3-Fundamentos Matemáticos II

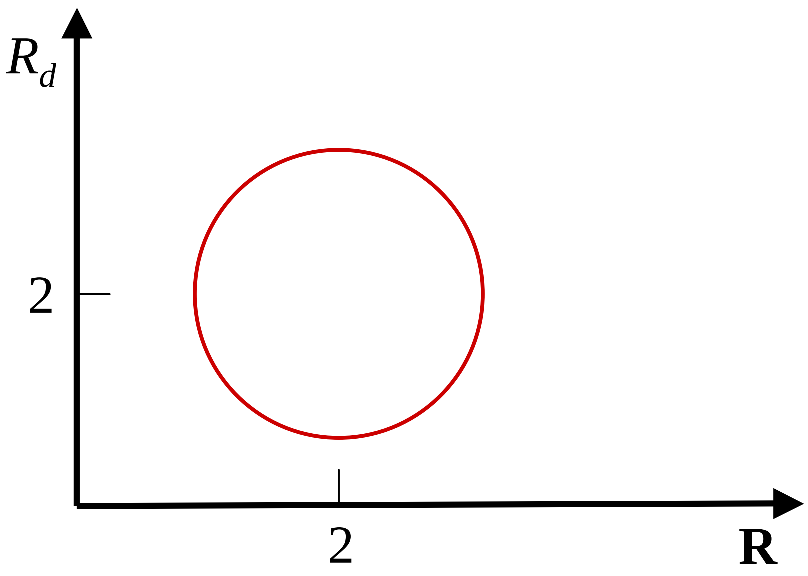
Conteúdo

1. Relações fuzzy
2. Agregação, medida e integral fuzzy
3. Princípio da extensão
4. Números fuzzy
5. Teoria de possibilidade

1-Relação e relação fuzzy

- Relação $R : \mathbf{X}\times\mathbf{Y} \to \{0,1\}$

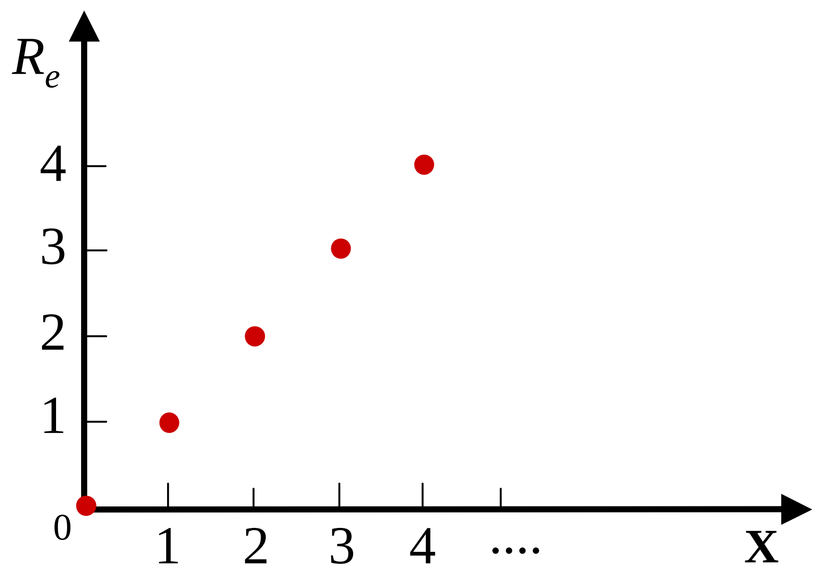
$$R(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad (x, y) \in R \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$



$R_d = \{x,y \in \mathbf{R} \mid (x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 1\}$

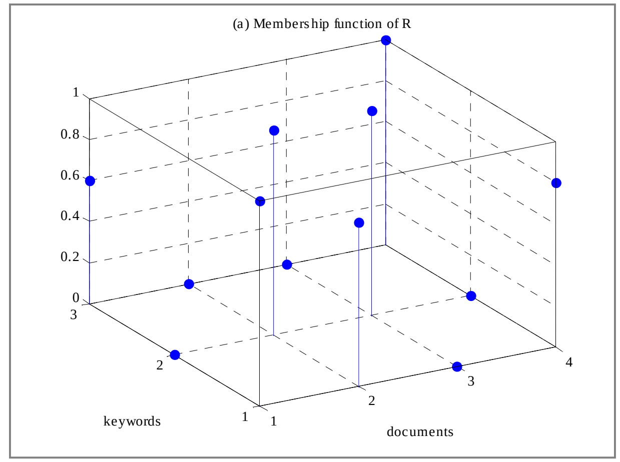
Exemplo

$R_d = \{x, y \in \mathbf{X} \mid x = y\}$ $\mathbf{X} = \{0, 1, 2, 3, 4\}$



Relação fuzzy

- Relação fuzzy $R : \mathbf{X}\times\mathbf{Y} \rightarrow [0,1]$



Exemplo

documentos: $\mathbf{D} = \{d_{fs}, d_{nf}, d_{ns}, d_{gf}\}$

palavras chaves: $\mathbf{W} = \{w_f, w_n, w_g\}$

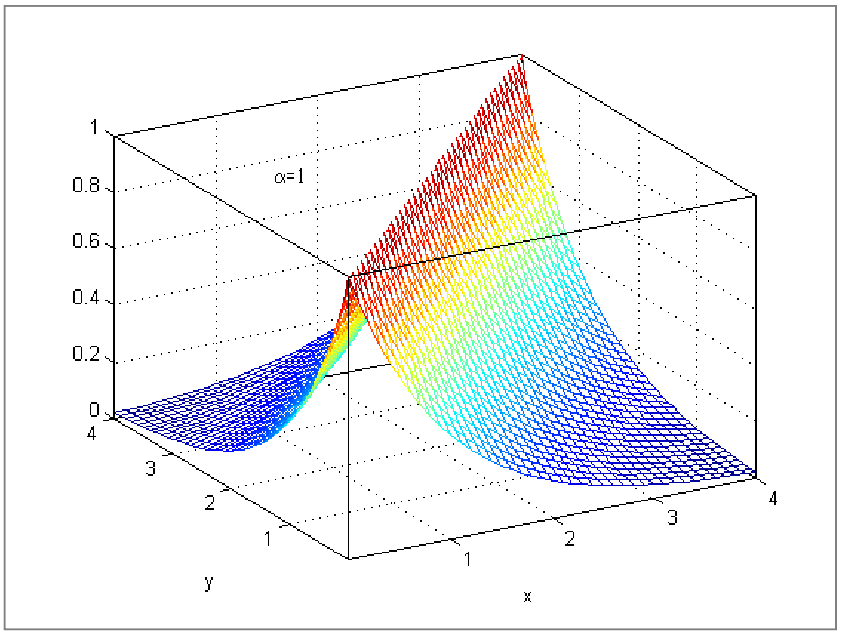
$$R : \mathbf{D}\times\mathbf{W} \rightarrow [0,1]$$

$$R = \begin{array}{c c} \begin{array}{ccc} w_f & w_n & w_g \end{array} & \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0.6 \\ 0.8 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0.8 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} d_{fs} \\ d_{nf}, \\ d_{ns} \\ d_{gf} \end{array} \end{array}$$

Exemplo

R_e : x aproximadamente igual a y

$$R_e(x,y) = exp\left\{\frac{-|x-y|}{\alpha}\right\},\ \alpha > 0$$



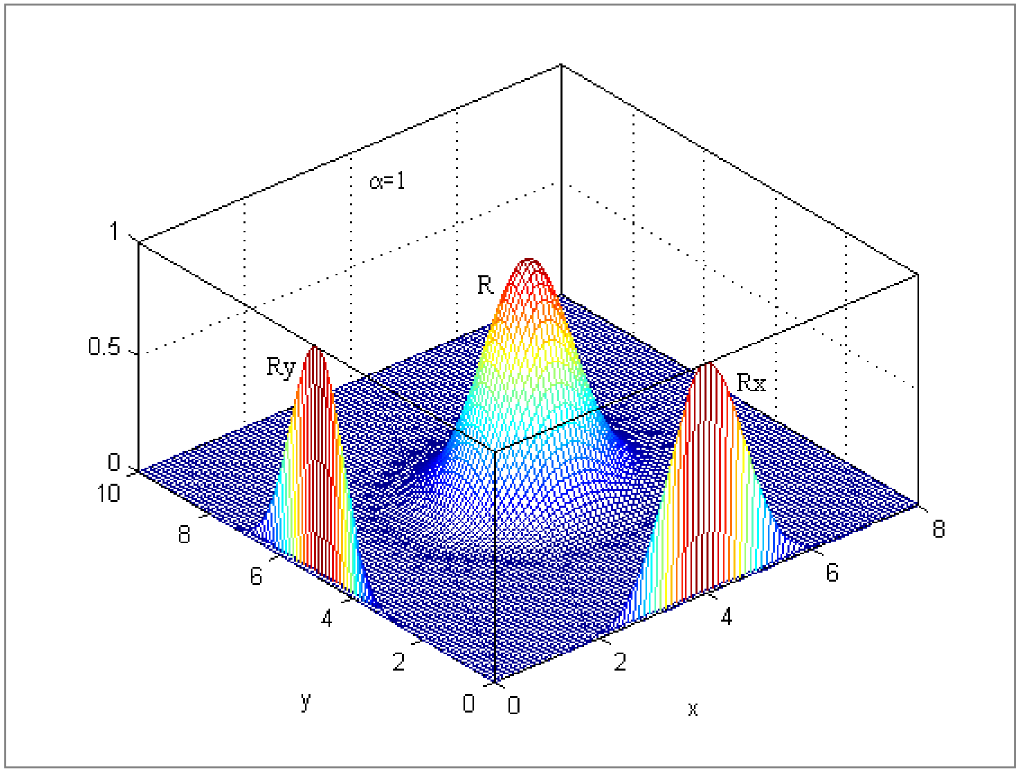
$\mathbf{X} = \mathbf{Y} = [0,4]$

$\alpha = 1$

Projeção de uma relação fuzzy

$$R_{\mathbf{X}}(x) = \mathrm{Proj}_{\mathbf{X}} R(x,y) = \sup_{y} R(x,y)$$

$$R_{\mathbf{Y}}(y) = \mathrm{Proj}_{\mathbf{Y}} R(x,y) = \sup_{x} R(x,y)$$

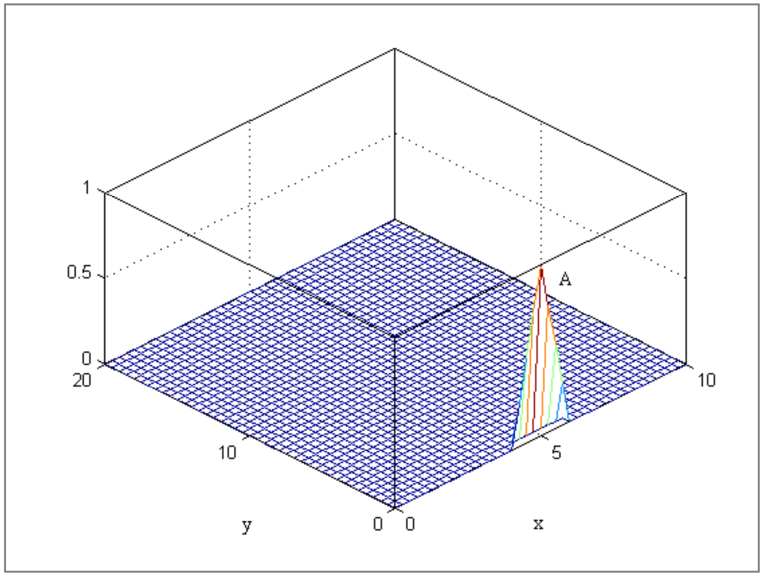


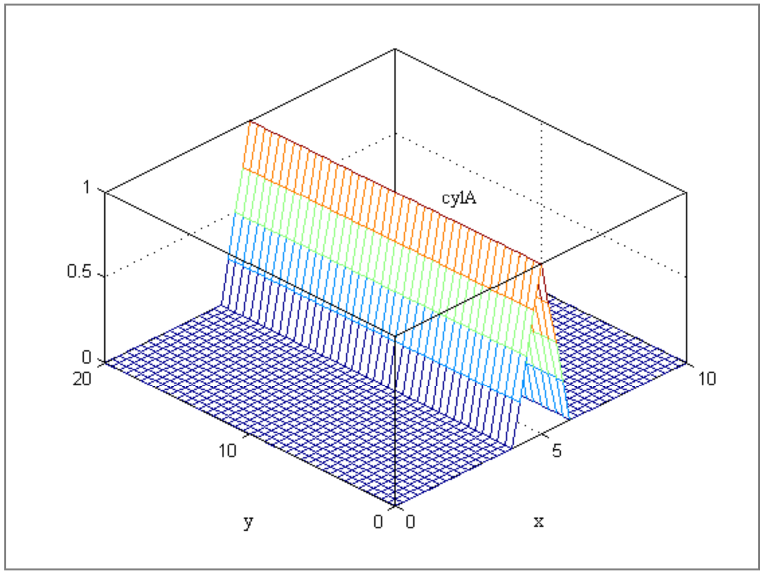
$$R(x, y) = \exp\{-\alpha[(x-4)^2 + (y-5)^2]\}, \;\; \alpha = 1$$

Extensão cilíndrica

$$\text{cyl}\, A(x,y) = A(x)\,, \quad \forall x \in \mathbf{X}$$

$$\text{cyl}\, A = A_c$$





Representação de relações fuzzy

- Teorema da representação

$$R = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} \alpha R_{\alpha}$$

$$R(x,y) = \sup_{\alpha \in [0,1]} \{\min[\alpha, R(x,y)]\}$$

Relações fuzzy $P,Q : \mathbf{X}\times\mathbf{Y} \rightarrow [0,1]$

- Igualdade $P = Q$

$P(x,y) = Q(x,y) \quad \forall (x,y) \in \mathbf{X}\times\mathbf{Y}$

- Inclusão $P \subseteq Q$

$P(x,y) \leq Q(x,y) \quad \forall (x,y) \in \mathbf{X}\times\mathbf{Y}$

- União: $R = P \cup Q$

$R(x,y) = P(x,y)\ s\ Q(x,y) \quad \forall (x,y) \in \mathbf{X}\times\mathbf{Y} \quad$ **(** $s \equiv$ t-conorma)

- Interseção: $R = P \cup Q$

$$R(x,y) = P(x,y)\ t\ Q(x,y) \qquad \forall (x,y) \in \mathbf{X} \times \mathbf{Y} \qquad (\ t \equiv \text{t-norma})$$

- Complemento: $\overline{\mathrm{R}}$

$$\overline{R}(x,y) = 1 - R(x,y) \qquad \forall (x,y) \in \mathbf{X} \times \mathbf{Y}$$

- Transpose: R^{T}

$$R^{\mathrm{T}}(y,x) = R(x,y) \qquad \forall (x,y) \in \mathbf{X} \times \mathbf{Y}$$

Produto Cartesiano

$A_1, A_2, \ldots, A_n$ conjuntos fuzzy em $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \ldots, \mathbf{X}_n$

$R = A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$

$R(x_1, x_2, \ldots, x_\mathrm{n}) = \min \{A_1(x_1), A_2(x_2), \ldots, A_n(x_n)\} \quad \forall (x_i, y_i) \in \mathbf{X}_i \times \mathbf{Y}_i$

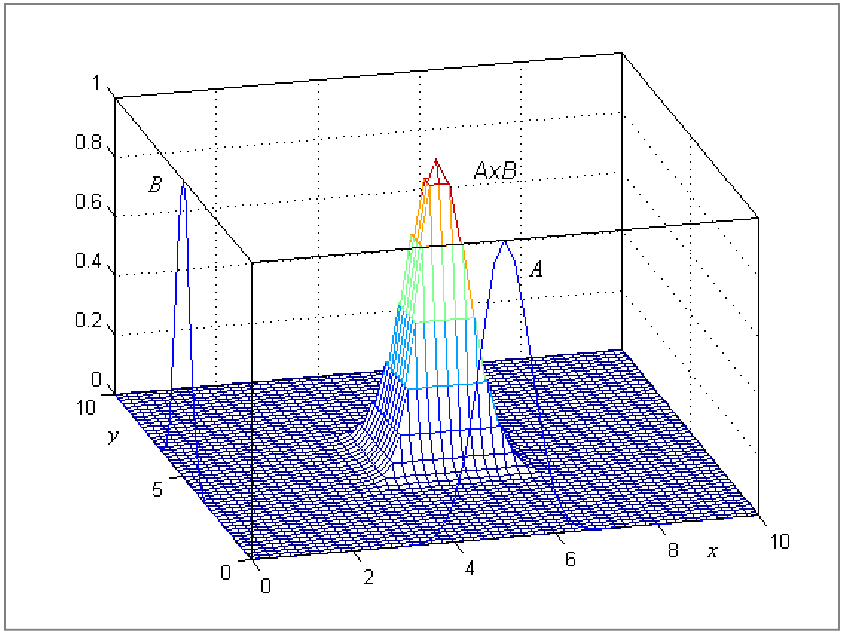
Generalização

$R(x_1, x_2, \ldots, x_\mathrm{n}) = A_1(x_1)\ t\ A_2(x_2)\ t\ \ldots t\ A_n(x_n) \qquad \forall (x_i, y_i) \in \mathbf{X}_i \times \mathbf{Y}_i$

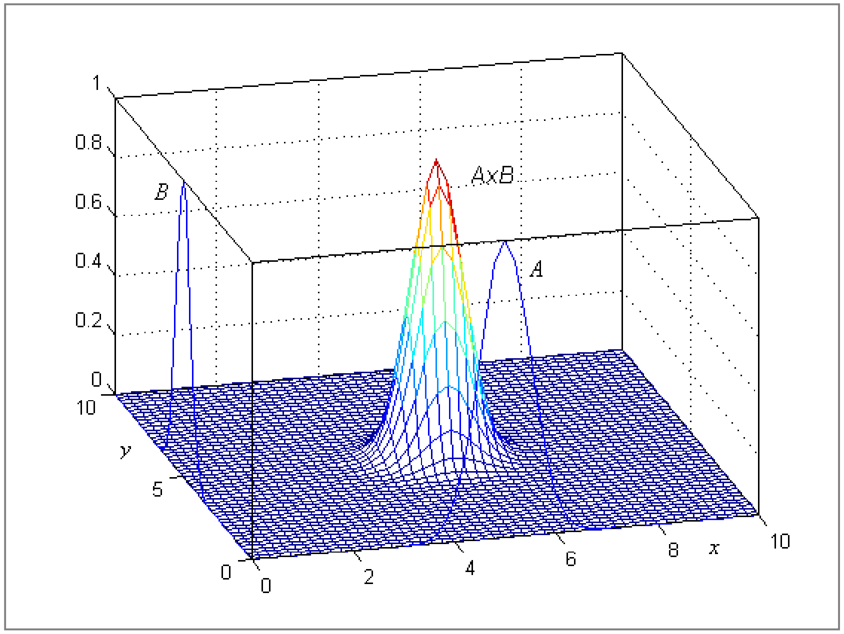
t = t-norma

Exemplo

$A(x) = \exp[-2(x-5)^2]$ $B(y) = \exp[-2(y-5)^2]$ $R = A \times B$



$R(x,y) = \min\{A(x), B(y)\}$



$R(x,y) = A(x)B(y)$

Composição de relações fuzzy

- Composição sup-t

relações fuzzy $G : \mathbf{X}\times\mathbf{Z} \rightarrow [0,1]$ e $W : \mathbf{Z}\times\mathbf{Y} \rightarrow [0,1]$

composição sup-t $R = G \circ W$

$R : \mathbf{X}\times\mathbf{Y} \rightarrow [0,1]$

$$R(x, y) = \sup_{z\in \mathbf{Z}}\{\min[G(x, z)\, t\, W(z, y)\} \qquad \forall (x,y) \in \mathbf{X}\times\mathbf{Y}$$

Exemplo

$$G = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.6 & 0.5 & 0.5 \\ 0.6 & 0.8 & 1.0 & 0.2 \\ 0.8 & 0.3 & 0.4 & 0.3 \end{bmatrix} \qquad W = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.1 \\ 0.5 & 0.7 \\ 0.7 & 0.8 \\ 0.3 & 0.6 \end{bmatrix} \qquad t = \min = \wedge$$

r_{11}= max(1.0$\wedge$0.6, 0.6$\wedge$0.5, 0.5$\wedge$0.7, 0.5$\wedge$0.3) = max (0.6, 0.5, 0.5, 0.3) = 0.6

……………………..……

r_{32}= max(0.8$\wedge$0.1, 0.3$\wedge$0.7, 0.4$\wedge$0.8, 0.3$\wedge$0.6) = max (0.1, 0.3, 0.4, 0.3) = 0.4

$$R = G \circ W = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.6 \\ 0.7 & 0.8 \\ 0.6 & 0.4 \end{bmatrix}$$

- Composição inf-s

relações fuzzy $G : \mathrm{X}\times\mathrm{Z} \rightarrow [0,1]$ e $W : \mathrm{Z}\times\mathrm{Y} \rightarrow [0,1]$

composição inf-s $R = G \bullet W$

$R : \mathrm{X}\times\mathrm{Y} \rightarrow [0,1]$

$$R(x, y) = \inf_{z \in \mathbf{Z}} \{\min[G(x,z)\, s\, W(z,y)\} \qquad \forall (x,y) \in \mathrm{X}\times\mathrm{Y}$$

Exemplo

$$G = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.6 & 0.5 & 0.5 \\ 0.6 & 0.8 & 1.0 & 0.2 \\ 0.8 & 0.3 & 0.4 & 0.3 \end{bmatrix} \qquad W = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.1 \\ 0.5 & 0.7 \\ 0.7 & 0.8 \\ 0.3 & 0.6 \end{bmatrix}$$

s = soma probabilística

r_{11}= min (1.0+0.6-0.6, 0.6+0.5-0.3, 0.5+0.7-0.35, 0.5+0.3-0.15)
= min (1.0, 0.8, 0.85, 0.65) = 0.65

……………………

r_{32}= min (0.8+0.1-0.08, 0.3+0.7-0.21, 0.4+0.8-0.32, 0.3+0.6-01.8)
= min (0.82, 0.79, 0.88, 0.72) = 0.72

$$R = G \bullet W = \begin{bmatrix} 0.65 & 0.80 \\ 0.44 & 064 \\ 0.51 & 0.72 \end{bmatrix}$$

2-Agregação, medida e integral fuzzy

$g : [0,1]^n \rightarrow [0,1]$

1. Monotonicidade:

$$g\,(x_1, x_2,..., x_n) \geq g\,(y_1, y_2,.., y_n) \text{ se } x_i \geq y_i,\ i = 1,.., n$$

2. Condições de contorno:

$$g\,(0, 0,..., 0) = 0$$

$$g\,(1, 1,..., 1) = 1$$

Exemplo: média generalizada

$$g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sqrt[p]{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i)^p}, \; p \in \mathbf{R}, \; p \neq 0$$

$p = 1$ $\quad g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ $\quad$ média aritmética

$p \to 0$ $\quad g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i}$ $\quad$ média geometrica

$p = -1$ $\quad g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} 1/x_i}$ $\quad$ média harmonica

$p \rightarrow -\propto \qquad\qquad g\,(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \min\,(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

$p \rightarrow \ \propto \qquad\qquad g\,(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \max\,(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

Limitantes

$$\min\,(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq g\,(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq \max\,(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

Ordered weighted averaging (OWA)

$$\text{OWA}(A, \mathbf{w}) = \sum_{i=1}^{n} w_i A(x_i)$$

$$\Sigma w_i = 1, \quad w_i \in [0, 1]$$

$$A(x_1) \leq A(x_2) \leq \ldots \leq A(x_n)$$

1. $w = [1, 0,...,0]$ $\quad$ $OWA(A,w) = \min\,(A(x_1), A(x_2),..., A(x_n))$

2. $w = [0, 0,...,1]$ $\quad$ $OWA(A,w) = \max\,(A(x_1), A(x_2),..., A(x_n))$

3. $w = [1/n, 1/n,...,1/n]$ $\quad$ $OWA(A,w)$ = média aritmética

Limitantes

$$\min\,(A(x_1), A(x_2),..., A(x_n)) \leq OWA(A,\mathbf{w}) \leq \max\,(A(x_1), A(x_2),..., A(x_n))$$

Medidas monotônicas (fuzzy)

$g : \Omega \rightarrow [0,1]$

condições de contorno: $g(\varnothing) = 0$

$g(\mathbf{X}) = 1$

monotônica: se $A \subset B$ então $g(A) \leq g(B)$

contínua:

$$A_1 \subset A_2 \subset \cdots \text{em}\, \Omega, \text{se} \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \Omega \text{ então} \lim_{i \to \infty} g(A_i) = g(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i)$$

$$A_1 \supset A_2 \supset \cdots \text{em}\, \Omega, \text{se} \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \Omega \text{ então} \lim_{i \to \infty} g(A_i) = g(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i)$$

Integral fuzzy (Sugeno)

$h : \mathrm{X} \rightarrow [0,1]$ Ω mensurável

integral fuzzy de *h* com relação à *g* sobre *A*

$$\int_A h(x) \circ g(\,) = \sup_{\alpha \in [0,1]} \{\min[\alpha, g(A \cap H_\alpha)]\}$$

$$H_\alpha = \{x \mid h(x) \geq \alpha\}$$

Caso finito

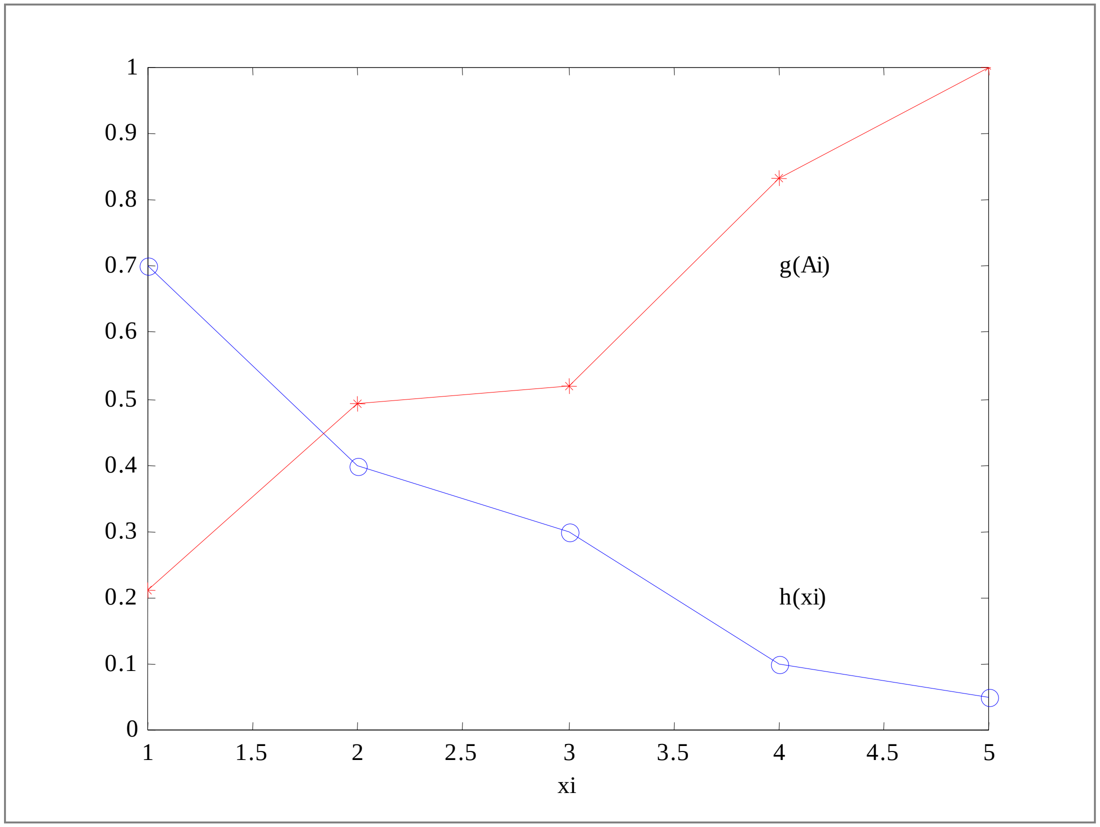
$$\mathbf{X} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$$

$$h(x_1) \geq h(x_2) \geq \ldots\ldots \geq h(x_n)$$

$$A_1 = \{x_1),\ A_2 = \{x_1, x_2),\ \ldots,\ A_n = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} = \mathbf{X}$$

$$\int_A h(x) \circ g(\,) = \max_{i=1,\ldots,n} \{\min[h(x_i), g(A_i)]\}$$

Exemplo



Integral de Choquet

$$(Ch)\int f \circ g = \sum_{i=1}^{n} [h(x_i) - h(x_{i+1})] g(A_i)$$

$$h(x_{n+1}) = 0$$

3-Princípio da extensão (Zadeh)

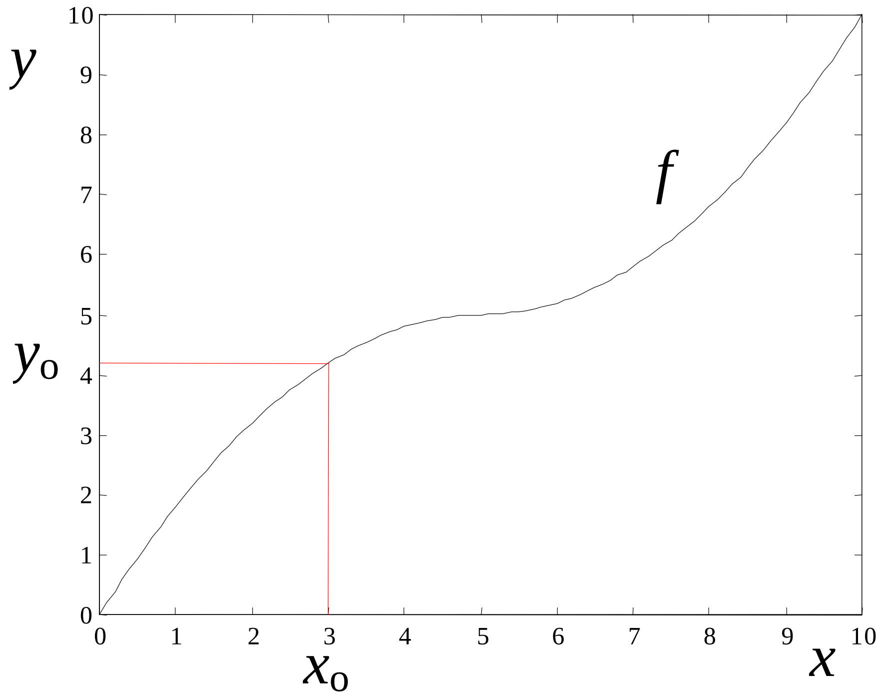
- Estende transformações pontuais em operações com
  - conjuntos
  - conjuntos fuzzy

- Dada a função f: $\mathbf{X} \rightarrow \mathbf{Y}$ e o conjunto (ou conjunto fuzzy) A em $\mathbf{X}$, o princípio da extensão permite mapear A em um conjunto (ou conjunto fuzzy) B em $\mathbf{Y}$ através de f.

$$B(y) = \sup_{\mathbf{x} | y = f(x)} A(x)$$

Transformando um ponto

f : função



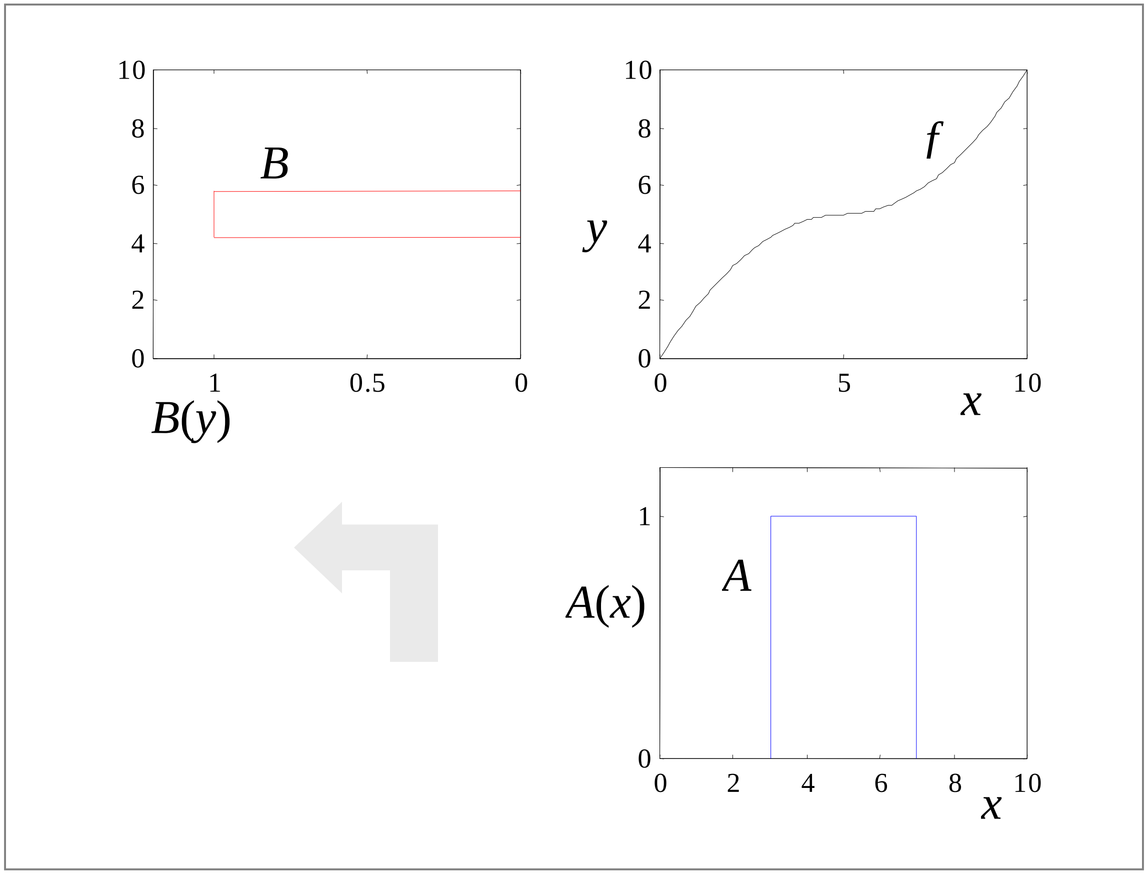
$$f : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{Y}$$

$$y_o = f(x_o)$$

Transformando um intervalo

$$f : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{Y}, \quad A \in P(\mathbf{X})$$

$$B = f(A) = \{\, y \in \mathbf{Y} \mid y = f(x),\ \forall x \in \mathbf{X} \}$$

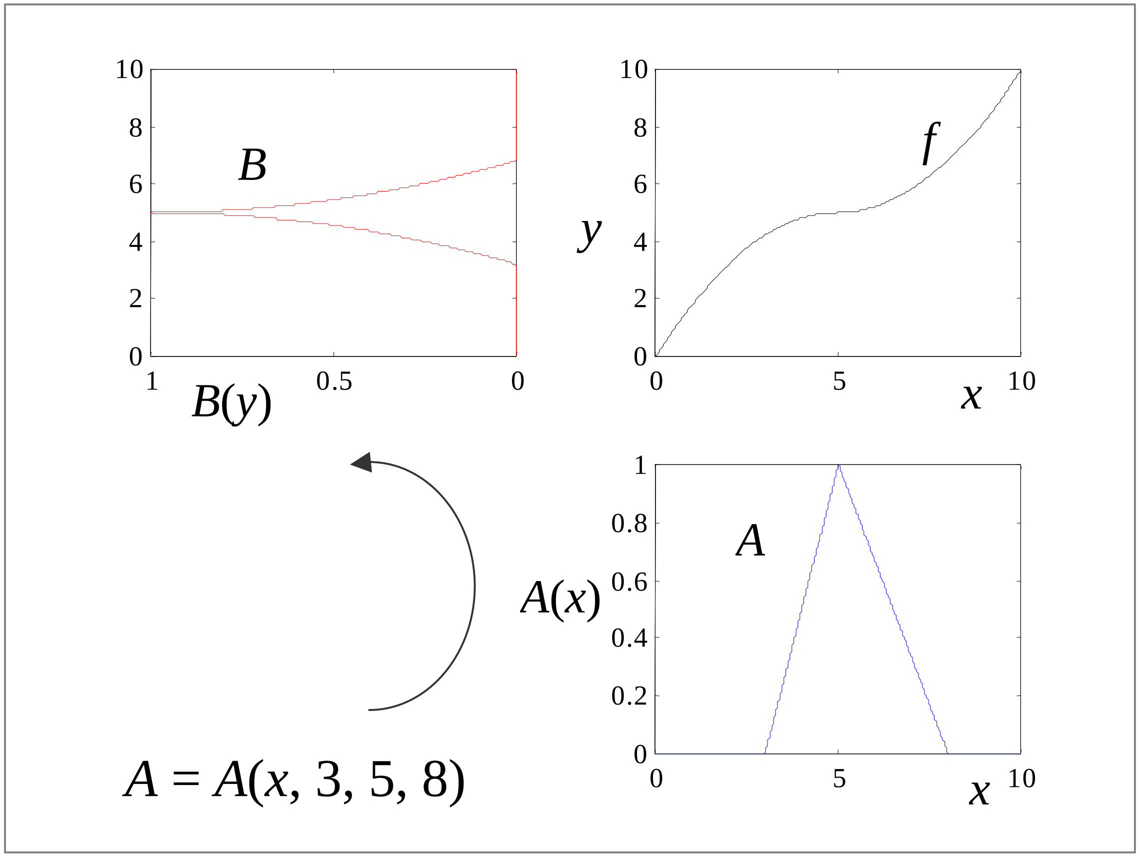


$$B \in P(\mathbf{Y})$$

$$B(y) = \sup_{x \,/\, y = f(x)} A(x)$$

Transformando um conjunto fuzzy

$$f: \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{Y}, \quad A \in F(\mathbf{X}) \quad B = f(A), B \in F(\mathbf{Y})$$



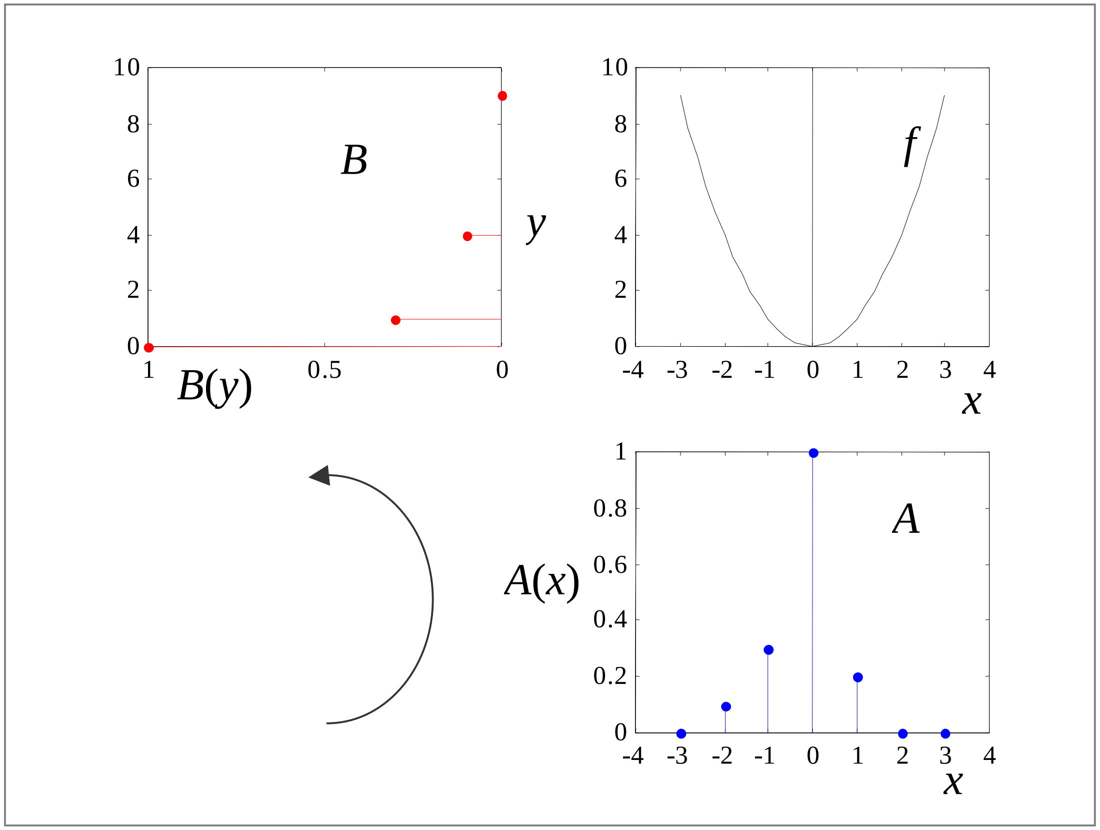
$$B(y) = \sup_{x / y = f(x)} A(x)$$

$$f(x) = \begin{cases} -0.2(x-5)^2 + 5 & \text{if } 0 \leq x \leq 5 \\ 0.2(x-5)^2 + 5 & \text{if } 5 < x \leq 10 \end{cases}$$

Exemplo

$y = f(x) = x^2$

$\mathbf{X} = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\} \quad \mathbf{Y} = \{0, 1, 4, 9\}$



$B = \{1/0, \max(0.2,0.3)/1, \max(0, 0.1)/4, 0/9\} = \{1/0, 0.3/1, 0.1/4, 0/9\}$

Generalização

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2 \times \ldots \times \mathbf{X}_n$$

$$A_i \in F(\mathbf{X}_i),\ \ i = 1,\ldots,n$$

$$y = f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} = [x_1, x_2, \ldots, x_n]$$

$$B(y) = \sup_{\mathbf{x}|y=f(x)} \{\min[A_1(x_1), A_2(x_2), \ldots, A_n(x_n)]\}$$

$$B \in F(\mathbf{Y})$$

Propriedades

1. $B_i = \varnothing \;\; iff \;\; A_i = \varnothing$

2. $A_1 \subseteq A_2 \Rightarrow B_1 \subseteq B_2$

3. $f(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \bigcup_{i=1}^{n} f(A_i) = \bigcup_{i=1}^{n} B_i$

4. $f(\bigcap_{i=1}^{n} A_i) \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} f(A_i) = \bigcap_{i=1}^{n} B_i$

5. $B_\alpha \supseteq f(A_\alpha)$

6. $B_\alpha^+ = f(A_\alpha^+)$

$B^+{}_\alpha = \{ y \in \mathbf{Y} \mid B(y) > \alpha \}$ (α –corte forte)

4-Números fuzzy

- Como modelar/representar parâmetros imprecisos
- Como computar com parâmetros imprecisos
- Números e aritmética fuzzy

L. Zadeh, *Calculus of fuzzy restrictions*, in L. Zadeh, K. Fu, K. Tanaka, M. Shimura (Eds.), Fuzzy Sets and Their Applications to Cognitive and Decision Processes, Academic Press, NY, 1975, pp. 1-39.

D. Dubois, H. Prade, *Fuzzy Sets and Systems*: *Theory and Applications*, Academic Press, NY, 1980.

- Questões sobre aritmética fuzzy
  - sobrestimação: acumulação de fuzziness
  - preservação da forma necessariamente não ocorre
  - propriedades: comutativa, associativa, sub-distributiva
- Consequências para modelagem e aplicações
  - análise, validação e interpretação de modelos imprecisos
  - sobrestimação e preservação de forma $\rightarrow$ resultados não intuitivos
- Matematicamente: aritmética fuzzy está bem desenvolvida

Números e aritmética fuzzy

- Quantidade fuzzy A:$\mathbf{R} \rightarrow [0,1]$ conjunto fuzzy A em $\boldsymbol{R}$ tal que:
  - A é normal
  - suporte de A: Supp$A$ = $\{ x : A(x) > 0 \}$ limitado
  - α–cortes de são intervalos fechados

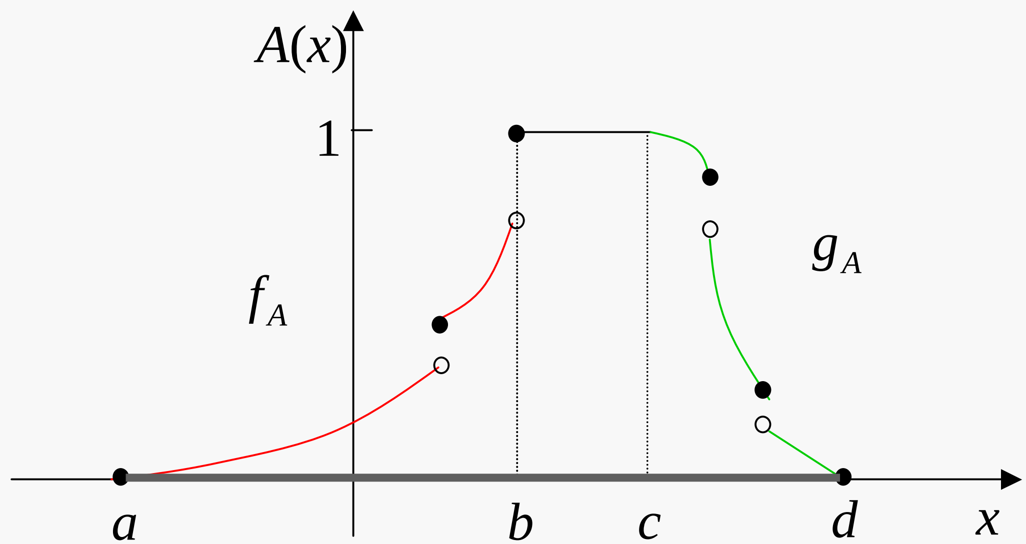
número fuzzy: se $A(x) = 1$ para um único x

intervalo fuzzy: caso contrário

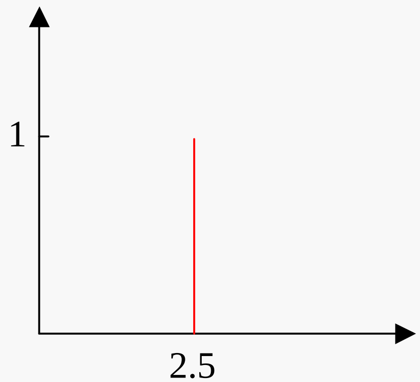
Forma geral de uma quantidade fuzzy

$$A(x) = \begin{cases} f_A(x) & x \in [a,b] \\ 1 & x \in [b,c] \\ g_A(x) & x \in [c,d] \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

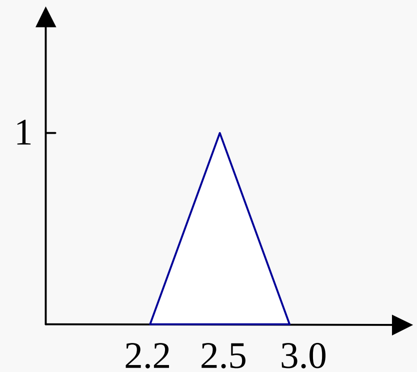
$$[b,c] \neq \phi$$



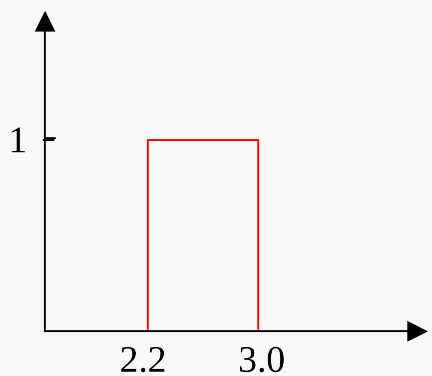
Exemplos



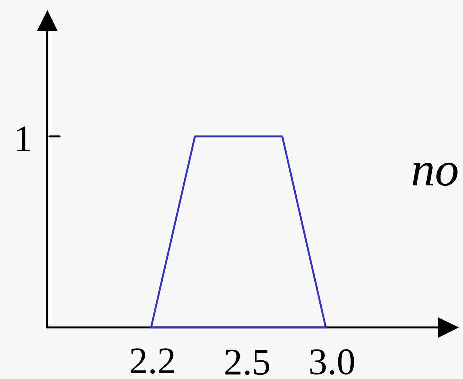
Número real
2.5



Número fuzzy
aprox 2.5



Intervalo real
[2.2, 3.0]



Interalo fuzzy
no entorno [2.2, 3.0]

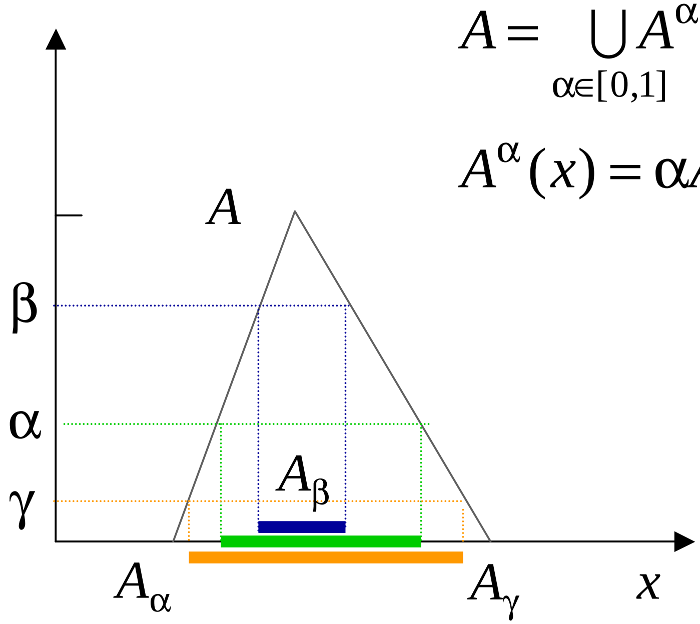
Aritmética fuzzy: abordagens

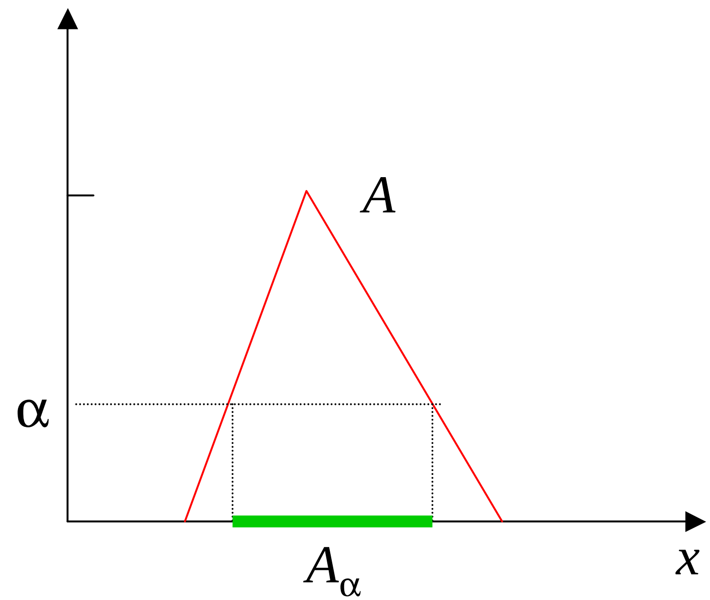
I–Extensão aritmética de intervalos

- α-cortes A^α de conjuntos fuzzy
- teorema da representação

$$A = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} A^\alpha$$

$$A^\alpha(x) = \alpha A_\alpha(x)$$





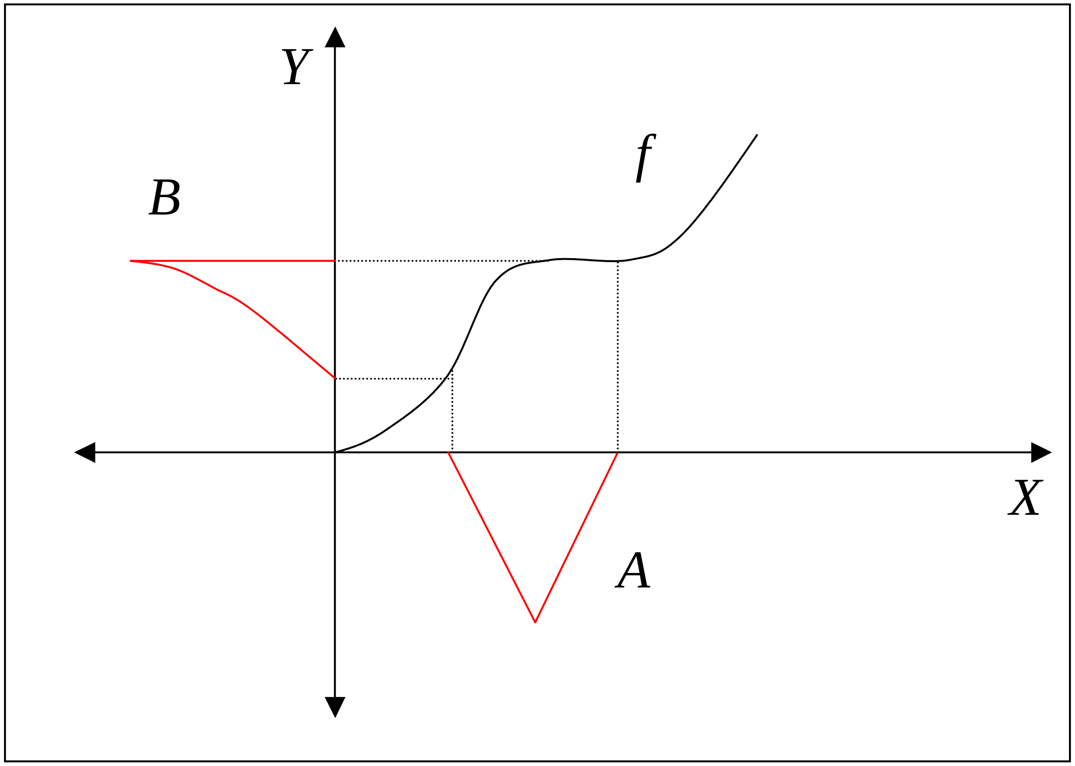
II–Princípio da extensão

$$f : X \to Y$$

$$f : F(X) \to F(Y)$$

$$B = f(A)$$

$$B(y) = \sup_{x / y = f(x)} A(x)$$



I – Aritmética com intervalos

Seja * qualquer uma das operações aritméticas: +, - , . , / . Então

$[a, b] * [d, e] = \{v * w \mid a \leq v \leq b,\ d \leq w \leq e\}$ exceto quando $0 \in [d, e]$

Operações aritméticas com intervalos fechados:

$$[a,b]+[d,e]=[a+d,b+e]$$

$$[a,b]-[d,e]=[a-e,b-d]$$

$$[a,b].[d,e]=[\min(ad,ae,bd,be),\max(ad,ae,bd,be)]$$

$$[a,b]/[d,e]=[a,b].[1/e,1/d]=[\min(a/d,a/e,b/d,b/e),\max(a/d,a/e,b/d,b/e)]$$

$$0 \notin [d,e]$$

Exemplos

$$[2,5]+[1,3]=[3,8]$$

$$[2,5]-[1,3]=[-1,4]$$

$$[-1,1].[-2,-0.5]=[-2,2]$$

$$[-1,1]/[-2,-0.5]=[-2,2]$$

Seja $A=[a_1,a_2]$, $B=[b_1,b_2]$, $C=[c_1,c_2]$, $\mathbf{1}=[1,1]$, $\mathbf{0}=[0,0]$

Propriedades

$1- \ A + B = B + A$

$A.B = B.A$ comutatividade

$2- \ (A + B) + C = A + (B + C)$

$(A.B).C = A.(B.C)$ associatividade

$3- \ A = \mathbf{0} + A = A + \mathbf{0}$

$A = \mathbf{1}.A = A.\mathbf{1}$ identidade

$4 - A.(B + C) \subseteq A.B + A.C$ subdistributividade

$5 -$ Se $b.c \geq 0 \;\; \forall b \in B$ e $\forall c \in C$ então

$A.(B + C) = A.B + A.C$ distributividade

$6 - 0 \in A - A$ e $1 \in A / A$

$7 -$ Se $A \subseteq E$ e $B \subseteq F$ então

$A + B \subseteq E + F$

$A - B \subseteq E - F$

$A.B \subseteq E.F$

$A / B \subseteq E / F$

Aritmética fuzzy

$$(A * B)_\alpha = A_\alpha * B_\alpha = \{x * y \mid (x, y) \in A_\alpha \times B_\alpha\}, \quad \alpha \in (0,1]$$

$$A * B = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} (A * B)_\alpha$$

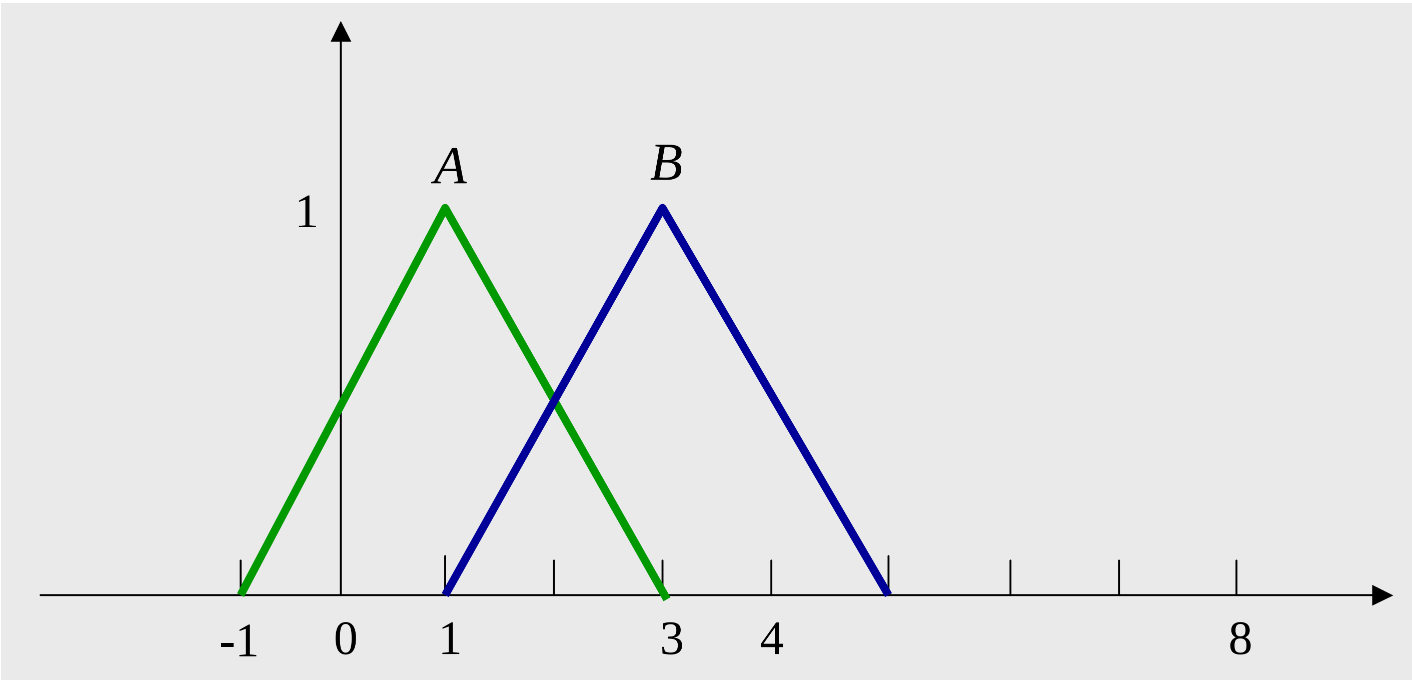
funções de pertinência contínuas

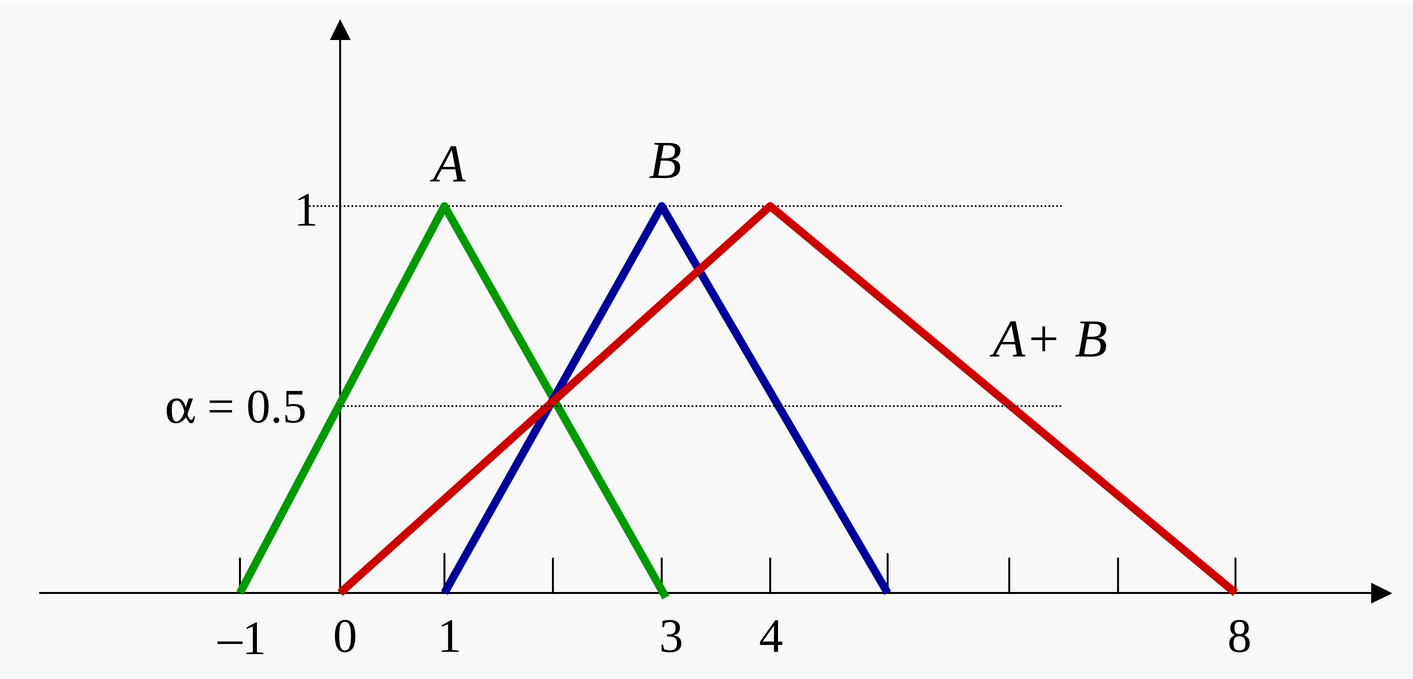
$0 \notin B_\alpha \ \forall \alpha \in (0,1]$ para $* = /$

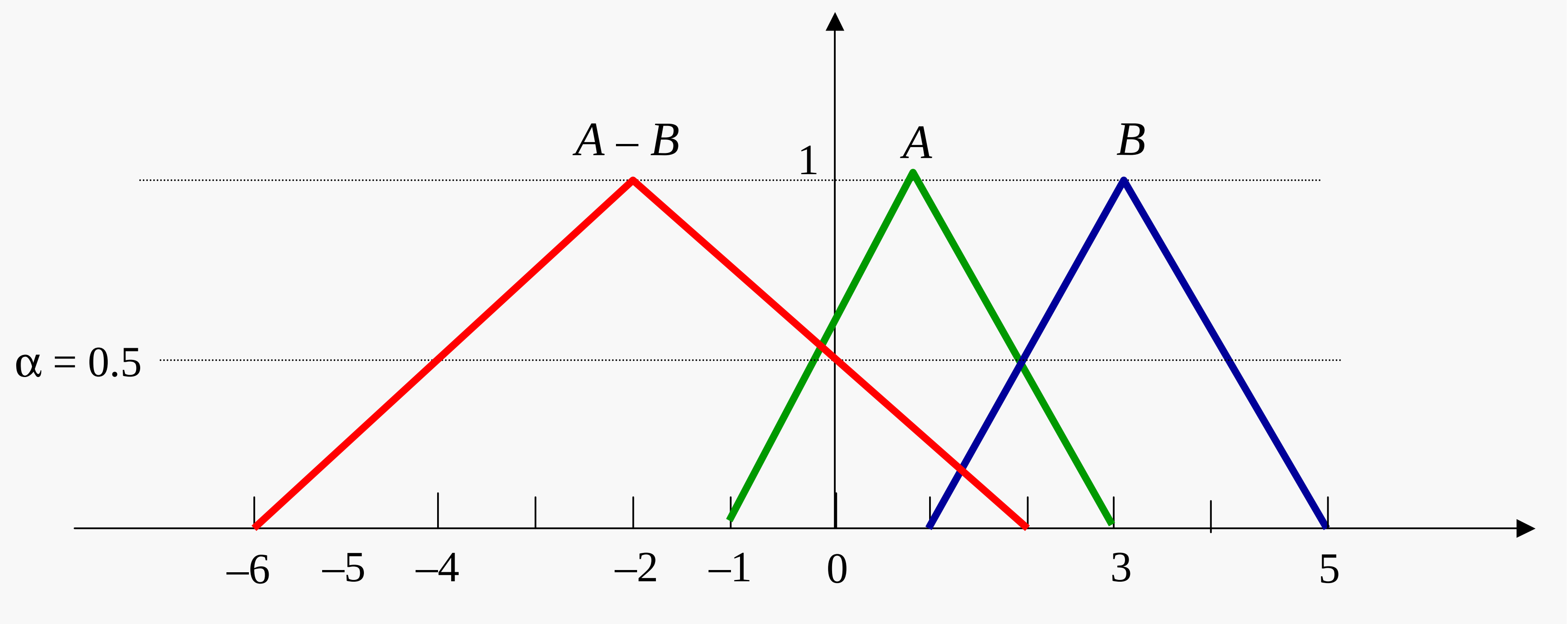
Exemplo

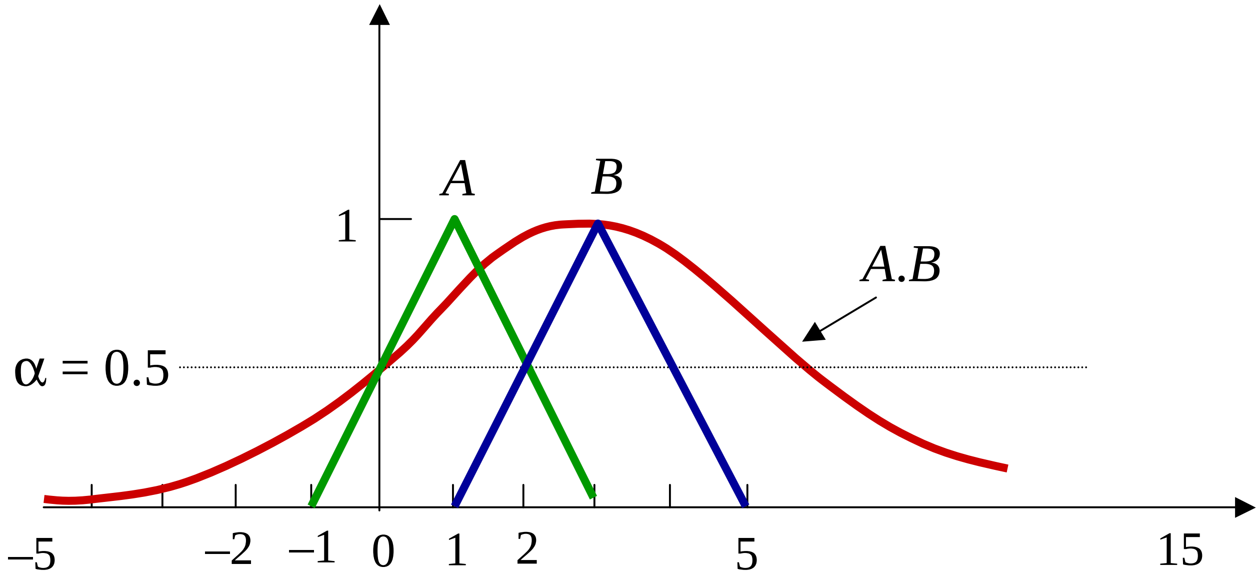
$$A(x) = \begin{cases} 0 & x \le -1\ ;\ x > 3 \\ (x+1)/2 & -1 < x \le 1 \\ (3-x)/2 & 1 < x \le 3 \end{cases} \qquad B(x) = \begin{cases} 0 & x \le 1\ ;\ x > 5 \\ (x-1)/2 & 1 < x \le 3 \\ (5-x)/2 & 3 < x \le 3 \end{cases}$$

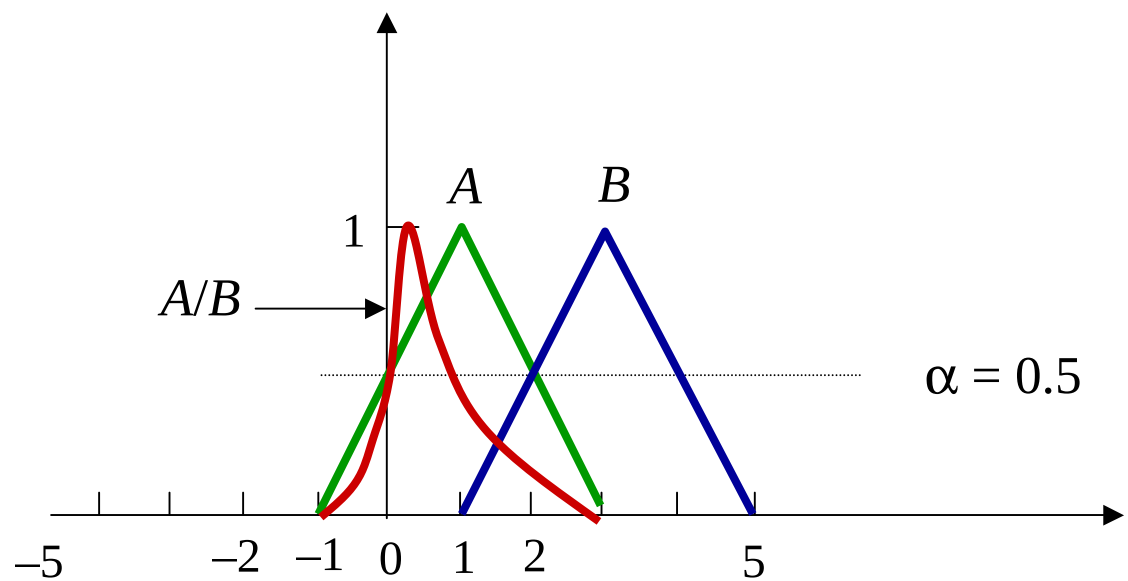
$$A^{\alpha} = [2\alpha - 1,\ 3 - 2\alpha] \qquad B^{\alpha} = [2\alpha + 1,\ 5 - 2\alpha]$$




A
B
1
A+ B
α = 0.5
–1
0
1
3
4
8


A – B
1
A
B
α = 0.5
–6
–5
–4
–2
–1
0
3
5


A
B
1
A.B
α = 0.5
–5
–2
–1
0
1
2
5
15


A
B
1
A/B
α = 0.5
–5
–2
–1
0
1
2
5

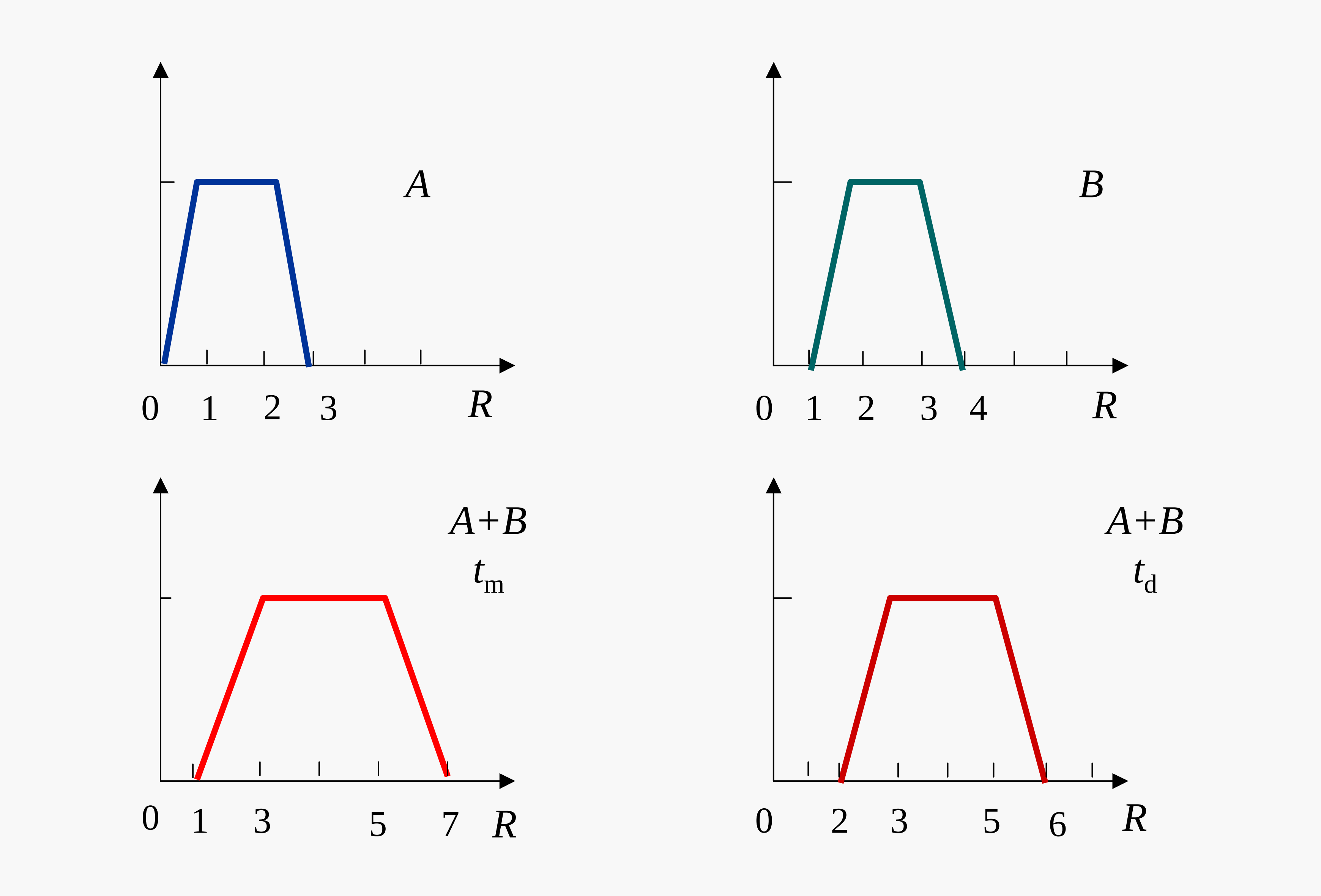
II – Princípio da extensão

$$(A * B)(x) = \sup_{z=x*y} \min[A(x),\ B(y)], \quad \forall z \in R$$

$$(A * B)(x) = \sup_{z=x*y} [A(x)\ t\ B(y)], \qquad \forall z \in R$$

t é uma t-norma

Exemplos



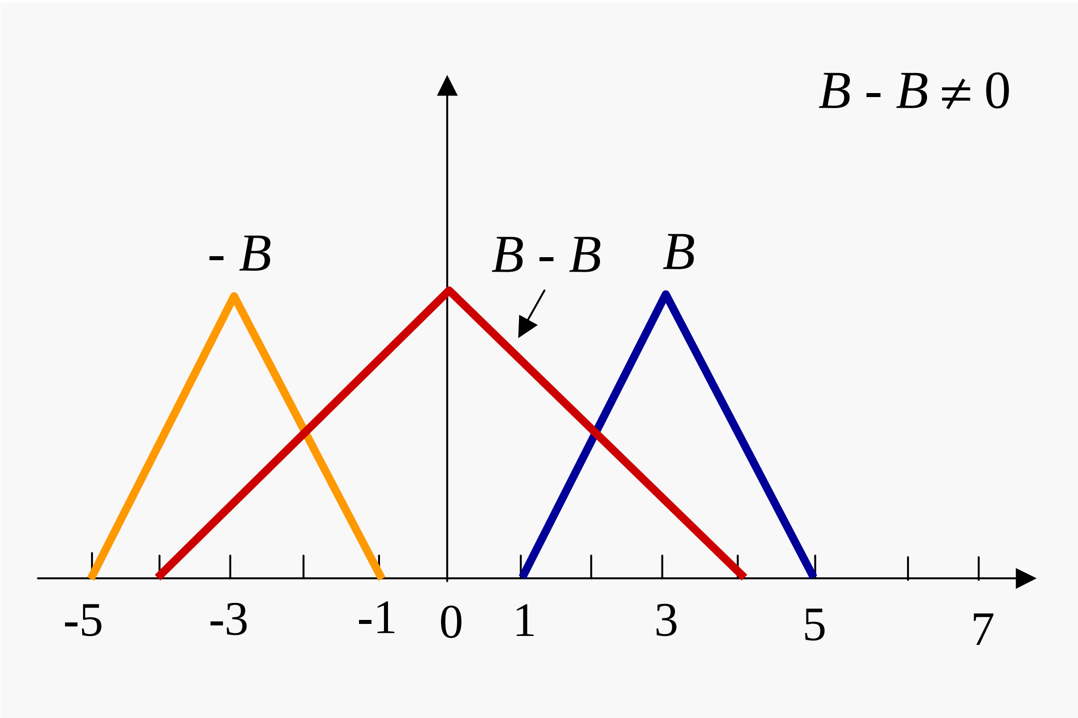
Abordagens alternativas para aritmética fuzzy

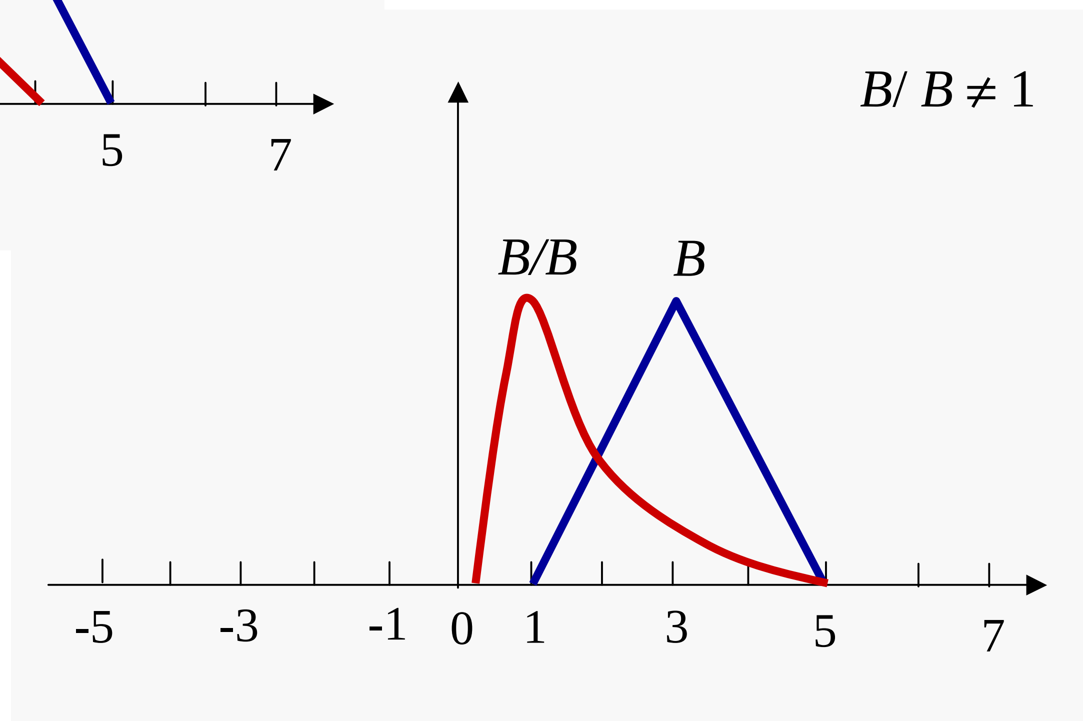
- Requisite constraints (G. Klir, 1997)
- Aritmética fuzzy discreta (M. Hanss, 1999 e 2000)
- Especializações

  V. Kreinovich e W. Pedrycz, 2001

  D. Filev e R. Yager, 1997

Requisite constraints





escolhas de x em A_α e y em B_α não satisfazem restrição de igualdade $x = y$

- Restrições:
  - informações suplementares não contida nos operandos
  - resulta do significado dos operandos ao invés deles própios
  - não são consideradas na aritmética fuzzy padrão

Greater imprecision than justifiable in all computations that involve the requisite equality constraint. Klir, 1997

Aritmética fuzzy com intervalos e restrições

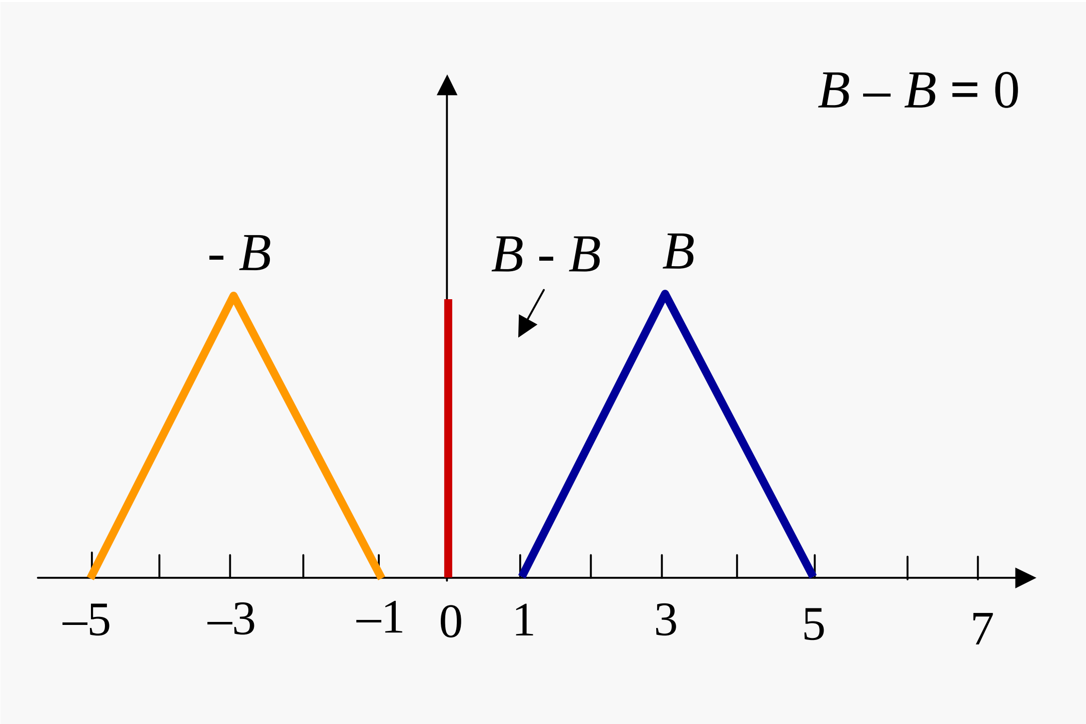
$$(A * B)_{\alpha}^{R} = \{x * y \mid (x, y) \in (A_{\alpha} \times B_{\alpha}) \cap \Re_{\alpha}, \quad \alpha \in (0,1]$$

$$(A * B)^{R} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} (A * B)_{R}^{\alpha}$$

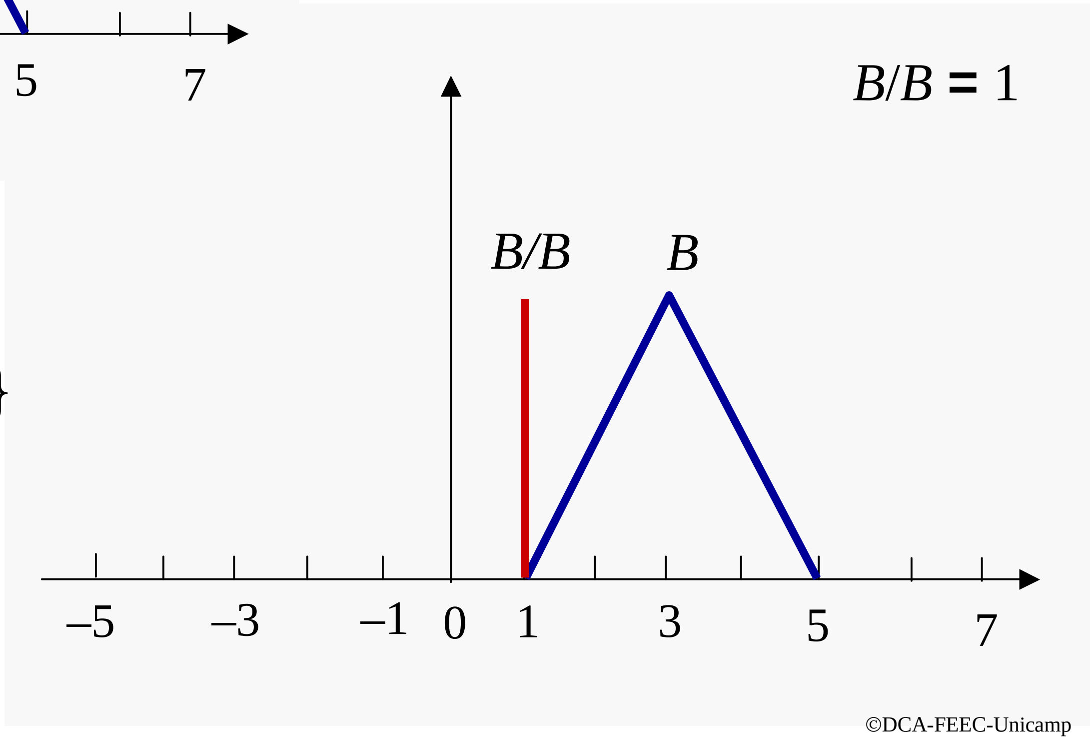
Princípio da extensão com restrições

$$(A * B)^R(x) = \sup_{z=x*y} \min[A(x),\ B(y), \Re(x, y)]$$

$$(A * B)^R(x) = \sup_{z=x*y} \{[A(x)\ t\ B(y)] \wedge \Re(x, y)\}$$



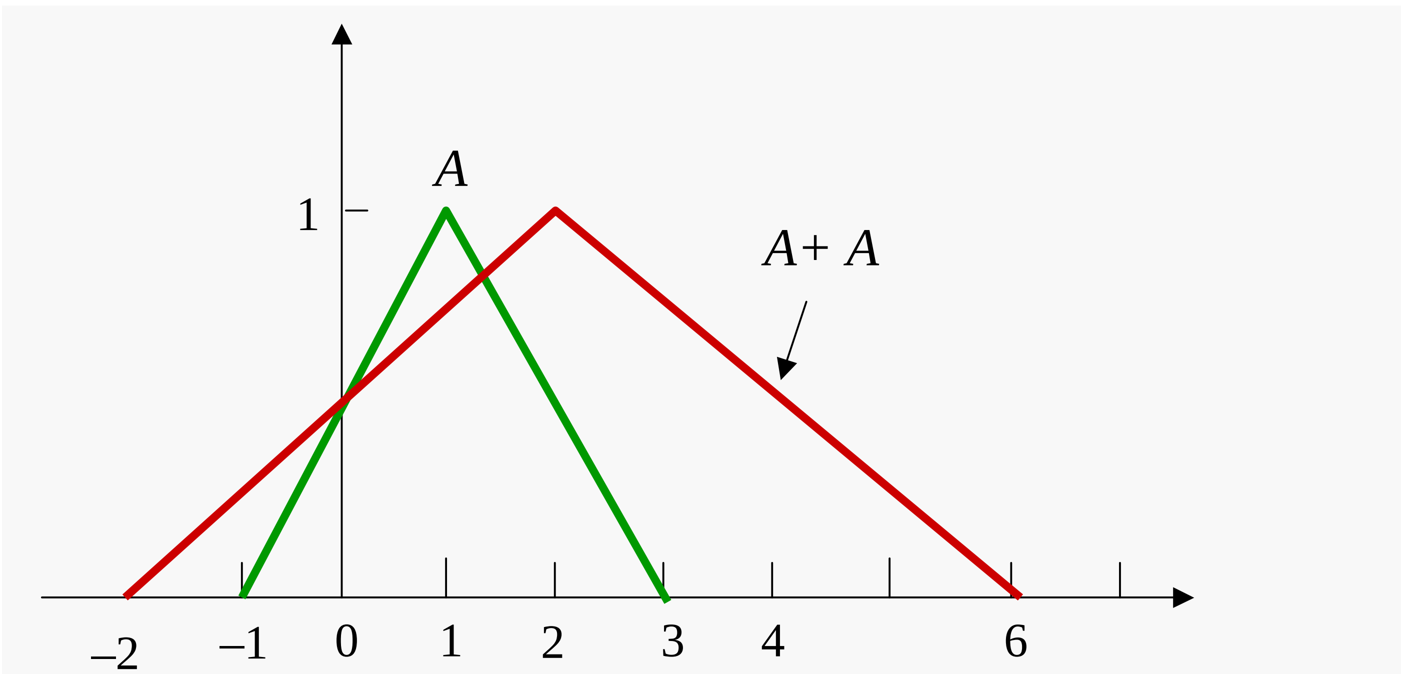
$$(B-B)^{E}_{\alpha} = \{b-b \mid b \in B_{\alpha}\} = 0$$



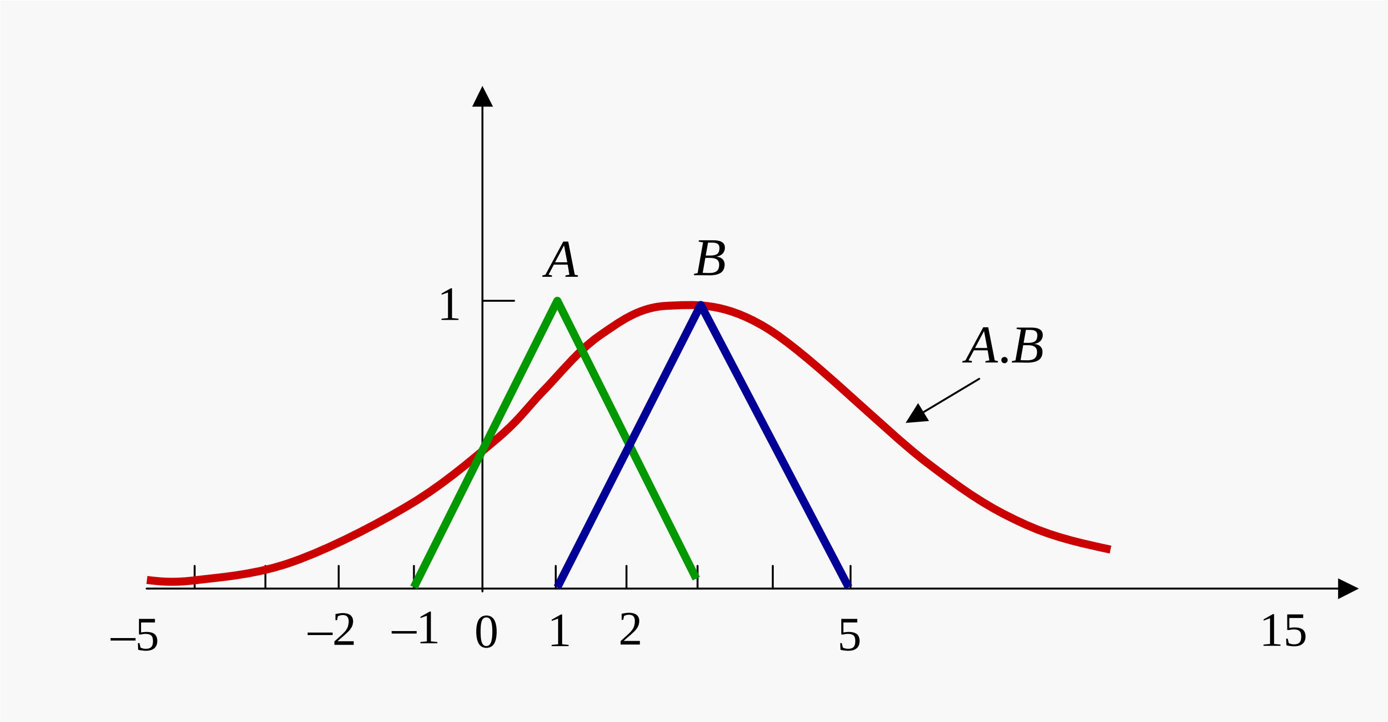
$$(B/B)^{R}_{\alpha} = \{b/b \mid b \in B_{\alpha},\ 0 \notin B_{\alpha}\}$$

$$=1$$

Sobrestimação



Preservação da forma



Referências

1-D. Dubois and H. Prade, Fuzzy Numbers: An Overview. In: J. Bezdek (ed.) Analysis of Fuzzy Information, CRC Press, Boca Raton, 1988, vol. 2, pp. 3-39.

2-G. Klir, Fuzzy Arithmetic with Requisite Constraints. *Fuzzy sets and systems*, **91** (1997) 165-175.

3-M. Hanss, On Implementation of Fuzzy Arithmetical Operations for Engineering Problems. *Proceedings of NAFIPS 1999* (1999) 462-466, New York.

4- M. Hanss, A Nearly Strict Fuzzy Arithmetic for Solving Problems with Uncertainties. *Proceedings of NAFIPS 2000* (2000), 439-443, Atlanta.

5-V. Kreinovich and W. Pedrycz, How to Make Sure that "≈100"+1 is ≈100 in Fuzzy Arithmetic: Solution and its (Inevitable) Drawbacks. *Proceedings of the FUZZ-IEEE* (2001), 1653-1658, Melbourne.

6-D. Filev and R. Yager, Operations on Fuzzy Numbers via Fuzzy Reasoning. *Fuzzy sets and Systems*, **91** (1997) 137-142.

5-Teoria de possibilidade

- Possibilidade e necessidade

Exemplo: base de dados

Nome	a	b	c	d	e
Idade	X_a=[23,26]	X_b=[20,22]	X_c=[30,36]	X_d=[20,23]	X_e=[27,31]

Consulta: pessoas com idade entre 20 e 25 anos ? **Q = [20,25]**

Duas soluções:

$A_{Poss}(Q) = \{i \mid X_i \cap Q \neq \emptyset\} = \{a, b, d\}$ soluções possibilidade

$A_{Nec}(Q) = \{i \mid X_i \subseteq Q\} = \{b, d\}$ soluções necessidade

- Propriedades

$$A_{Nec}(Q) \subseteq A_{Poss}(Q)$$

$$A_{Nec}(Q) = X - A_{Poss}(\overline{Q})$$

- Notar que:

$$A_{Poss}(Q) = \{i \mid \max_{x}[\mathrm{X}_i(x) \wedge Q(x)] = 1\}$$

$$A_{Nec}(Q) = \{i \mid \min_{x}[1 - \mathrm{X}_i(x) \vee Q(x)] = 1\}$$

- Possibilidade: $\exists\, x \in \mathbf{X}\ \{x \in A \ e\ x \in B\}$ max = $\exists$

$$Poss(A, B) = \max_x [A(x) \wedge B(x)] \qquad \text{(Pos)}$$

- Necessidade: $\forall x \in \mathbf{X}\ \{x \in A \rightarrow x \in B\}$ min = $\forall$

$$Nec(A, B) = \min_x [(1 - A(x)) \vee B(x)] \qquad \text{(Nec)}$$

A e B são conjuntos (clássicos)

- Possibilidade e necessidade: conjuntos fuzzy

$$Poss\,(A, B) = \sup_{x} [A(x)\, t\, B(x)]$$

$$Nec\,(A, B) = \inf_{x}\, [A(x) \rightarrow B(x)]$$

A e B são conjuntos fuzzy

t = min e $a \rightarrow b = \overline{a} \vee b \equiv \max\{(1 - a), b\}$ em (Pos) e (Nec)

Medida de Possibilidade/Necessidade

- Monotonicidade de medidas fuzzy

$$A \subseteq B \Rightarrow g(A) \leq g(B) \quad \forall A, B \in \Omega$$

$$\Downarrow$$

$$g(A \cup B) \geq \max[g(A), g(B)] \qquad (\Pi)$$

$$g(A \cap B) \geq \min[g(A), g(B)] \qquad (\text{N})$$

- Medida de possibilidade: caso limite (Π), Zadeh 1978

$$g(A \cup B) = \max[g(A), g(B)]$$

$$\Pi(A \cup B) = \max[\Pi(A), \Pi(B)]$$

- Medida de necessidade: caso limite (N), Dubois & Prade, 1985

$$g(A \cap B) = \min[g(A), g(B)]$$

$$N(A \cap B) = \min[N(A), N(B)]$$

- Função distribuição de possibilidade

$$\pi : \Omega \rightarrow [0,1]$$

$$\exists \omega \mid \pi(\omega) = 1$$

$$\pi(\omega) = \Pi(\{\omega\})$$ se Π é definida

$$\Pi(A) = \sup_{\omega \in A} \pi(\omega)$$ se π é definida

- Relações entre medida de possibilidade e necessidade

$$\Pi(A) = 1 - N(\overline{A})$$

$$N(A) > 0 \Rightarrow \Pi(A) = 1$$

$$\Pi(A) < 1 \Rightarrow N(A) = 0$$

$$N(A) + N(\overline{A}) \leq 1$$

$$\Pi(A) + \Pi(\overline{A}) \geq 1$$

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1$$

Observação