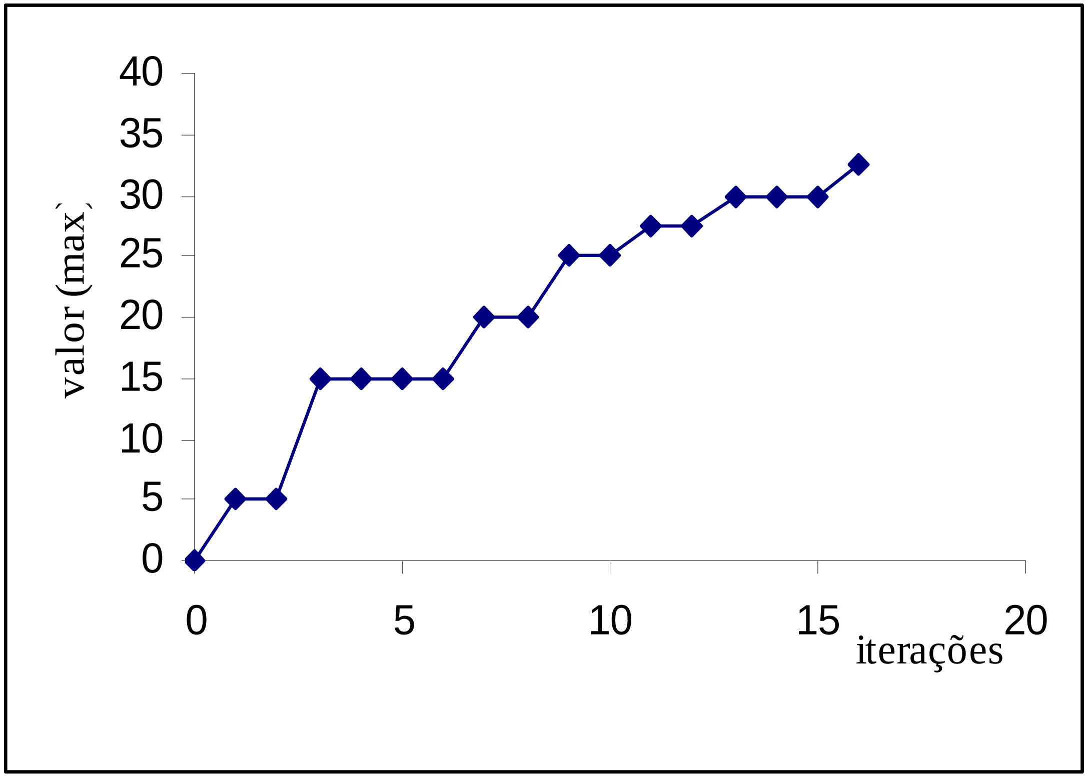
Primeiro tableau

x_1	x_2	x_3	
0	-3/4	1	3/2
1	$\boxed{5/4}$	0	1/2
0	13/4	0	7/2

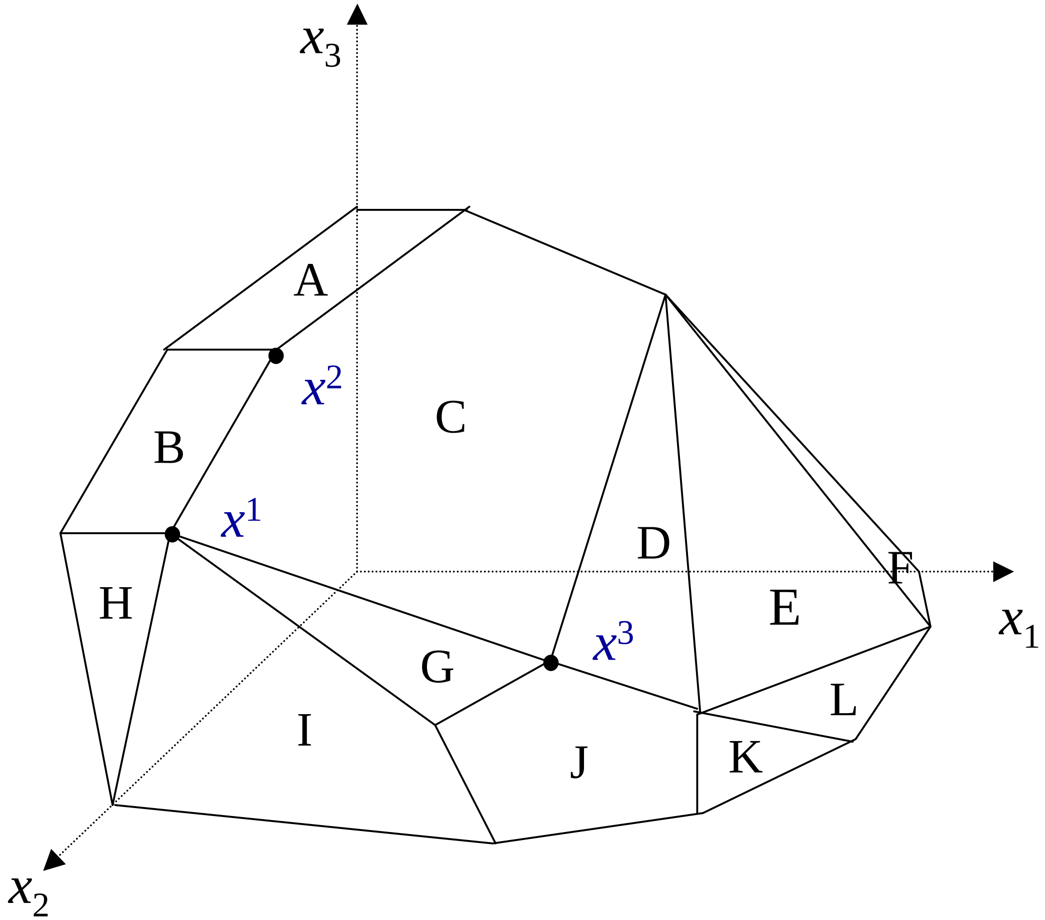
Segundo tableau

x_1	x_2	x_3	
3/5	0	1	9/5
4/5	1	0	2/5
-13/5	0	0	11/5

Soluções degeneradas



Solução básica factível é degenerada se restrições de não negatividade para algumas variáveis básicas estão ativas (algumas variáveis básicas são nulas) $\leftrightarrow$ várias bases produzem a mesma solução básica


x_3
A
x^2
C
B
x^1
D
F
H
E
x_1
x^3
G
L
I
J
K
x_2

Convergência e ciclagem

- Se a cada iteração existe um valor $\lambda > 0$, então o algoritmo simplex pára após um número finito de iterações, indicando ou a solução ótima ou concluindo que o modelo é ilimitado.

- Com o algoritmo de duas fases, pode-se também detetar infactibilidade.

- Existência de soluções degeneradas pode provocar que $\lambda = 0$.

- Sequência de soluções pode se repetir $\rightarrow$ ciclagem

$$\text{n}^{\text{o}}\ \text{máximo de bases} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Forma matricial do simplex

$$A = [B, D] \quad x = (x_B, x_D) \quad c = [c_B, c_D]$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} \min & c_B\, x_B + c_D x_D \\ \text{sa} & B x_B + D x_D = b \\ & x_B \geq 0,\ x_D \geq 0 \end{array}}$$

$$x_B = B^{-1}b - B^{-1}Dx_D$$

$$z = c_B(B^{-1}b - B^{-1}Dx_D) + c_D x_D$$

$$r = c_D - c_B B^{-1}D$$

$$\left[\begin{array}{c:c} A & b \\ \hdashline c & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c:c:c} B & D & b \\ \hdashline c_B & c_D & 0 \end{array}\right]$$

Se B é utilizada como uma base, então:

$$\left[\begin{array}{c:c:c} I & B^{-1}D & B^{-1}b \\ \hdashline 0 & c_D - c_B B^{-1}D & -c_B B^{-1}b \end{array}\right] = T$$

Algoritmo simplex revisado

- Se B é a base corrente, então:

$$x_B = B^{-1}b$$

solução básica

$$\Delta x = -B^{-1}a^j$$

componentes básicos da direção para não básica x_j

a^j = coluna de A correspondente à x_j

							t = 0
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
max c	12	9	0	0	0	0	
	1	0	1	0	0	0	1000
A	0	1	0	1	0	0	1500
	1	1	0	0	1	0	1750
	4	2	0	0	0	1	4800
	N	N	B	B	B	B	
x^0	0	0	1000	1500	1750	4800	$cx^0 = 0$
$\Delta x\ (x_1)$	1	0	-1	0	-1	-4	$\underline{c}_1 = 12$
$\Delta x\ (x_2)$	0	1	0	-1	-1	-2	$\underline{c}_2 = 9$
λ			$\boxed{1000/\text{-}(\text{-}1)}$		1750/-(-1)	4800/-(-4)	

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1000 \\ 1500 \\ 1750 \\ 4800 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1000 \\ 1500 \\ 750 \\ 800 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_4 \\ \Delta x_5 \\ \Delta x_6 \end{bmatrix} = B^{-1}a^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

							$t = 1$
	B	N	N	B	B	B	
x^1	1000	0	0	1500	750	800	$cx^1 = 12000$
$\Delta x\ (x_2)$	0	1	0	-1	-1	-2	$\underline{c}_2 = 9$
$\Delta x\ (x_3)$	-1	0	1	0	1	4	$\underline{c}_3 = -12$
λ				1500/-(-1)	750/-(-1)	$\boxed{800/-(-2)}$	

Atualização de B $^{-1}$

$$(\text{nova } B^{-1}) = E\ (\text{anterior } B^{-1})$$

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & -\dfrac{\Delta x_{1st}}{\Delta x_{leave}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -\dfrac{\Delta x_{2nd}}{\Delta x_{leave}} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & 1 & \vdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & -\dfrac{1}{\Delta x_{leave}} & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \vdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -\dfrac{\Delta x_{mth}}{\Delta x_{leave}} & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Variáveis no simplex revisado entram na base na mesma posição das variáveis que saem da base

							t = 1
	B	N	N	B	B	B	
x^1	1000	0	0	1500	750	800	$cx^1 = 12000$
$\Delta x\ (x_2)$	0	1	0	-1	-1	-2	$\underline{c}_2 = 9$
$\Delta x\ (x_3)$	-1	0	1	0	1	4	$\underline{c}_3 = -12$
λ				1500/-(-1)	750/-(-1)	$\boxed{800/\text{-}(\text{-}2)}$	

$$\text{nova } B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = E\,(\text{anterior } B^{-1}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -(\ 0/-2) \\ 0 & 1 & 0 & -(-1/-2) \\ 0 & 0 & 1 & -(-1/-2) \\ 0 & 0 & 0 & -(\ 1/-2) \end{bmatrix} (\text{anterior } B^{-1})$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -0.5 \\ 0 & 0 & 1 & -0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -0.5 \\ 1 & 0 & 1 & -0.5 \\ -2 & 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix}$$

Custo reduzido

- custo reduzido para a j-ésima variável não básica

$$\bar{c}_j = c\,\Delta x = \sum_{k=1}^{n} c_k \Delta x_k = c_j + \sum_{k \in B} c_k \Delta x_k \,, \qquad \begin{bmatrix} \Delta x_{1st} \\ \Delta x_{2nd} \\ \vdots \\ \Delta x_{mth} \end{bmatrix} = B^{-1} \begin{bmatrix} -a_{1j} \\ -a_{2j} \\ \vdots \\ -a_{mj} \end{bmatrix}$$

$$\bar{c}_j = c_j - [c_{1st},\, c_{2nd},\, \cdots,\, c_{mth}]\, B^{-1} \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}$$

$$\bar{c} = c_D - c_B B^{-1} D$$

$t = 1$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
max c	12	9	0	0	0	0	
	1	0	1	0	0	0	1000
A	0	1	0	1	0	0	1500
	1	1	0	0	1	0	1750
	4	2	0	0	0	1	4800
	B	N	N	B	B	B	
x^1	1000	0	0	1500	750	800	$cx^1 = 12000$
$\Delta x\ (x_2)$	0	1	0	-1	-1	-2	$\underline{c}_2 = 9$
$\Delta x\ (x_3)$	-1	0	1	0	1	4	$\underline{c}_3 = -12$
λ				1500/-(-1)	750/-(-1)	800/-(-2)	

$$v = [c_{1st}, c_{2nd}, \cdots, c_{mth}]B^{-1} = [12 \quad 0 \quad 0 \quad 0]\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [12 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

$$\bar{c}_2 = 9 - [12 \quad 0 \quad 0 \quad 0]\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 9 \qquad \bar{c}_3 = 0 - [12 \quad 0 \quad 0 \quad 0]\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = -12$$

Algoritmo simplex revisado

Passo 0 Inicialização: escolher uma base factível, determinar B^{-1} e variáveis básicas correspondentes, $x_B = B^{-1}b$ de x^0 ; não básicas $x_j \leftarrow 0$; $t \leftarrow 0$;

Passo 1 Custos reduzidos: usar inversa corrente para determinar $v = c_B B^{-1}$ calcular custos reduzidos $\underline{c}_j \leftarrow c_j - v\, a^j$;

Passo 2 Otimalidade: se $\nexists\ \underline{c}_j > 0$ para *max* ($\underline{c}_j < 0$ para *min*), então parar, x^t é ótima; senão escolher nova não básica x_p melhorando $\underline{c}_p$;

Passo 3 Direção simplex: construir Δx para não básica x_p usando inversa B^{-1} para calcular $\Delta x = -B^{-1}a^j$ para componentes básicas;

Passo 4 Passo: se todas componentes de Δx são não negativas, então parar: o modelo é ilimitado; senão determinar λ e a variável que deixa a base x_r tal que

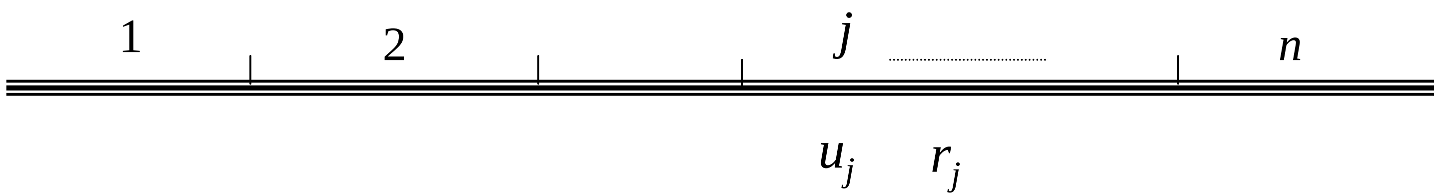
$$\frac{x_r^t}{-\Delta x_r} = \min_j \left\{ \frac{x_j^t}{-\Delta x_j^{t+1}} : \Delta x_j^{t+1} < 0 \right\}, \ \lambda \leftarrow \frac{x_r^t}{-\Delta x_r}$$

Passo 5 Novo ponto e base: determinar nova solução $x^{t+1} = x^t + \lambda\, \Delta x^{t+1}$; trocar x_r por x_p ; construir E e atualizar EB^{-1} , $t = t + 1$; ir para Passo 1;

$$E^{'}\mathrm{s} = \begin{bmatrix} -\left(\dfrac{1}{-1}\right) & 0 & 0 & 0 \\ -\left(\dfrac{0}{-1}\right) & 1 & 0 & 0 \\ -\left(\dfrac{-1}{-1}\right) & 0 & 1 & 0 \\ -\left(\dfrac{-4}{-1}\right) & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\left(\dfrac{0}{-2}\right) \\ 0 & 1 & 0 & -\left(\dfrac{-1}{-2}\right) \\ 0 & 0 & 1 & -\left(\dfrac{-1}{-2}\right) \\ 0 & 0 & 0 & -\left(\dfrac{1}{-2}\right) \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\left(\dfrac{-1}{-1}\right) & 0 \\ 0 & 1 & -\left(\dfrac{-2}{-1}\right) & 0 \\ 0 & 0 & -\left(\dfrac{1}{-1}\right) & 0 \\ 0 & 0 & -\left(\dfrac{2}{-1}\right) & 1 \end{bmatrix}$$

Modelos linearizáveis

- Exemplo: modelo linear



$$\max \sum_{j=1}^{n} r_j x_j$$

redução total

$$\text{sa} \quad \sum_{j=1}^{n} x_j \le 25$$

disponibilidade

$$x_j \le u_j \qquad j = 1, \cdots, n$$

$$x_j \ge 0 \qquad j = 1, \cdots, n$$

limites

- Modelo alternativo: não linear

$$\max \ \{ f = \min [r_j x_j : j = 1, \cdots, n]\}$$

$$\text{sa} \quad \sum_{j=1}^{n} x_j \leq 25$$

$$x_j \leq u_j \qquad j = 1, \cdots, n$$

$$x_j \geq 0 \qquad j = 1, \cdots, n$$

- Linearização do modelo não linear

$$\begin{array}{lll} \max & f & \\ \text{sa} & f \le r_j x_j & j = 1, \cdots, n \\ & \sum_{j=1}^{n} x_j \le 25 & \\ & x_j \le u_j & j = 1, \cdots, n \\ & x_j \ge 0 & j = 1, \cdots, n \end{array}$$

Observação