4-Modelos de Otimização Fuzzy

Conteúdo

1. Introdução
2. Programação linear fuzzy
3. Programação não linear fuzzy
4. Programação dinâmica
5. Modelos possibilísticos

1-Introdução

Modelo geral de otimização fuzzy

$$\text{mãx} \quad f_{\sim}(X)$$

$$\text{sa} \quad g_{\sim}(X) \leq B$$

$$f_{\sim}: F(\mathbf{X}^{n}) \rightarrow F(\mathbf{Y})$$

$$g_{\sim}: F(\mathbf{X}^{n}) \rightarrow F(\mathbf{Y}^{m})$$

- Incerteza $\times$ imprecisão

- Abordagens
  - teoria de probabilidade (repetibilidade)
  - teoria de possibilidade (falta de informação)
  - teoria conjuntos fuzzy (gradualidade)
  - …………..

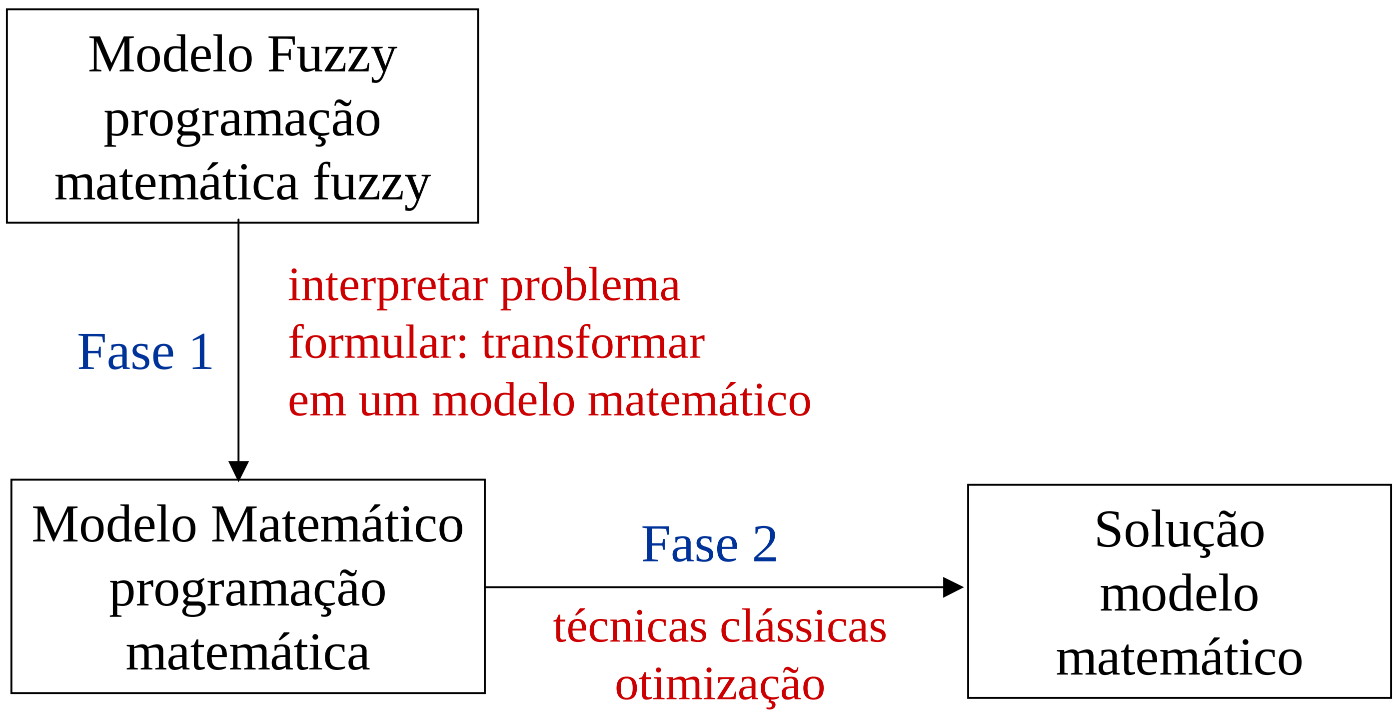
Incerteza/imprecisão em modelos otimização

- Relações
  - metas (*goals*) flexíveis
  - restrições flexíveis
- Coeficientes
  - função objetivo
  - lado direito
  - lado esquerdo

Caracterização de incerteza e imprecisão

- Incerteza
  - medidas de possibilidade/necessidade
  - medida de probabilidade
  - ….
- Imprecisão
  - conjuntos fuzzy
  - …..

Solução de modelos otimização fuzzy



Ferramenta mais utilizada em PO: PL

"..even though this is true, of the 167 production (linear) programming systems investigated and surveyed by Fandel (1994) only 13 of these were *pure* deterministic linear programs." Rommelfanger (2004)

G. Fandel, PPS-Systeme: Grundlangen, Methoden, Software, Markanalyse Springer-Verlag, Heidelberg, Germany, 1994

2-Programação linear fuzzy

Modelo geral de programação linear fuzzy

$$\max \sum_{j=1}^{n} C_j X_j$$

$$\text{sa} \quad \sum_{j=1}^{n} A_{ij} X_j \leq B_i \quad i = 1, \ldots, m$$

$$X_j \geq 0 \qquad j = 1, \ldots, n$$

- No modelo geral de PL fuzzy

X_{j}	variáveis cujos valores são números fuzzy
A_{ij}, B_i, C_j	são números fuzzy
$\leq$	relação de ordem (ordena números fuzzy)

- Casos importantes de PL

1– somente B_i são números fuzzy

2– tanto A_{ij} como B_i são números fuzzy

Caso 1: $B_i \in F(\mathbf{R})$

$$\max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\text{sa} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq B_i \quad i = 1,\ldots,m$$

$$x_j \geq 0 \qquad\qquad j = 1,\ldots,n$$

$$x_j,\ c_j,\ a_{ij} \in \mathbf{R}$$

Interpretação: Bellman e Zadeh

- Modelagen simétrica

  restrições ≡ função objetivo

- x_j, c_j, a_{ij} são variáveis reais
- B_i são números fuzzy

Algoritmo

1. calcular grau pertinência $R_i(\mathrm{x})$ para cada $\mathrm{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$

$$R_i(\mathrm{x}) = B_i(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_j), \ \ i = 1, \dots, m$$

2. determinar limitantes inferior z_l e superior z_u da função objetivo

3. determinar conjunto fuzzy $G(\mathrm{x})$ dos valores da função objetivo

4. determinar a intersecção

$$D = G \bigcap (\bigcap_{i=1}^{m} R_i)$$

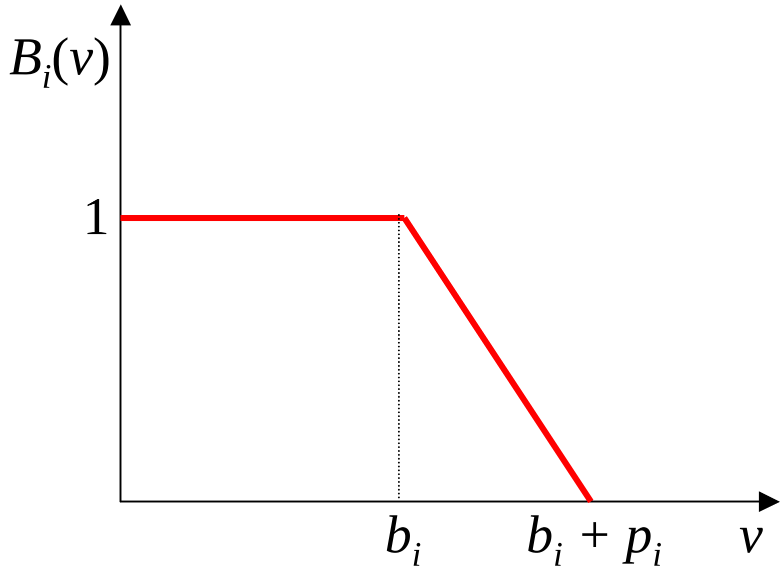
5. construir e resolver modelo programação matemática para obter x*

$$\mathrm{x}^* = \max_{\mathrm{x}} D(\mathrm{x}) = \max_{\mathrm{x}} \{\min(G(\mathrm{x}), R(\mathrm{x}))\}$$

Forma de B_i

$B_i \quad i = 1, \ldots, m$

$$B_i(v) = \begin{cases} 1 & v \le b_i \\ \dfrac{b_i + p_i - v}{p_i} & b_i < v < b_i + p_i \\ 0 & b_i + p_i \le v \end{cases}$$



$v \in \mathbf{R}$

Cálculo dos limitantes da função objetivo

$$z_l = \arg\max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\text{sa} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \quad i = 1,\ldots,m$$

$$x_j \ge 0 \qquad j = 1,\ldots,n$$

$$z_u = \arg\max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\text{sa} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i + p_i \quad i = 1,\ldots,m$$

$$x_j \ge 0 \qquad j = 1,\ldots,n$$

Função objetivo (conjunto fuzzy G)

$$G(\mathrm{x}) = \begin{cases} 1 & z_u \le \mathrm{cx} \\ \dfrac{\mathrm{cx} - z_l}{z_u - z_l} & z_l < \mathrm{cx} < z_u \\ 0 & \mathrm{cx} \le z_l \end{cases}$$

$$\mathrm{x} \in \mathbf{R}^n$$

Modelo programação matemática

$$\max_{x} D(\mathrm{x}) = \max_{x}\{\min(G(\mathrm{x}), R(\mathrm{x}))\}$$

PNL

$$\begin{aligned}
\max \quad & \lambda \\
\text{sa} \quad & \lambda(z_u - z_l) - cx \le -z_l \\
& \lambda p_i + \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i + p_i \qquad i = 1, \ldots, m \\
& \lambda, x_j \ge 0 \qquad\qquad\qquad\quad j = 1, \ldots, n
\end{aligned}$$

PL

Exemplo

Empresa fabrica P_1 e P_2 com lucro de \$0.40/ unidade P_1 e \$0.30/unidade P_2

P_1 requer duas vezes mais horas de trabalho que P_2. Total de horas de trabalho por dia é de no mínimo 500 h e 600h no máximo por dia. A matéria prima é suficiente para produzir no mínimo 400 unidades de P_1 e P_2, podendo chegar a 500 unidades no máximo.

x_1 = unidades de P_1 por dia

x_2 = unidades de P_2 por dia

Objetivo: maximizar lucro

Formulação

$$
\begin{array}{lll}
\max & 0.4x_1 + 0.3x_2 & \text{lucro} \\
\text{sa} & x_1 + x_2 \le B_1 & \text{material} \\
 & 2x_1 + x_2 \le B_2 & \text{horas} \\
 & x_1, x_2 \ge 0 &
\end{array}
$$

$$B_1, B_2 \in F(\mathbf{R})$$

B_1 e B_2

$$B_1(v) = \begin{cases} 1 & v \leq 400 \\ \dfrac{500 - v}{100} & 400 < v < 500 \\ 0 & 500 \leq v \end{cases}$$

$$B_2(v) = \begin{cases} 1 & v \leq 500 \\ \dfrac{600 - v}{100} & 500 < v < 600 \\ 0 & 600 \leq v \end{cases}$$

Limitantes da função objetivo

$$
\begin{aligned}
z_l = \max \quad & 0.4x_1 + 0.3x_2 \\
\text{sa} \quad & x_1 + x_2 \le 400 \\
& 2x_1 + x_2 \le 500 \\
& x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

$z_l = 130$

$$
\begin{aligned}
z_u = \max \quad & 0.4x_1 + 0.3x_2 \\
\text{sa} \quad & x_1 + x_2 \le 500 \\
& 2x_1 + x_2 \le 600 \\
& x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

$z_u = 130$

Função objetivo

$$G(\mathrm{x}) = \begin{cases} 1 & 160 \le \mathrm{cx} \\ \dfrac{\mathrm{cx} - 130}{30} & 130 < \mathrm{cx} < 160 \\ 0 & \mathrm{cx} \le 130 \end{cases}$$

$$\mathrm{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \qquad \mathrm{c} = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.3 \end{bmatrix}$$

Modelo programação matemática

$$
\begin{aligned}
\max \quad & \lambda \\
\text{sa} \quad & 30\lambda - (0.4x_1 + 0.3x_2) \le -130 \\
& 100\lambda + x_1 \ + x_2 \le 500 \\
& 100\lambda + 2x_1 + x_2 \le 600 \\
& \lambda, x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

$$\lambda^* = 0.5,\ x_1^* = 100,\ x_2^* = 350$$

$$z^* = 145$$

Caso 2: A_{ij} e $B_i \in F(\mathbf{R})$

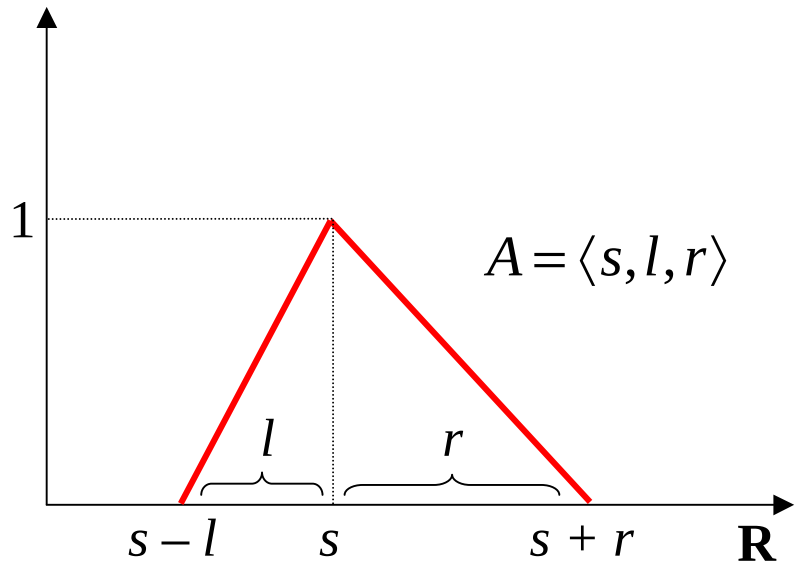
$$\max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\text{sa} \quad \sum_{j=1}^{n} A_{ij} x_j \leq B_i \quad i = 1,\dots,m$$

$$x_j \geq 0 \qquad j = 1,\dots,n$$

x_j, $c_j \in \mathbf{R}$

Hipótese: A_{ij} e B_i números fuzzy triangulares



Algoritmo

1. operações soma e multiplicação: aritmética números fuzzy

2. definir relação de ordem

$$\sum_{j=1}^{n} A_{ij} x_j \leq B_i$$

3. construir e resolver modelo programação matemática para obter x*

Interpretação: $A \leq B$

Se A e $B \in F(\mathbf{R})$ então

$A \leq B$ se e somente se $\mathrm{MAX}(A, B) = B$

$$\mathrm{MAX}(A, B) = \sup_{z = \max(x, y)} \min[A(x), B(y)], \;\; \forall x, y \in \mathbf{R}$$

Se A e B são triangulares, então

$$A=\langle s,l,r\rangle,\ \ B=\langle t,u,v\rangle$$

$A\leq B$ se e somente se

$$s\leq t$$

$$s-l\leq t-u$$

$$s+r\leq t+v$$

Além disso, se $x\geq 0$ então

$$\langle s,l,r\rangle+\langle t,u,v\rangle=\langle s+t,l+u,r+v\rangle$$

$$\langle s,l,r\rangle x=\langle sx,lx,rx\rangle$$

Modelo programação matemática

$$\max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\text{sa} \quad \sum_{j=1}^{n} s_{ij} x_j \le t_i$$

$$\sum_{j=1}^{n} (s_{ij} - l_{ij}) x_j \le t_i - u_i \qquad i = 1, \ldots, m$$

$$\sum_{j=1}^{n} (s_{ij} + r_{ij}) x_j \le (t_i + v_i)$$

$$x_j \ge 0, \qquad j = 1, \ldots, n$$

Exemplo

$$
\begin{aligned}
\max\ & 5x_1 + 4x_2 \\
\text{sa}\ & \langle 4,2,1\rangle x_1 + \langle 5,3,1\rangle x_2 \le \langle 24,5,8\rangle \\
& \langle 4,1,2\rangle x_1 + \langle 1,0.5,1\rangle x_2 \le \langle 12,6,3\rangle \\
& x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

Interpretação
$(+, \bullet, \le)$

$$
\begin{aligned}
\max\ & 5x_1 + 4x_2 \\
\text{sa}\ & 4x_1 + 5x_2 \le 24 \\
& 2x_1 + x_2 \le 12 \\
& 2x_1 + 2x_2 \le 19 \\
& 3x_1 + 0.5x_2 \le 6 \\
& 5x_1 + 6x_2 \le 32 \\
& 6x_1 + 2x_2 \le 15 \\
& x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

$$x_1^* = 1.23, \quad x_2^* = 3.82, \quad z^* = 21.41$$

Modelo com valores modais de A_{ij} e B_i

$$
\begin{aligned}
\max \quad & 5x_1 + 4x_2 \\
\text{sa} \quad & 4x_1 + 5x_2 \le 24 \\
& 2x_1 + x_2 \le 12 \\
& x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

modelo com menor nº de restrições

$$x_1^* = 2.25, \quad x_2^* = 3, \quad z^* = 23.25$$

Observação

Este material refere-se às notas de aula do curso CT 820 Teoria de Sistemas e Otimização Fuzzy: Introdução e Aplicações da Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação da Unicamp e do Centro Federal de Educação Tecnológica do Estado de Minas Gerais. Não substitui o livro texto, as referências recomendadas e nem as aulas expositivas. Este material não pode ser reproduzido sem autorização prévia dos autores. Quando autorizado, seu uso é exclusivo para atividades de ensino e pesquisa em instituições sem fins lucrativos.