2.1-Modelos Determinísticos de Otimização

Introdução e motivação

Brasil Petróleo (Refinaria de Grabriel)

Origem Petróleo	Gasolina (%/barril)	Gas Aviação (%/barril)	Lubrificante (%/barril)	Perdas (%/barril)	Oferta (barris)	Custo ($)
Nacional	40	20	30	10	6000	15
Importado	30	40	20	10	9000	20
Demanda (barris/dia)	2000	1500	500			

- Dados exatos

- Variáveis de decisão

x_1 = número de barris importados refinados por dia ($\times$1000)

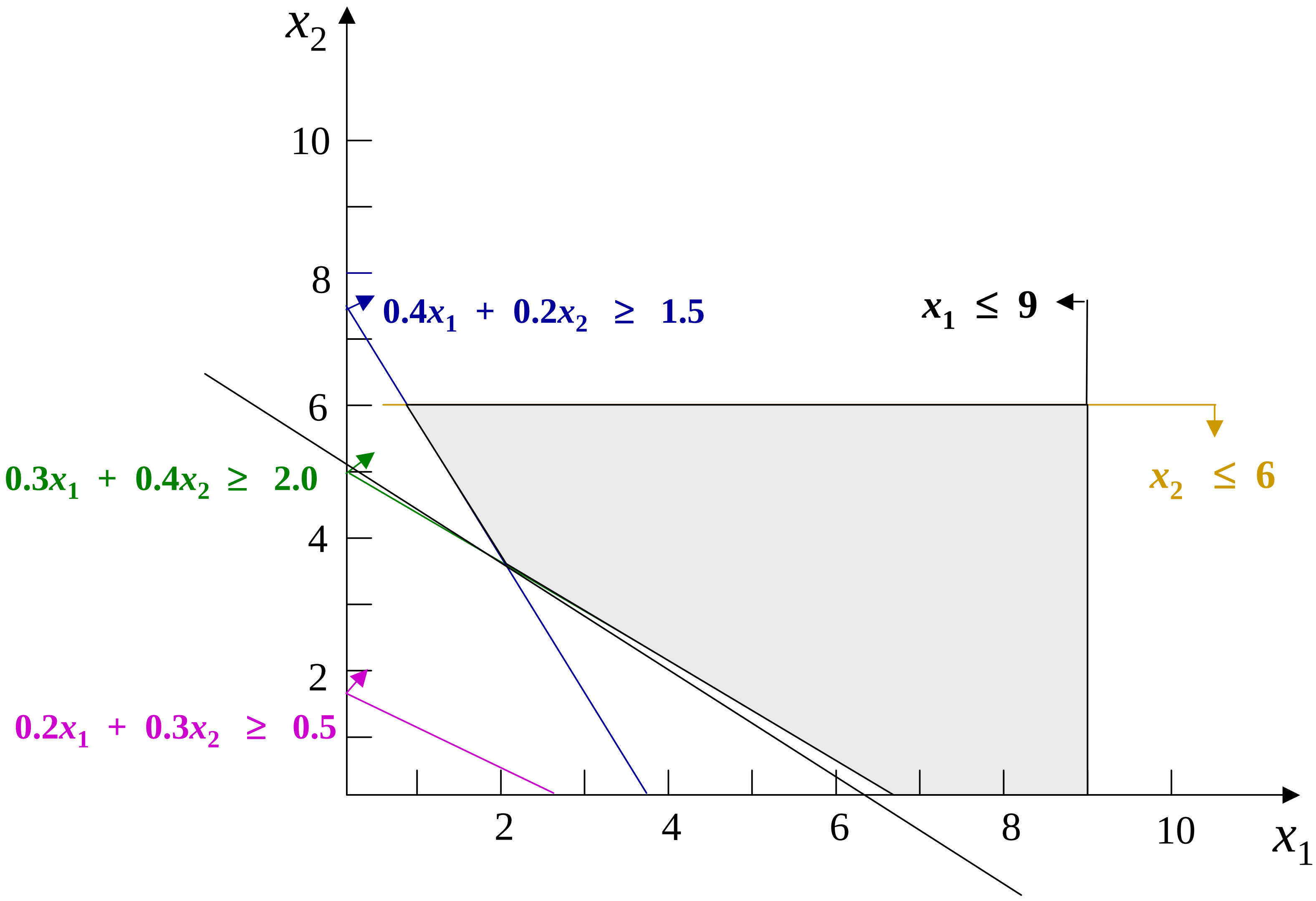
x_2 = número de barris nacionais refinados por dia ($\times$1000)

- Três itens essenciais em modelos de otimização
  – decisões: escolhas de quem toma decisões
  – restrições: limitam escolhas
  – objetivos: estabelecem preferencias entre decisões

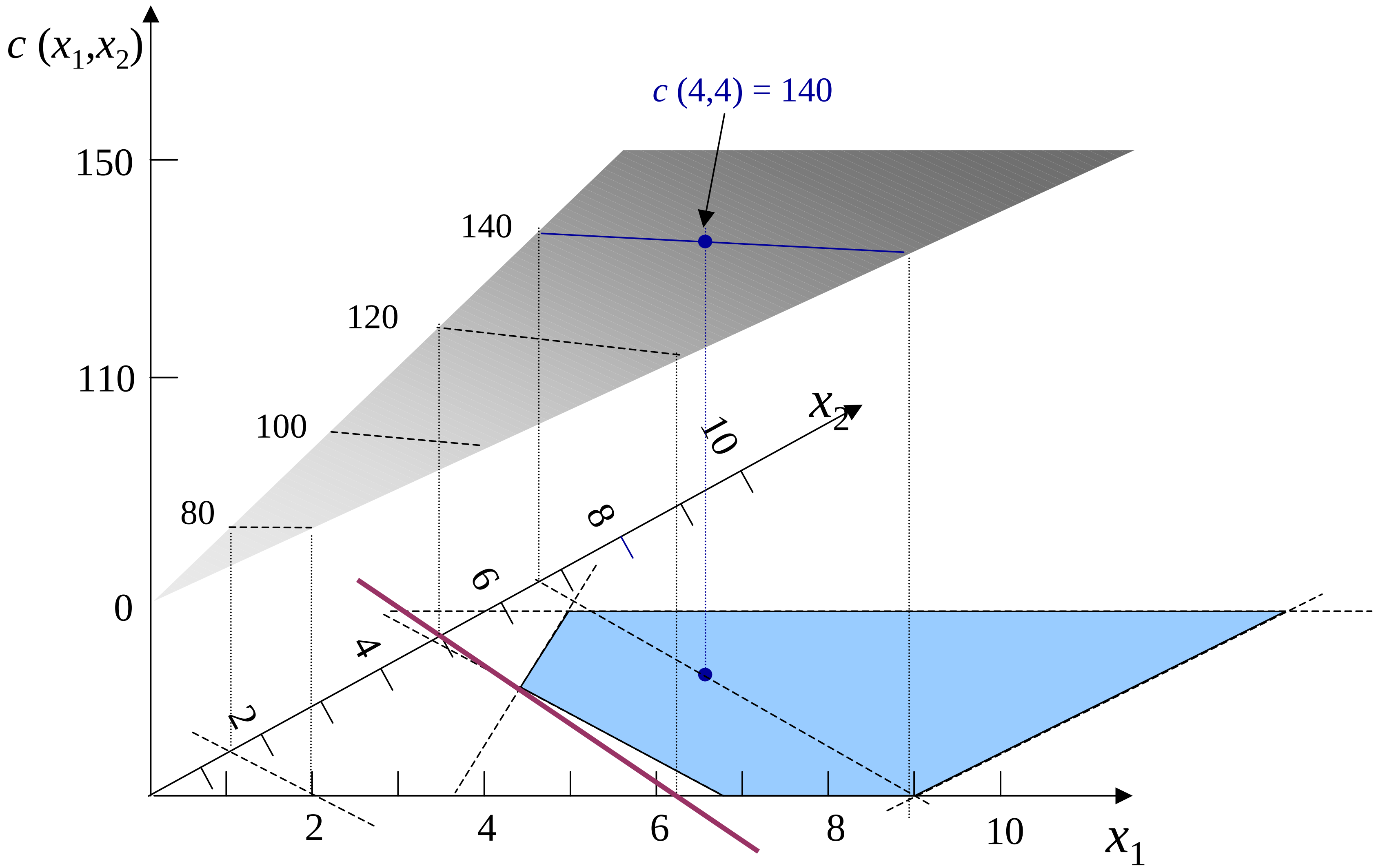
- Modelo da Refinaria de Gabriel

$$
\begin{array}{ll}
\min & 20x_1 + 15x_2 \qquad \text{Função objetivo} \\
\text{sa} & \left.\begin{array}{l}
0.3x_1 + 0.4x_2 \geq 2.0 \\
0.4x_1 + 0.2x_2 \geq 1.5 \\
0.2x_1 + 0.3x_2 \geq 0.5 \\
x_1 \leq 9 \\
x_2 \leq 6 \\
\\
x_1, x_2 \geq 0
\end{array}\right\} \text{Restrições}
\end{array}
$$

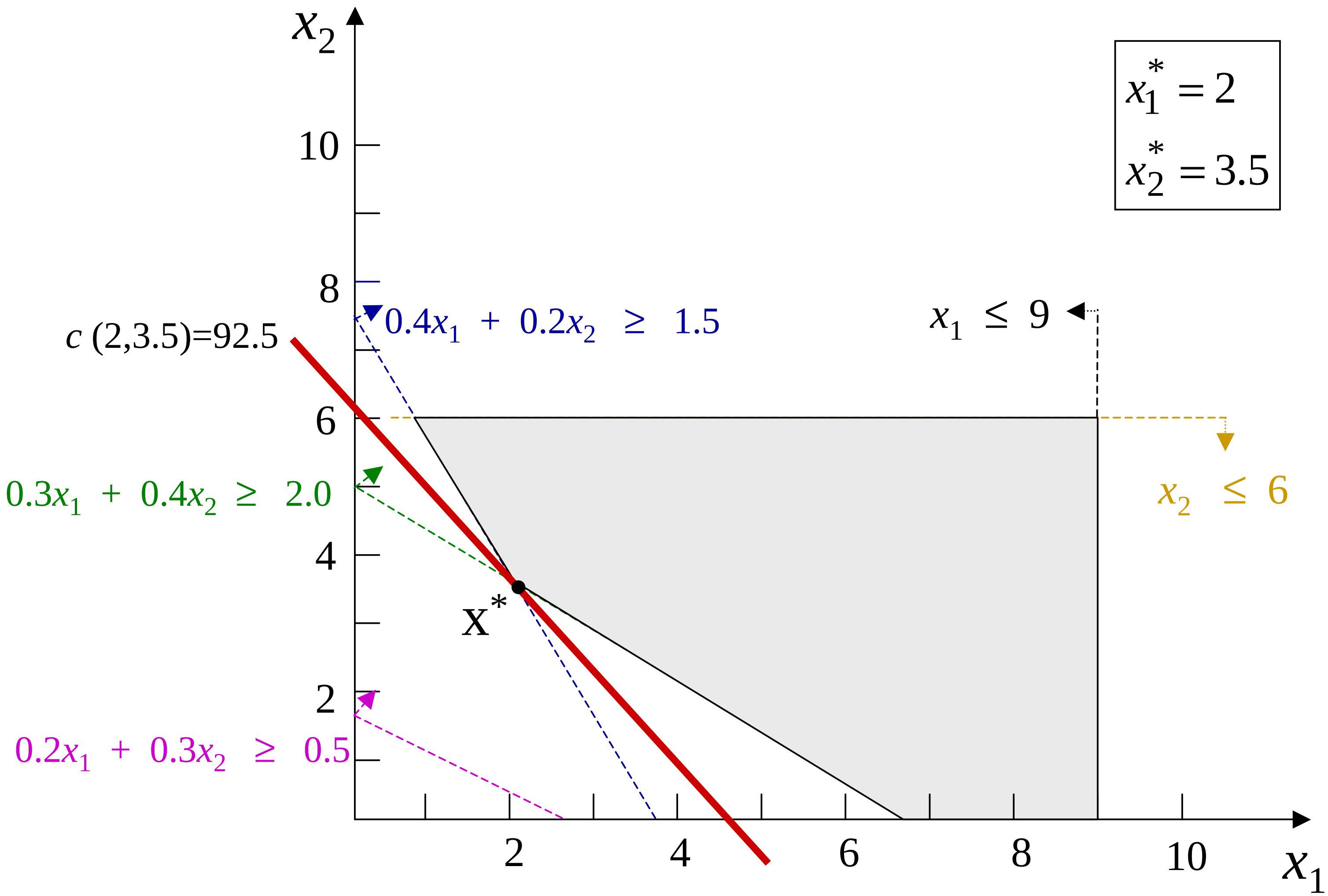
Soluções factíveis



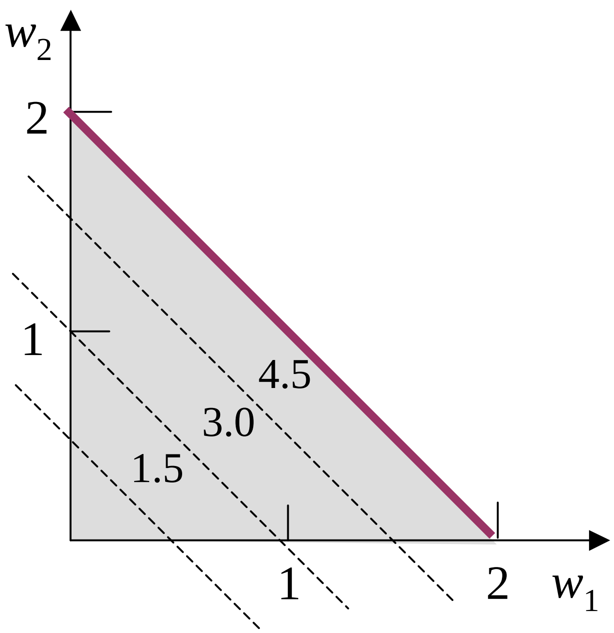
Função objetivo



Solução ótima

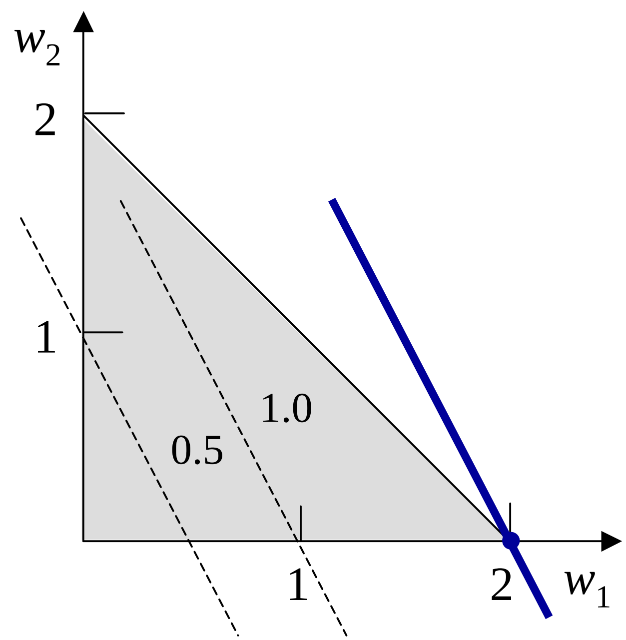


$$\begin{array}{ll} \max & 3w_1 + 3w_2 \\ \text{sa} & w_1 + w_2 \leq 2 \\ & w_1, w_2 \geq 0 \end{array}$$



Múltiplas soluções

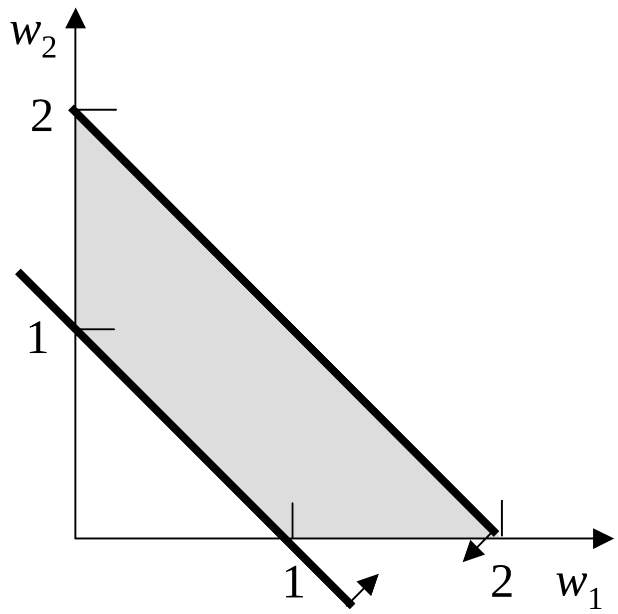
$$\begin{array}{ll} \max & w_1 + 0.5w_2 \\ \text{sa} & w_1 + w_2 \leq 2 \\ & w_1, w_2 \geq 0 \end{array}$$



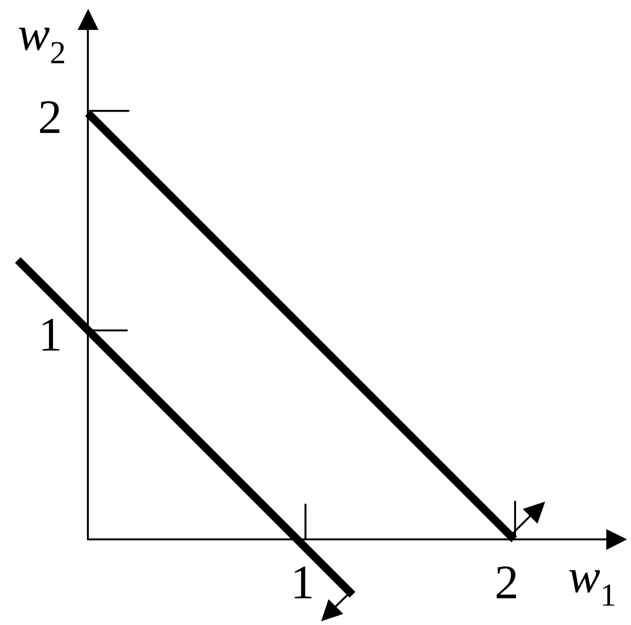
Solução única

$$\begin{array}{ll} \max & 3w_1 + 3w_2 \\ \text{sa} & w_1 + w_2 \leq 2 \\ & w_1 + w_2 \geq 1 \\ & w_1, w_2 \geq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \max & w_1 + 0.5w_2 \\ \text{sa} & w_1 + w_2 \geq 2 \\ & w_1 + w_2 \leq 1 \\ & w_1, w_2 \geq 0 \end{array}$$



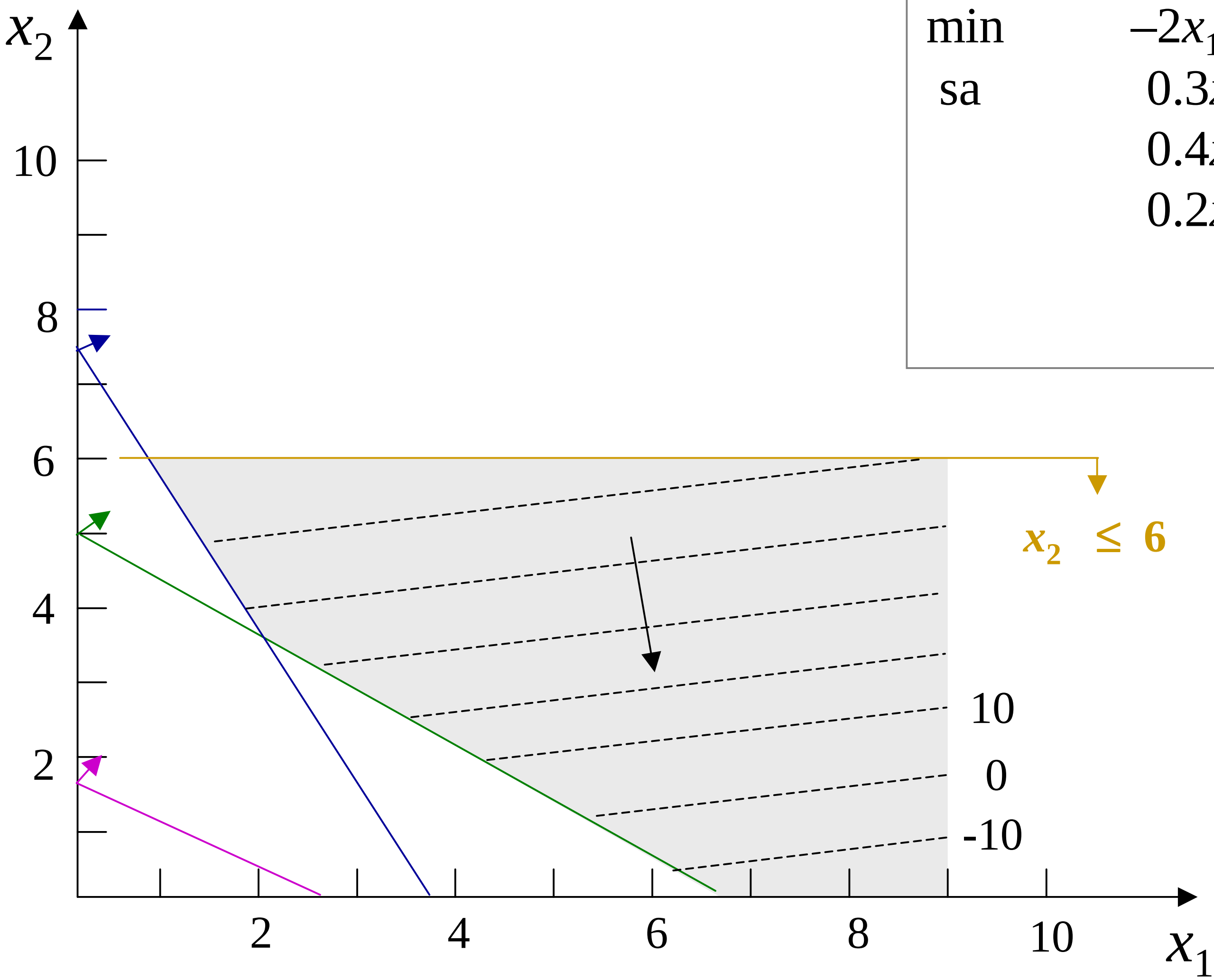
Modelo factível



Modelo não factível

Modelo não limitado

$$
\begin{array}{lrcl}
\text{min} & -2x_1 + 15x_2 & & \\
\text{sa} & 0.3x_1 + 0.4x_2 & \geq & 2.0 \\
 & 0.4x_1 + 0.2x_2 & \geq & 1.5 \\
 & 0.2x_1 + 0.3x_2 & \geq & 0.5 \\
 & x_2 & \leq & 6 \\
 & x_1, x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$



Modelos de grande porte

- Exemplo: produção em escala de sementes de milho híbrido

  – l = 20 fazendas de produção de sementes
  – m = 25 variedades de milho
  – n = 30 regiões de venda

  – Como operar produção e distribuição com custo mínimo ?

  – Parâmetros estimados pelos produtores
    • custo de produção em cada região ($/saca)
    • capacidade de produção de cada fazenda (espigas)
    • número de espigas que são processadas para compor uma saca
    • demanda de cada tipo de semente em cada região (sacas)
    • custo de transporte das fazendas às regiões de consumo ($/saca)

f = fazenda $(f = 1,\ldots,l)$
h = variedade híbrido $(h = 1,\ldots,m)$
r = região de venda $(r = 1,\ldots,n)$

x_{fh} = número de sacas produzidos na fazenda f da variedade h

$$f = 1,\ldots,l; \;\; h = 1,\ldots,m$$

y_{fhr} = número sacas de híbridos h transportados da fazenda f para região r

$$f = 1,\ldots,l; \;\; h = 1,\ldots,m; \; r = 1,\ldots,n$$

número de variáveis $x = lm = 20(25) = 500$
número de variáveis $y = lmn = 20(25)(30) = 15.000$
total de variáveis: 15.500 variáveis

p_{fh} = custo/saca produzir na fazenda f a variedade h

s_{fhr} = custo/saca transportar híbrido h da fazenda f para região r

u_f = capacidade de produção da fazenda f (espigas)

a_h = número de espigas para produzir uma saca da variedade h

d_{hr} = número de sacas do híbrido h demandada pela região r

custo total = custo de produção + custo de transporte

objetivo = minimizar custo total

$$\min \sum_{f=1}^{l} \sum_{h=1}^{m} p_{fh} x_{fh} + \sum_{f=1}^{l} \sum_{h=1}^{m} \sum_{r=1}^{n} s_{fhr} y_{fhr} \qquad \text{custo total}$$

$$\text{sa} \quad \sum_{h=1}^{m} a_h x_{fh} \le u_f \qquad f = 1,\dots,l \qquad \text{capacidade}$$

$$\sum_{f=1}^{l} y_{fhr} = d_{hr} \qquad h = 1,\dots,m;\ r = 1,..,n \qquad \text{demandas}$$

$$\sum_{r=1}^{n} y_{fhr} = x_{fh} \qquad f = 1,\dots,l;\ h = 1,\dots,m \qquad \text{balanço}$$

$$x_{fh} \ge 0 \qquad f = 1,\dots,l;\ h = 1,\dots,m \qquad \text{não negatividade}$$

$$y_{fhr} \ge 0 \qquad f = 1,\dots,l;\ h = 1,\dots,m; r = 1,\dots,n$$

Modelo programação matemática geral

$$
\begin{array}{ll}
\max\ (\min) & f(x) \\
\text{sa} & g(x) = b \\
 & h(x) \leq r \\
 & v(x) \geq d
\end{array}
$$

$x \in \mathrm{R}^n \qquad g: \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}^m$

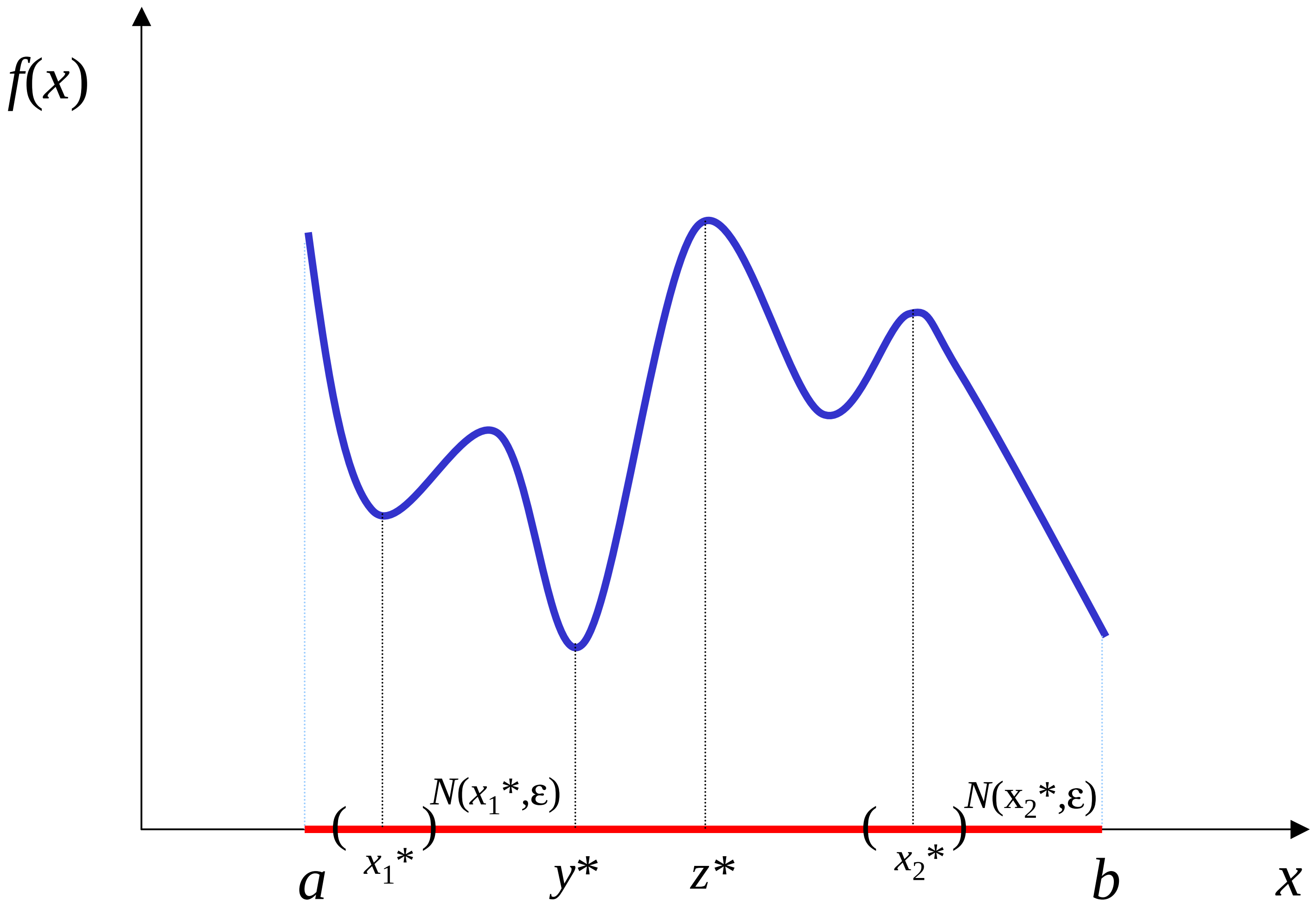
$h: \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}^k \qquad v: \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}^l$

$$\max\ (\min) \quad f(x)$$

$$\text{sa} \qquad x \in D \subseteq R^n$$

- máximo
  - local: $f(x^*) \geq f(x) \ \ \forall x \in N(x^*, \varepsilon) \subset D$
  - global: $f(x^*) \geq f(x) \ \ \forall x \in D$

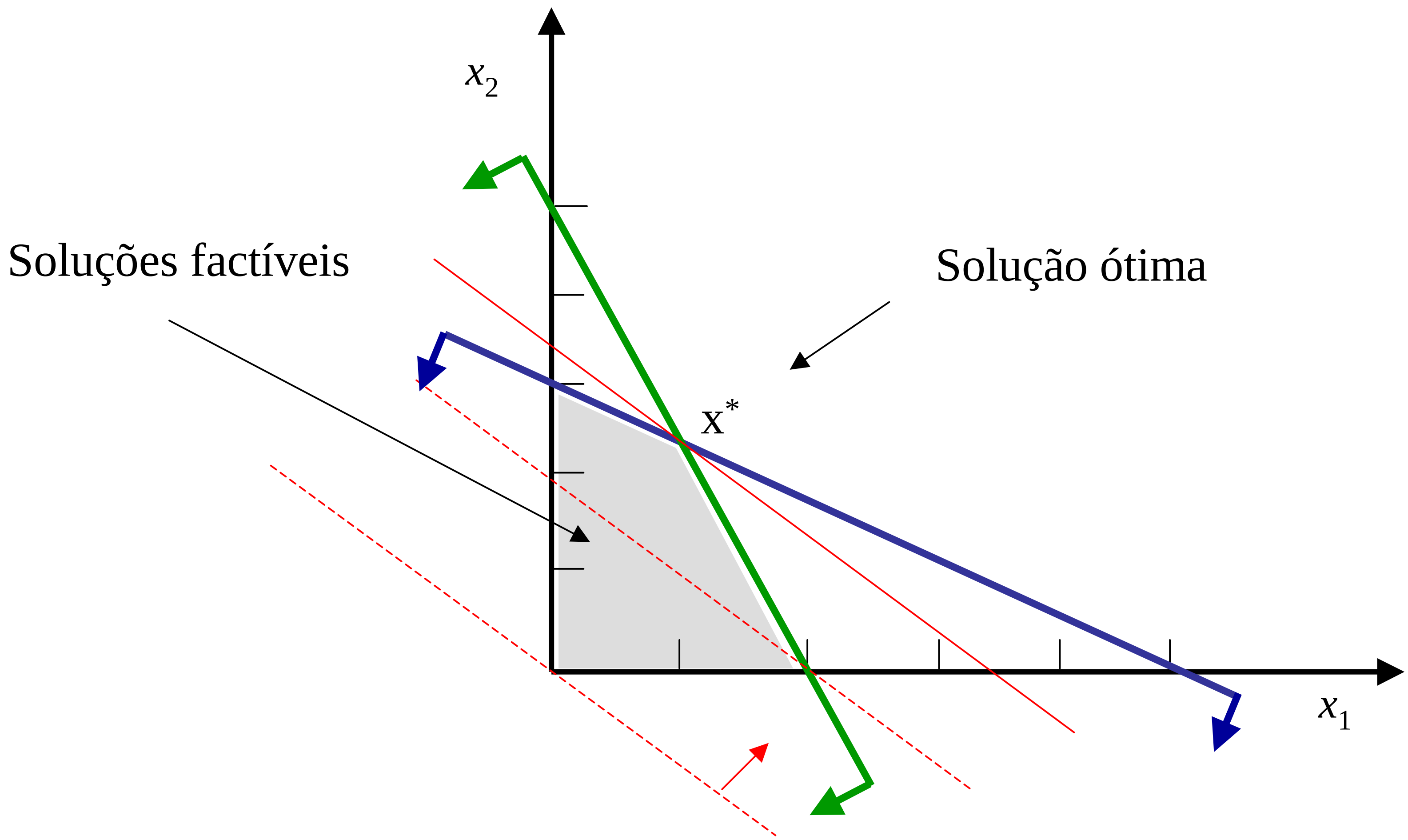
- mínimo
  - local: $f(x^*) \leq f(x) \ \ \forall x \in N(x^*, \varepsilon) \subset D$
  - global: $f(x^*) \leq f(x) \ \ \forall x \in D$

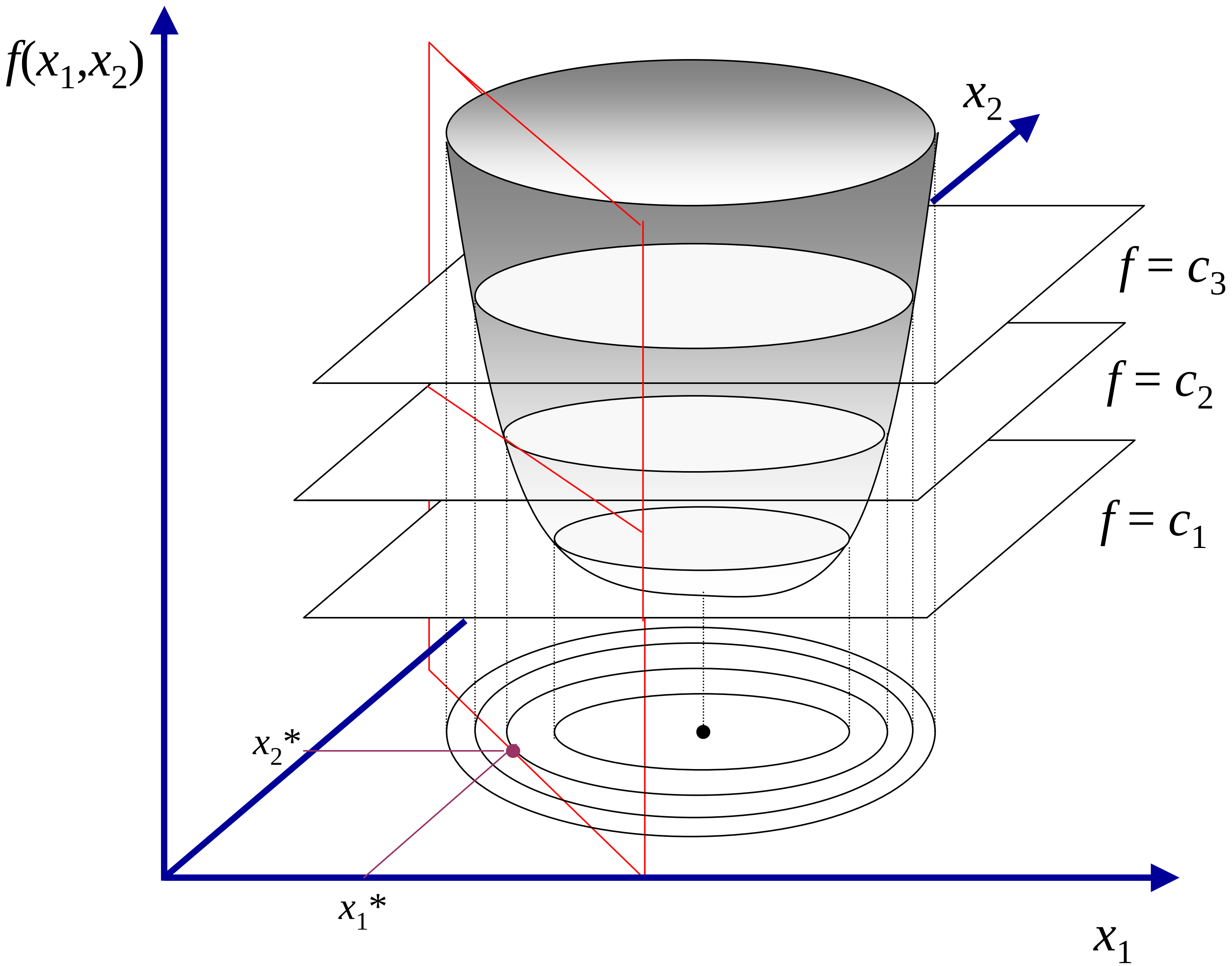


$$D = [a, b]$$

Modelo Linear - PL

$$
\begin{array}{lrcrcl}
\max & 5\,x_1 & + & 5\,x_2 & & \\
\text{sa} & 3\,x_1 & + & 5\,x_2 & \leq & 15 \\
 & 5\,x_1 & + & 2\,x_2 & \leq & 10 \\
 & & & x_1, x_2 \geq 0 & &
\end{array}
$$

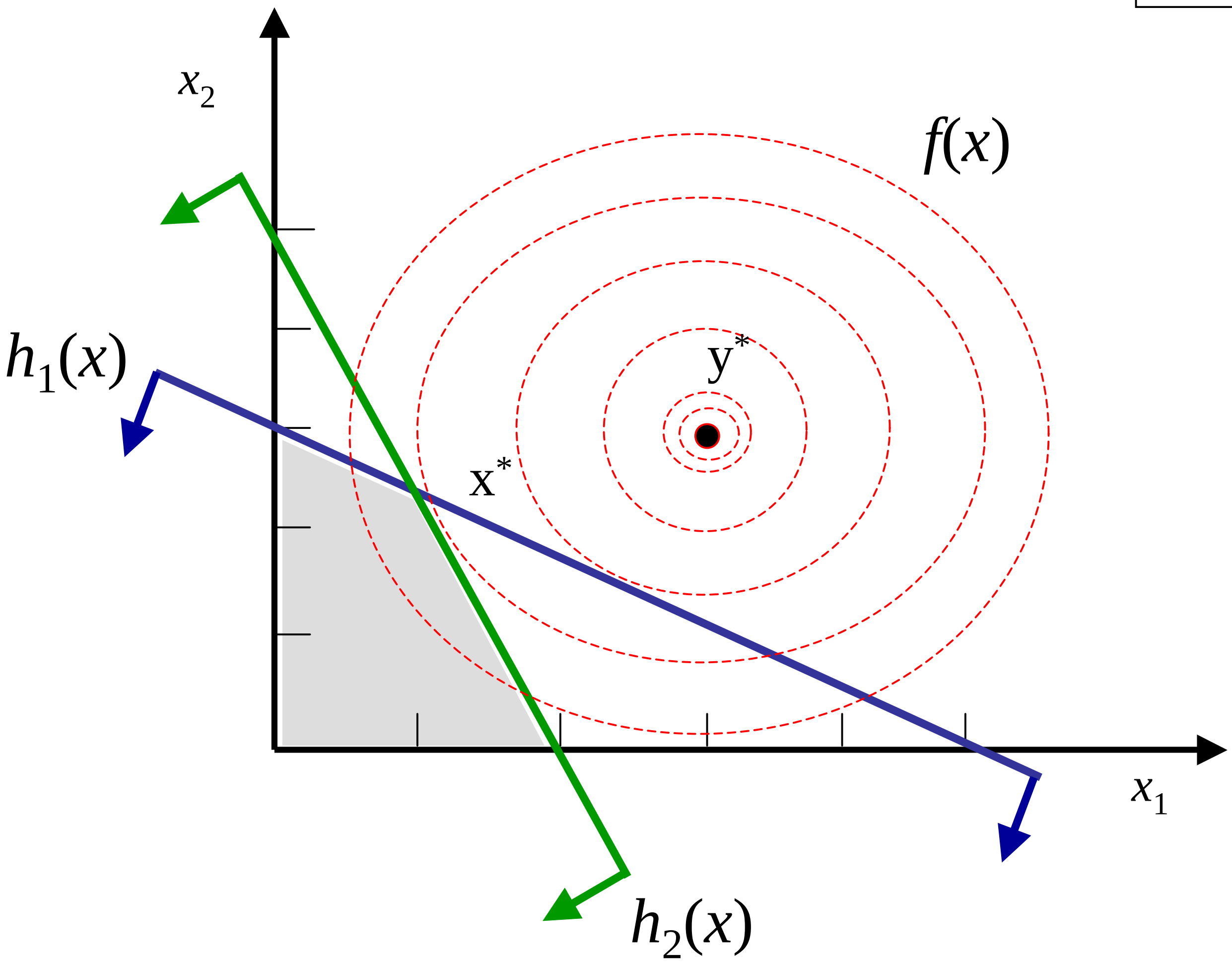




$f(x_1,x_2)$
x_2
$f = c_3$
$f = c_2$
$f = c_1$
x_2*
x_1*
x_1

Modelo não linear - PNL

min	$(x_1 - 3)^2 + (x_2 - 3)^2$
sa	$3x_1 + 5x_2 \leq 15$
	$5x_1 + 2x_2 \leq 10$
	$x_1, x_2 \geq 0$



Otimização campanhas publicitárias

$$\max \sum_{g=1}^{m} p_g \sum_{c=1}^{n} s_{gc} \log(x_c + 1) \qquad \text{lucro total}$$

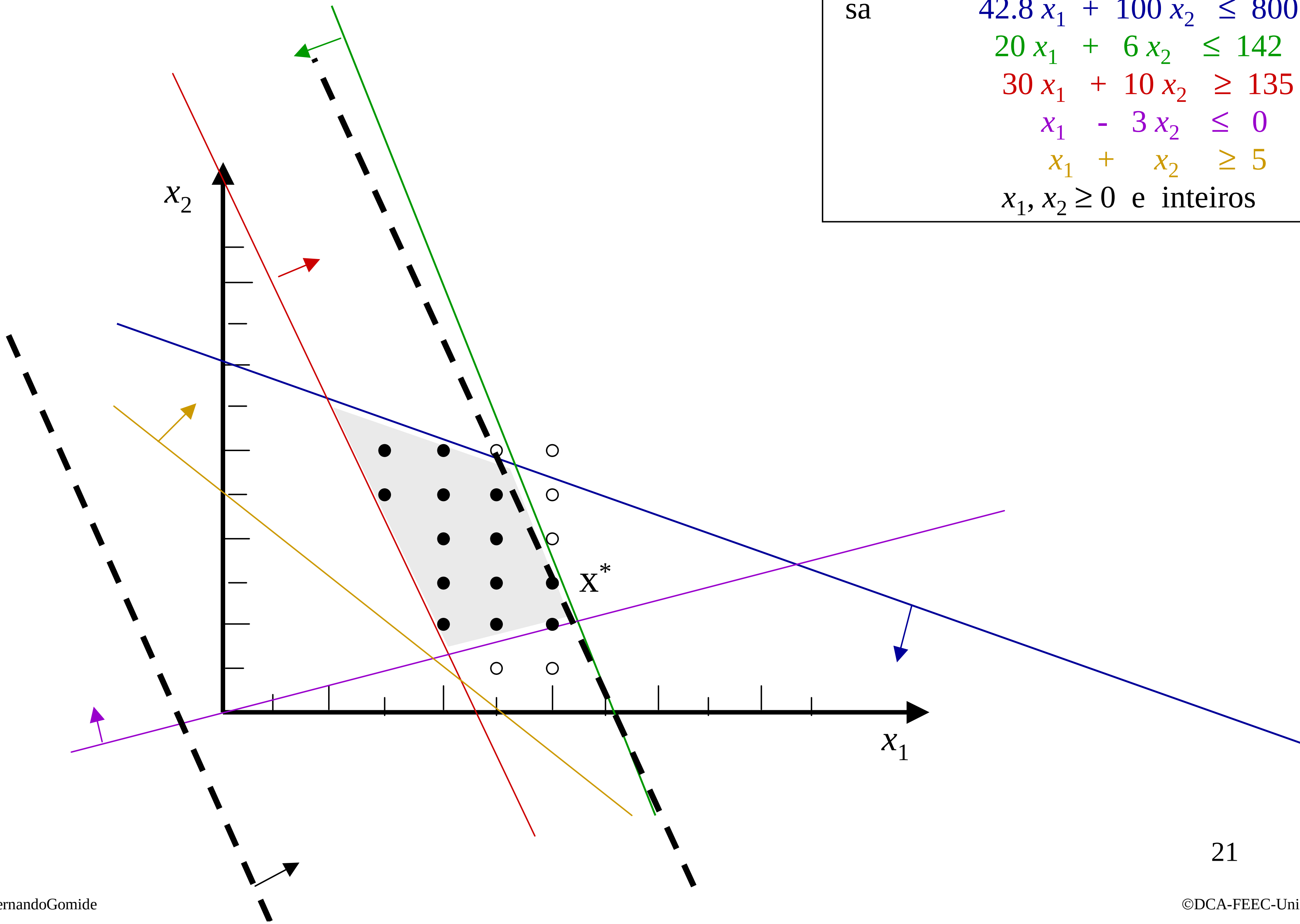
$$sa \quad \sum_{c=1}^{n} x_c \le b \qquad \text{limite orçamentário}$$

$$x_c \ge 0 \;\; ; \;\; c = 1, \ldots, n \qquad \text{não negatividade}$$

x_c = quantia alocada à campanha tipo c
p_g = lucro (em termos da fração das vendas) grupo de produtos g
g = grupo de produtos, g = 1,….,m
c = tipo de campanha, c = 1,….,n
b = orçamento disponível
s_{gc}= parâmetro aumento vendas do grupo g devido campanha c

Modelo discreto - PMD

$$
\begin{array}{lrcrcl}
\max & 18\,x_1 & + & 6\,x_2 & & \\
\text{sa} & 42.8\,x_1 & + & 100\,x_2 & \leq & 800 \\
 & 20\,x_1 & + & 6\,x_2 & \leq & 142 \\
 & 30\,x_1 & + & 10\,x_2 & \geq & 135 \\
 & x_1 & - & 3\,x_2 & \leq & 0 \\
 & x_1 & + & x_2 & \geq & 5 \\
 & & & x_1, x_2 \geq 0 & & \text{e inteiros}
\end{array}
$$



Programação de operação industrial

i = tipo de molde $(i = 1, \ldots, m)$

j = tipo produto $(j = 1, \ldots, n)$

c_{ij} = perda causada pelo molde i no produto j

I_j = índices i correspondentes aos moldes que podem ser utilizados pelo produto j

$$y_i = \begin{cases} 1 & \text{se molde } i \text{ é selecionado} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se molde } i \text{ é usado pelo produto } j \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$\min \sum_{j=1}^{n} \sum_{i \in I_j} c_{ij} x_{ij}$$ perda total

$$\text{sa} \quad \sum_{i=1}^{m} y_i \le p$$ seleciona no máximo p

$$\sum_{i \in I_j} x_{ij} = 1 \qquad j = 1,\dots,n$$ um molde por produto

$$x_{ij} \le y_i \qquad j = 1,\dots,n;\ i \in I_j$$ usar somente se selecionado

$$y_i = 0 \ ou \ 1 \qquad i = 1,\dots,m$$ variáveis binárias

$$x_{ij} = 0 \ ou \ 1 \qquad j = 1,\dots,n;\ i \in I_j$$ variáveis binárias

Modelo múltiplos objetivos-PMO

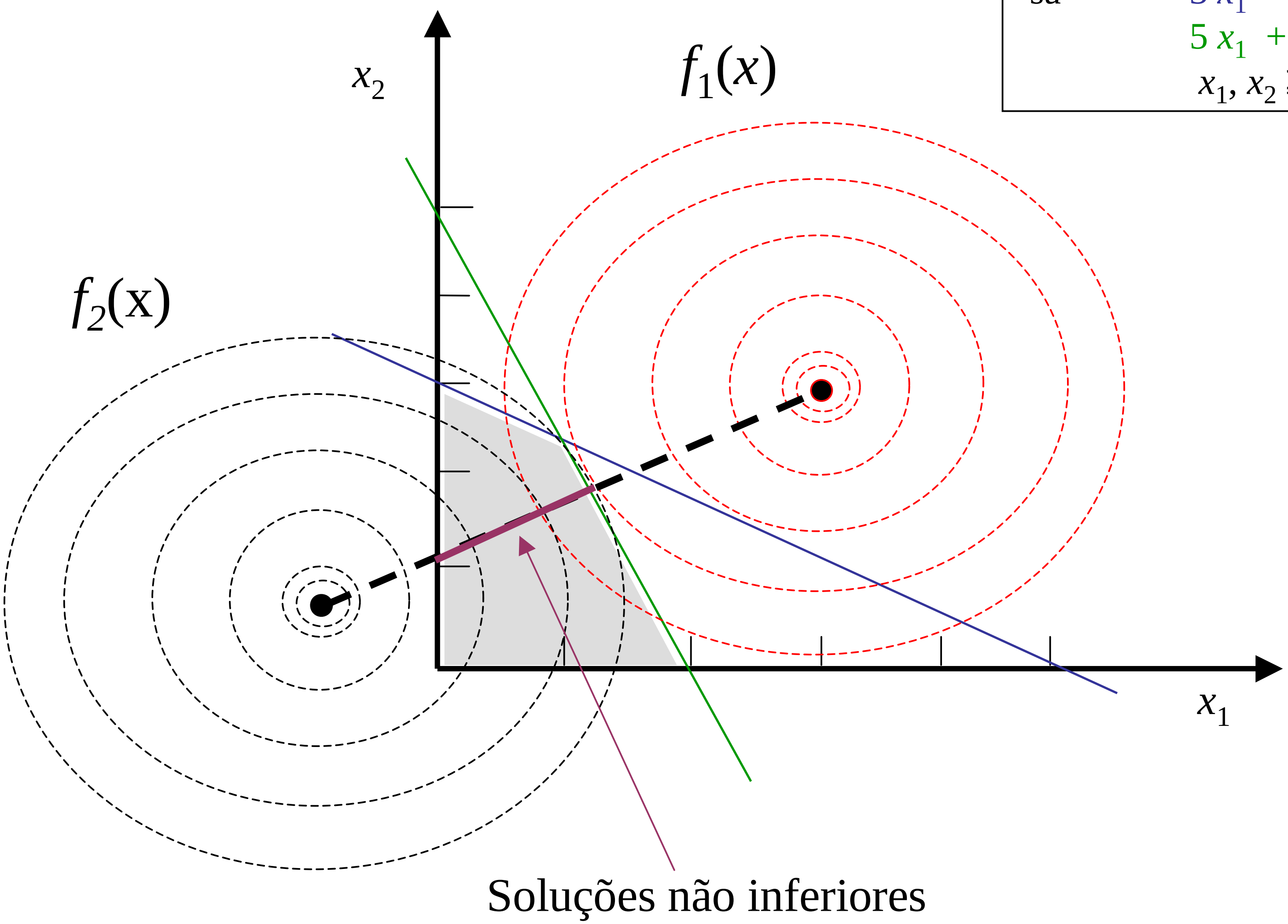
min $\quad f_1 = (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 3)^2$

$\quad\quad f_2 = (x_1 + 1)^2 + (x_2 - 0.75)^2$

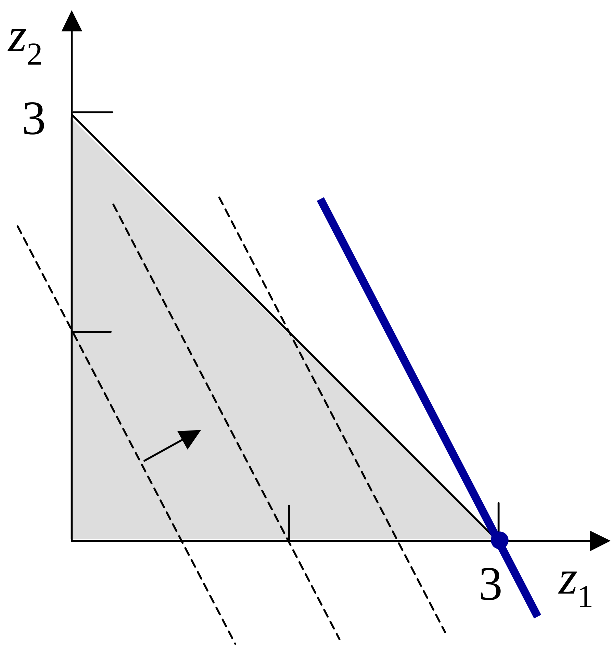
sa $\quad 3x_1 + 5x_2 \leq 15$

$\quad\quad 5x_1 + 2x_2 \leq 10$

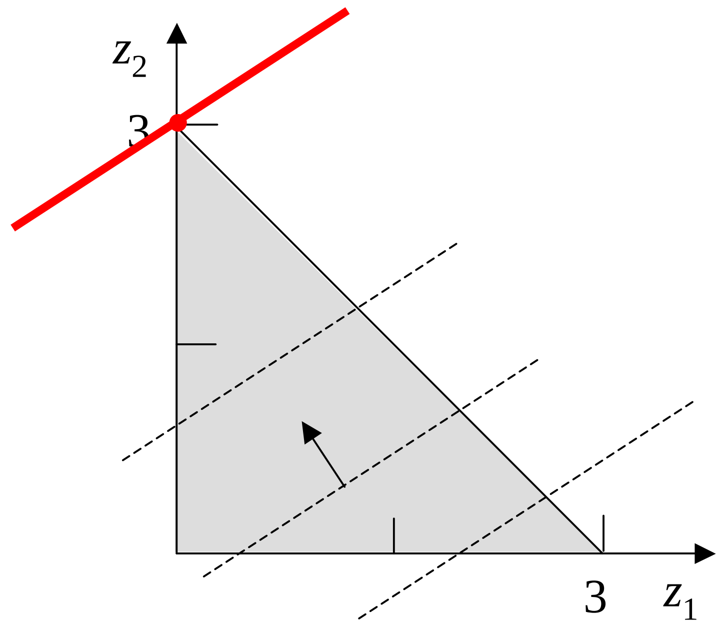
$\quad\quad x_1, x_2 \geq 0$



$$\begin{array}{lll} \max & 3\,z_1 + z_2 & \\ \min & z_1 - z_2 & \\ \text{sa} & z_1 + z_2 \leq 3 & \\ & z_1, z_2 \geq 0 & \end{array}$$

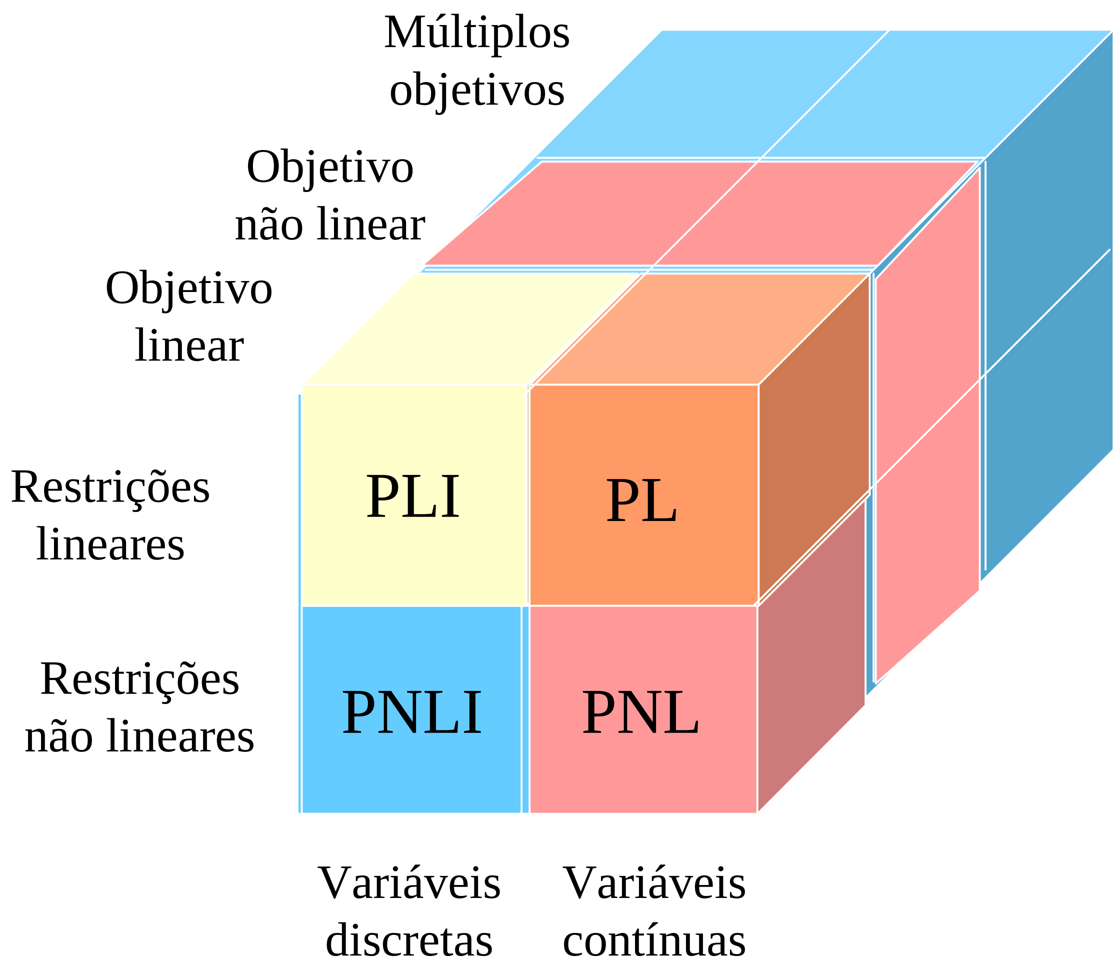


max $3\,z_1 + z_2$



min $z_1 - z_2$

Classes de modelos de otimização



Observação

Este material refere-se às notas de aula do curso CT 820 Teoria de Sistemas e Otimização Fuzzy: Introdução e Aplicações da Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação da Unicamp e do Centro Federal de Educação Tecnológica do Estado de Minas Gerais. Não substitui o livro texto, as referências recomendadas e nem as aulas expositivas. Este material não pode ser reproduzido sem autorização prévia dos autores. Quando autorizado, seu uso é exclusivo para atividades de ensino e pesquisa em instituições sem fins lucrativos.