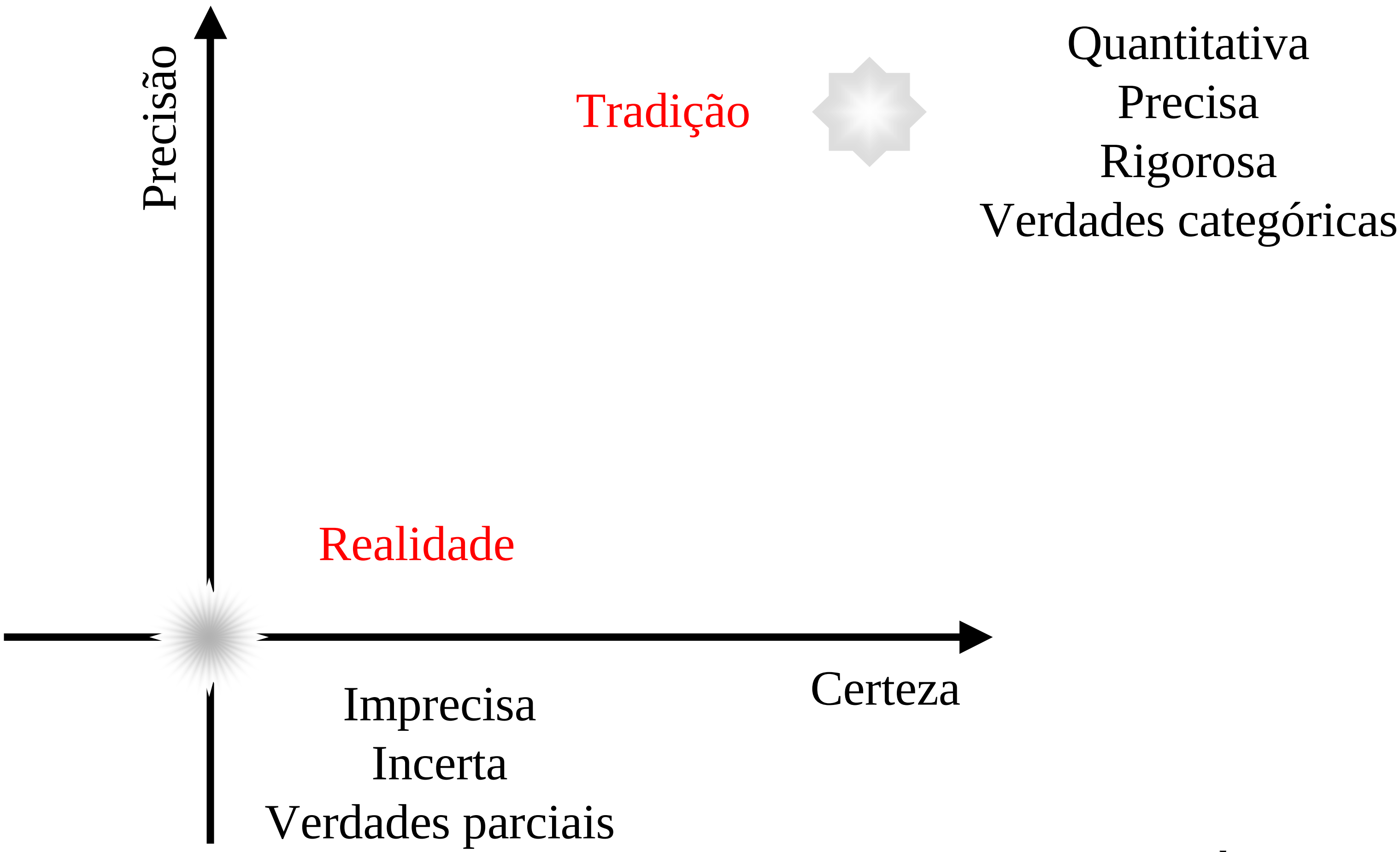
3-Fundamentos Matemáticos I

Conteúdo

1-Introdução

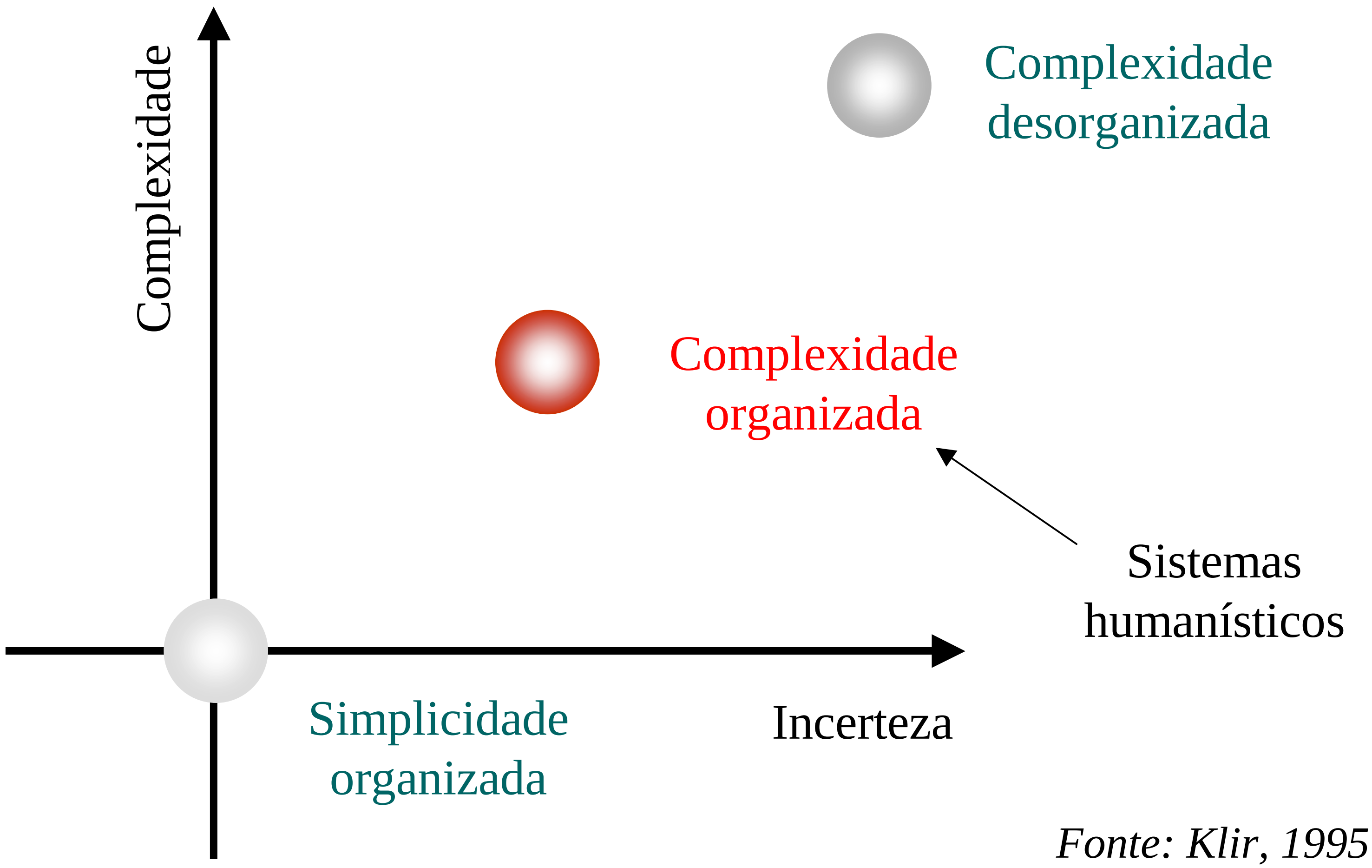
- Ciência, tradição, complexidade e precisão
- Breve história
- Conjuntos e conjuntos fuzzy
- Operações e operadores
- Variáveis linguísticas
- Relações fuzzy

Ciência, tradição e realidade



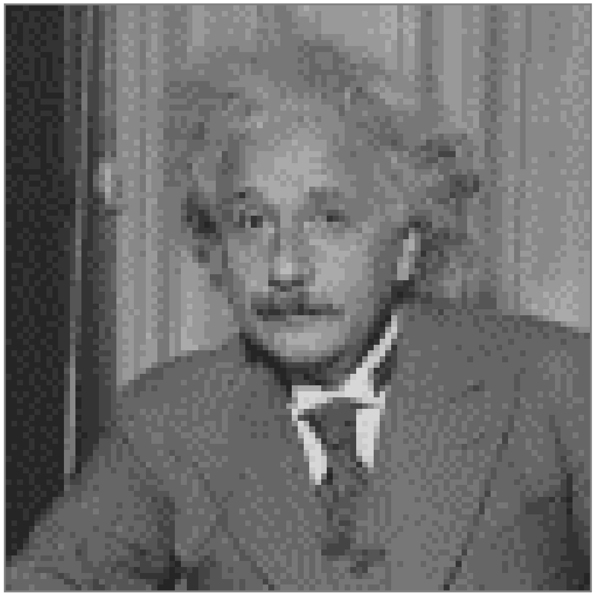
Fonte: Klir, 1995

Ciência e complexidade (Warren Weaver, 1948)



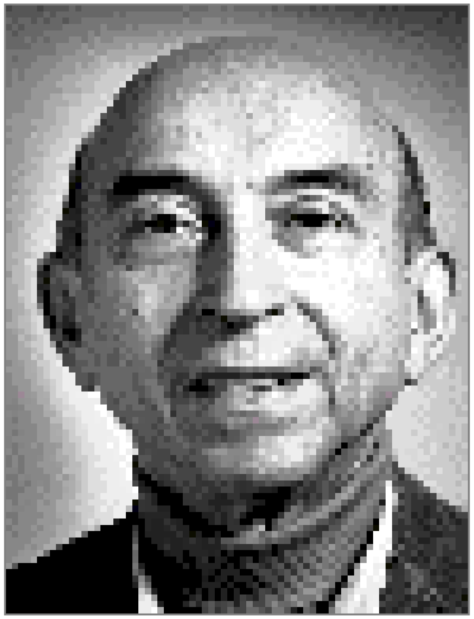
Fonte: Klir, 1995

Ciência e incerteza (Einstein, 1928)



"As far as the propositions of mathematics refer to reality, they are not certain; and as far as they are certain, they do not refer to reality".

Princípio da incompatibilidade (Zadeh, 1973)

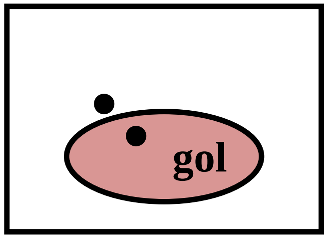


"Stated informally, the essence of this principle is that as the complexity of a system increases, our ability to make precise and yet significant statements about its behavior diminishes until a threshold is reached beyond which precision and significance (or relevance) become almost mutually exclusive characteristics."

Incerteza e imprecisão

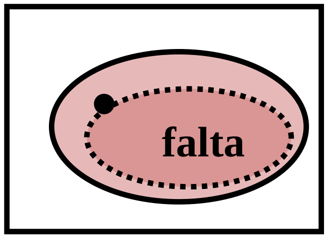
“O gol em Wembley de fato foi um gol.”
(Inglaterra × Alemanha, final 1966)

… incerta mas ou falsa ou verdadeira



“Falta do Adriano”

....veracidade imprecisa,
“falta” é um conceito impreciso



Exemplo: Problema do caixeiro viajante

Número	Precisão	Tempo
Cidades	(%)	Computação
100.000	1	2 dias
100.000	0.75	sete meses
1.000.000	3,5	3,5 horas

Fonte: New York Times, 12/03/91

Modelos, realidade e utilidade (Klir, 1995)

"Although usually (but not always) undesirable when considered alone, uncertainty becomes very valuable when considered in connection to the other characteristics of systems models: in general, allowing more uncertainty tends to reduce complexity and increase credibility of the resulting model."

Conjuntos

- Classificam objetos em conceitos gerais:
  - números pares
  - cidades que são capitais
  - carros esportes
  - números impares
  - times de futebol
  - ....

Conjuntos ?????

- *grandes* cidades da América do Sul
- *baixa* temperatura
- *alta* taxa de inflação

- *pequeno* erro de aproximação
- *rápida* resposta de um sistema dinâmico
- *mal condicionamento* de um sistema de equações lineares

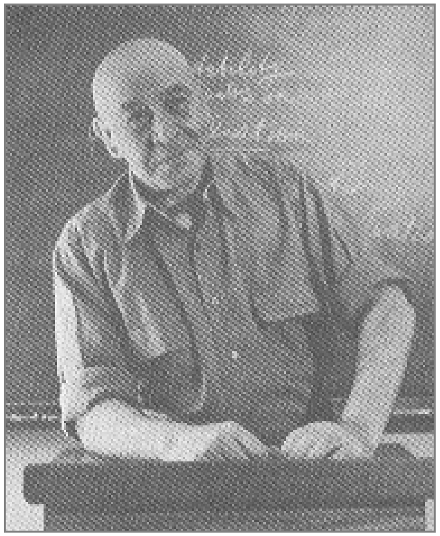
Problema da dicotomia

"One seed does not constitute a pile nor two nor three… from the other side everybody will agree that 100 million seeds constitute a pile. What therefore is the appropriate limit? Can we say that 325 647 seeds don't consitute a pile but 325 648 do?" [Borel, 1950]

Jan Lukasiewicz (~1920)

true (0)
false (1)
don’t know (1/2)

Visão não Aristotélica (Korzybski, 1933)



"..in analyzing the Aristotelian codification, I had to deal with the two-valued, "either-or" type of orientation. In living, many issues are not so sharp, and therefore a system that posits the general sharpness of "either-or" and so objectifies "kind", is unduly limited; it must be revised and more flexible in terms of "degree"…"

Conjuntos fuzzy e lógica fuzzy

- Lógica fuzzy: sobre o significado do termo
  - sentido restrito: sistema lógico que visa o raciocínio aproximado
  - sentido amplo: teoria de conjuntos nebulosos

Lógica fuzzy

- Lógica fuzzy: sistema lógico que formaliza o raciocínio aproximado
  - – variáveis linguísticas
  - – formas canônicas
  - – regras se-então
  - – quantificadores nebulosos
  - – raciocíonio interpolativo, silogismo, disposicional
- Estes itens não são comuns em lógicas multivalores

Paradoxo do barbeiro (Russell)

"I shave all, and only, those man who don´t shave themselves"

$$T(S) = T(\neg S)$$

$$T(\neg S) = 1 - T(S)$$

Teoria de conjuntos fuzzy

- Conjuntos fuzzy: classes cujos limites não são bem delimitados

  – aritmética fuzzy
  – programação matemática fuzzy
  – topologia fuzzy
  – grafos fuzzy
  – análise fuzzy de dados
  – fuzzificação de teorias clássicas

- A teoria de conjuntos fuzzy *inclui* a lógica nebulosa

Breve história

1920: J. Lukasiewicz, E. Post (three-valued and many valued logic)

1965: L. A. Zadeh (fuzzy sets)

1972: M. Sugeno (fuzzy measures)

1974: E.H. Mamdani (fuzzy controller)

1982: primeira aplicação industrial em operação, Dinamarca

1986: controlador trem metro da Hitachi

1987: aplicações em comerciais e industriais no Japão

1990: aplicações industriais e comerciais no mundo

1994: inteligência computacional

1995: 30 anos, IFSA World Congress, São Paulo, Brasil

1998: L. A. Zadeh computação granular

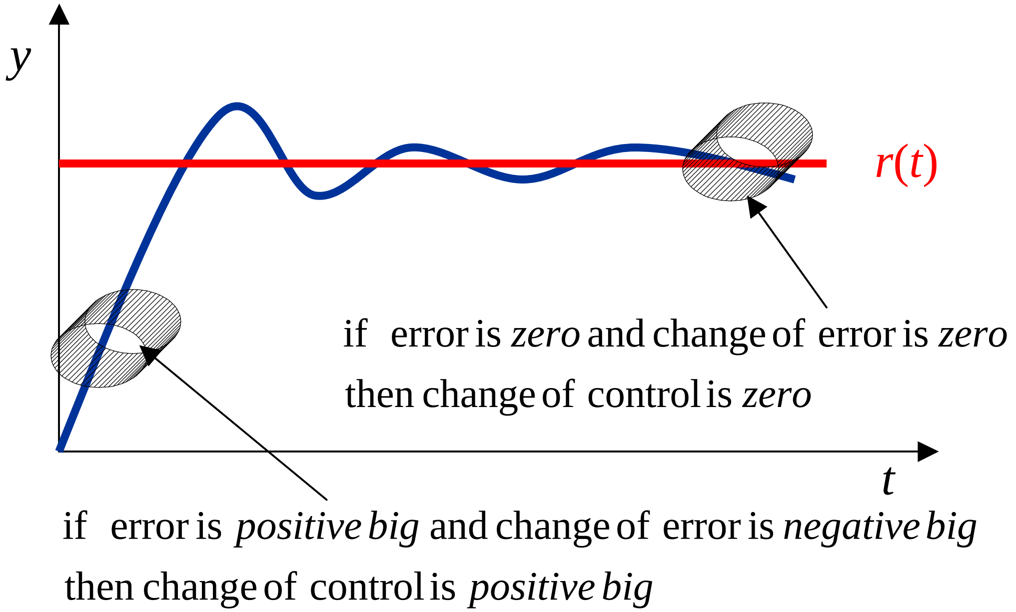
2005: L. A. Zadeh computação com *linguagem natural*

Medida (integral) de Sugeno (1972)

$g : \Omega \to [0,1]$

$g(\varnothing) = 0$
$g(\mathbf{X}) = 1$
se $A \subset B$ então $g(A) \leq g(B)$

Controle fuzzy (Mamdani, 1974)



Inteligência computational × Computação flexível

Lógica e conjuntos fuzzy
Imprecisão

Computação flexível

Redes neurais
Aprendizagem

Raciocínio probabilístico
Incerteza

Computação clássica $\times$ Computação flexível

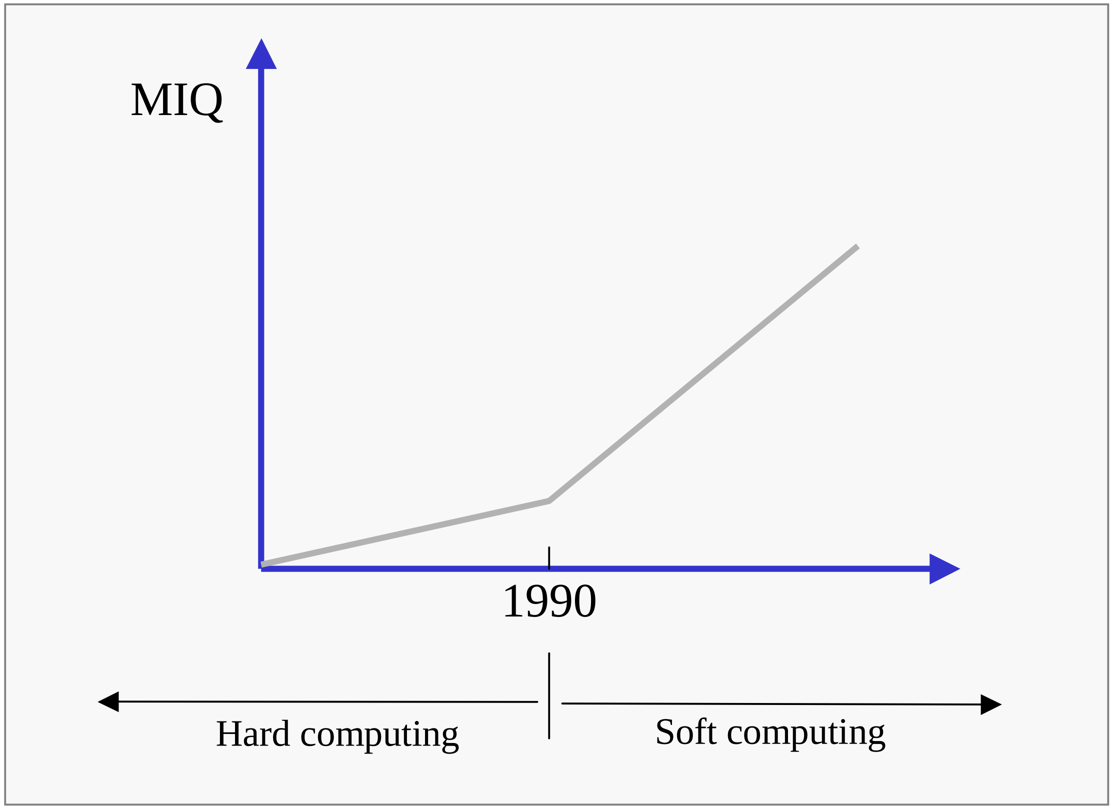
- Computação clássica
  - – visão clássica da computação
  - – imprecisão e incerteza são indesejáveis

- Computação flexível

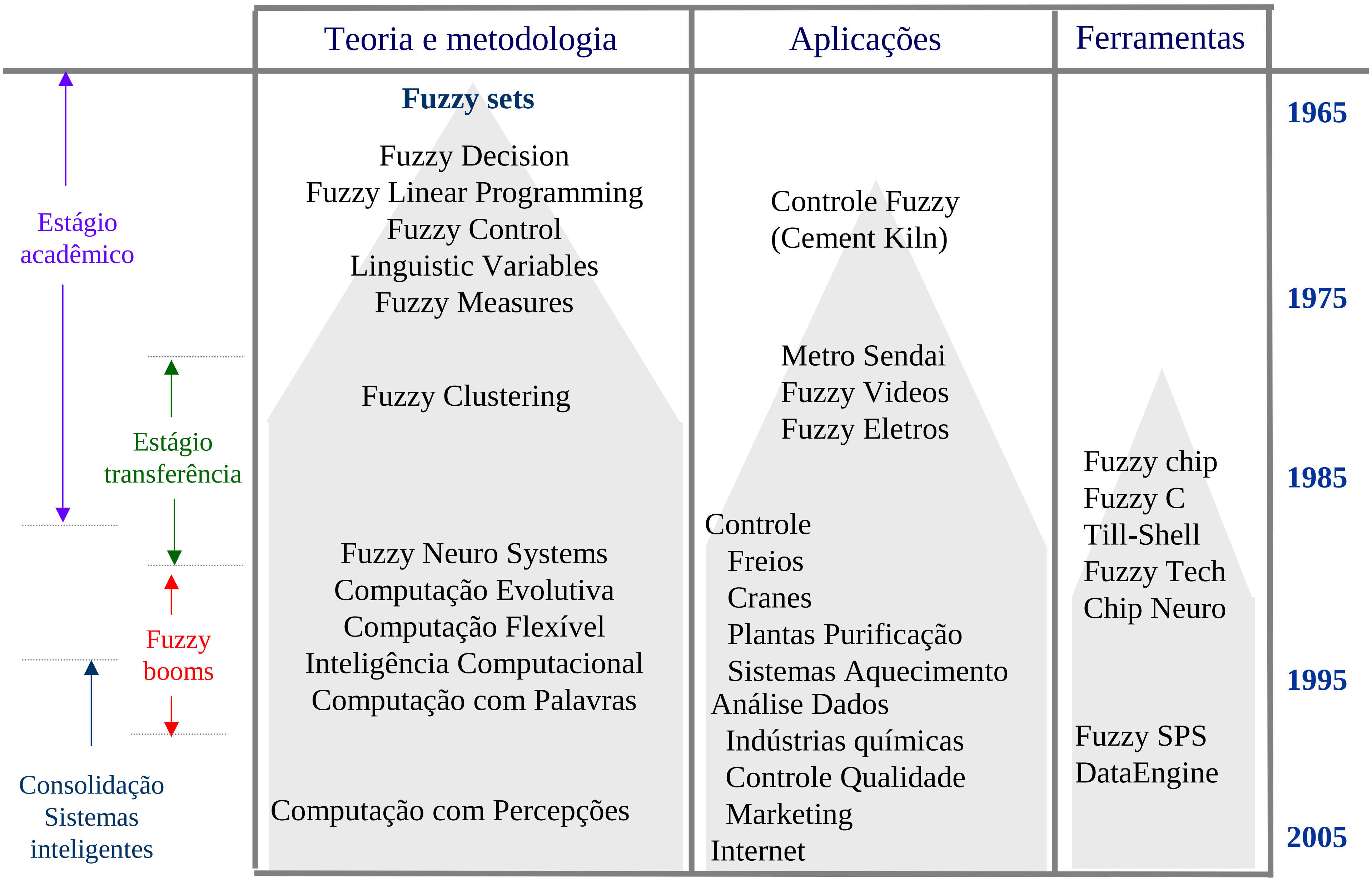
  – explora a tolerância à imprecisão e incerteza para obter

    - tratabilidade
    - robustez
    - baixo custo
    - alto MIQ
    - economia de comunicação

Computação clássica × Computação flexível



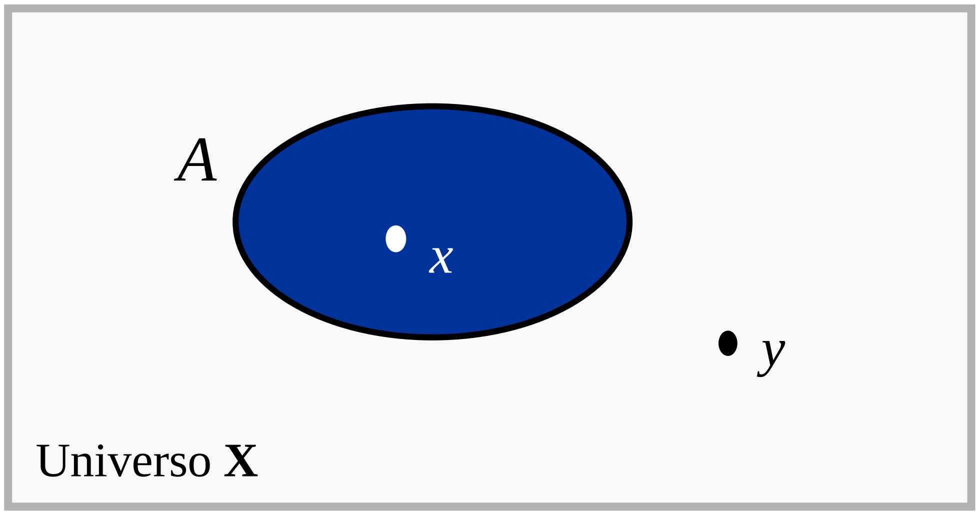
Evolução sistemas fuzzy



Fonte: Zimmermann, 1999

2-Conjuntos fuzzy

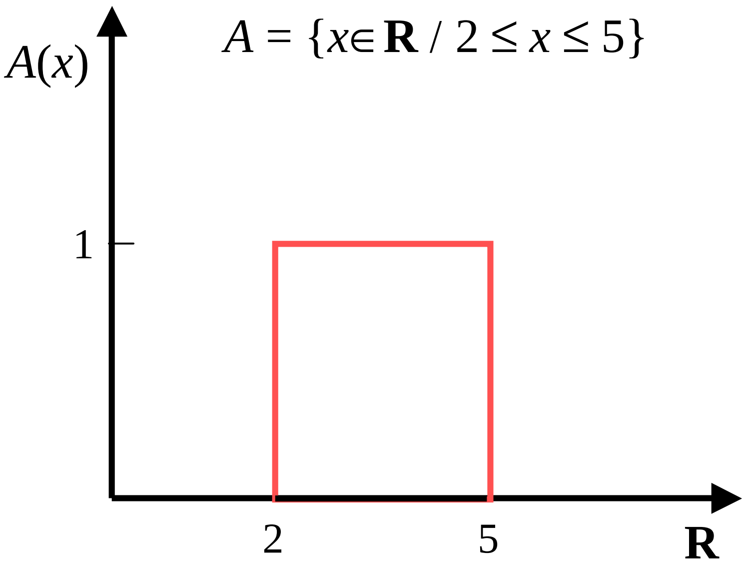
- Conjuntos

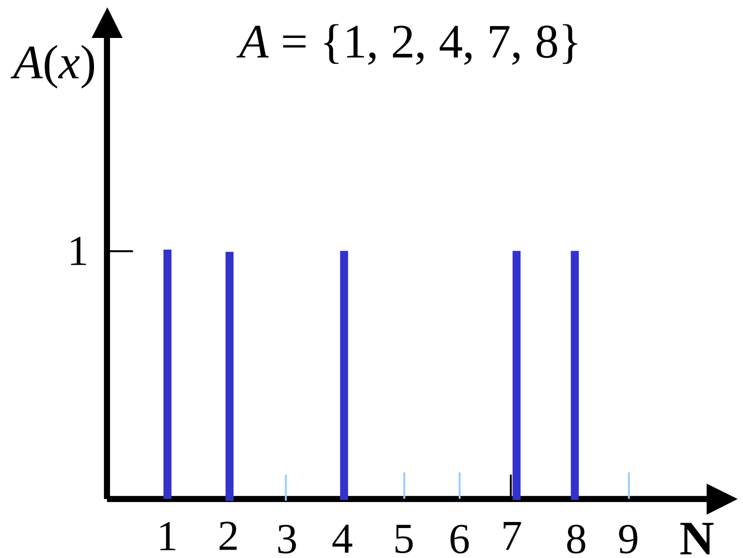


$x \in A$

$y \notin A$

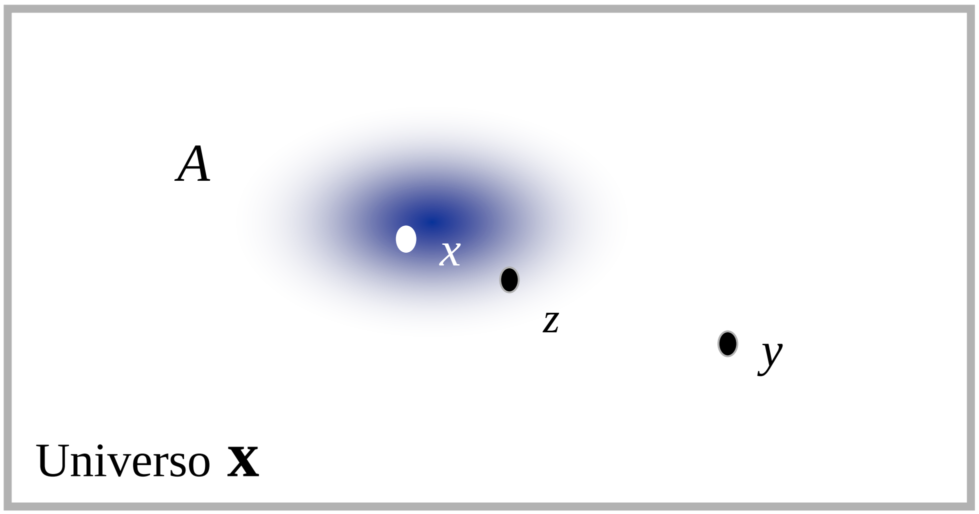
Função característica (indicadora)



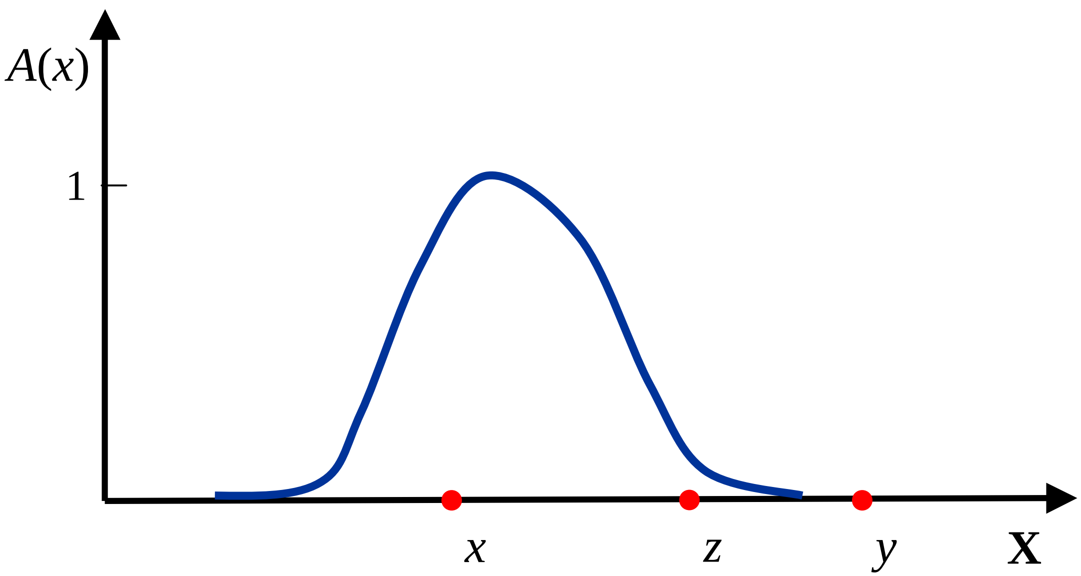


$A: \mathbf{X} \rightarrow \{0, 1\}$ $\qquad A(x) = \begin{cases} 1 \text{ if } & x \in A \\ 0 \text{ if } & x \notin A \end{cases}$

- Conjunto fuzzy



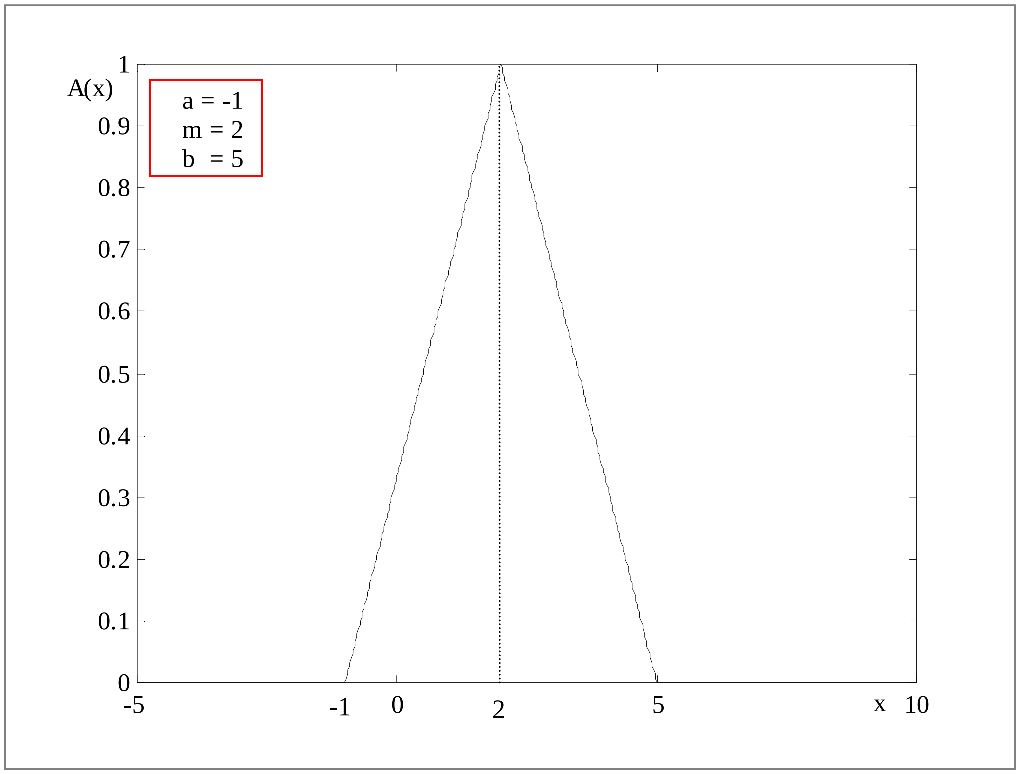
Função de pertinência



$$A: \mathbf{X} \rightarrow [0, 1]$$

Exemplos

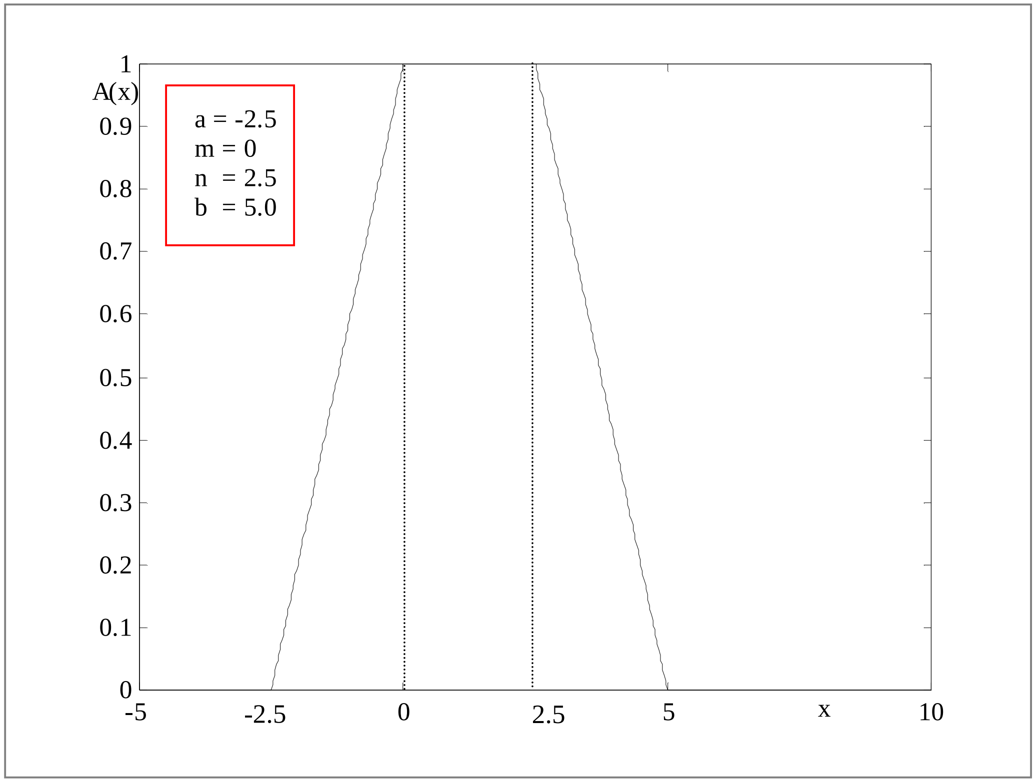
- Triangular



$$A(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } \; x < a \\ \dfrac{x-a}{m-a} & \text{if } \; x \in [a,m) \\ \dfrac{b-x}{b-m} & \text{if } \; x \in [m,b] \\ 0 & \text{if } \; x > b \end{cases}$$

$$A(x,a,m,b) = \max\{\min[(x-a\}/(m-a),(b-x)/(b-m)],0\}$$

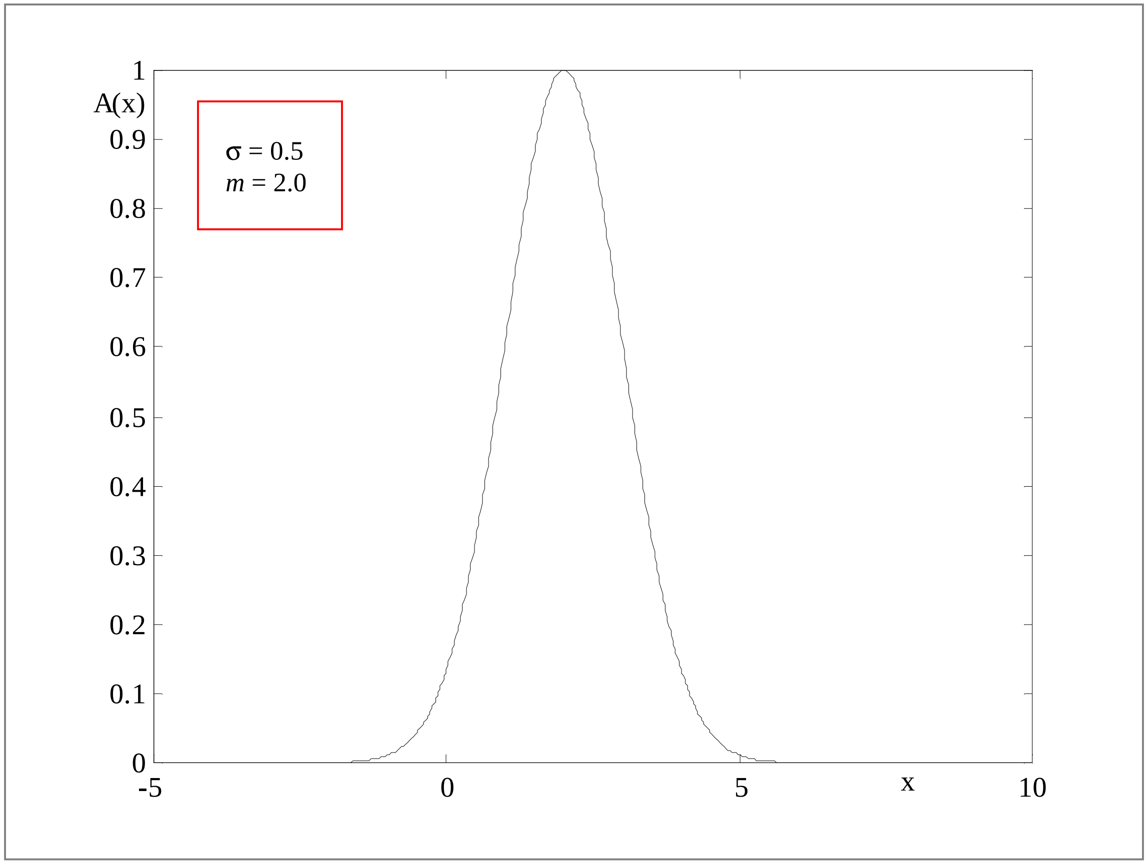
- Trapezoidal



$$A(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x < a \\ \dfrac{x-a}{m-a} & \text{if } x \in [a, m) \\ 1 & \text{if } x \in [m, n) \\ \dfrac{b-x}{b-n} & \text{if } x \in [n, b] \\ 0 & \text{if } x > b \end{cases}$$

$$A(x, a, m, n, b) = \max\{\min[(x-a\} /(m-a), 1, (b-x)/(b-n)], 0\}$$

- Gaussiana



$$A(x) = \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{\sigma^2}\right)$$

Grau de pertinência: semântica

- Similaridade: grau de compatibilidade

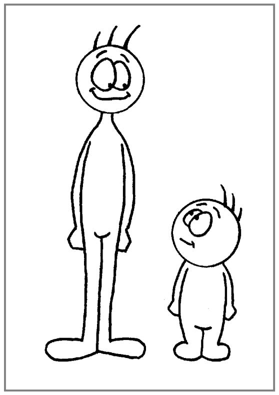
  (análise processamento de dados)
- Incerteza: possibilidade

  (raciocínio sob incerteza)
- Preferência: grau de satisfação

  (decisão, otimização)

Fuzziness ≠ Probabilidade

João é alto



A: $\mathbf{X} \rightarrow [0,1]$

$\mathbf{X}$: universo (conjunto)

A: função de pertinência

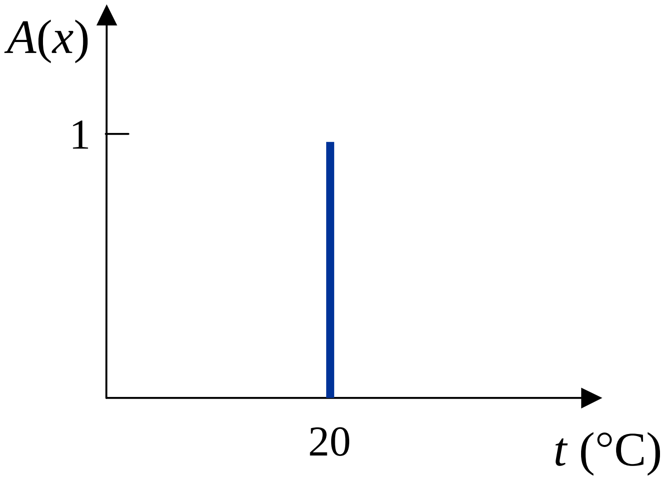
Cara ou coroa?

$P(A)$: $\mathbf{F} \rightarrow [0,1]$

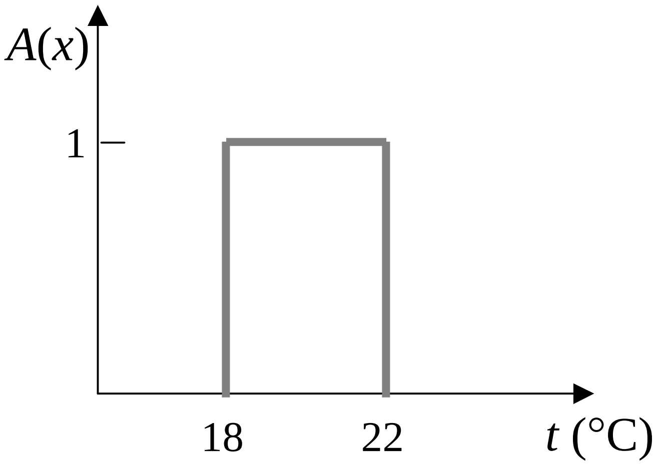
P: função (argumento é $A \in \mathbf{F}$)

$\mathbf{F}$: σ-algebra de $\mathbf{X}$

Exemplo: temperatura $t = \sim 20$ °C

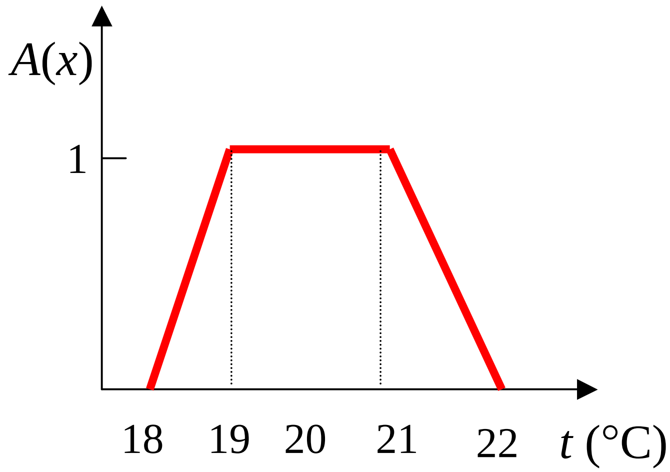


número
(conjunto unitário)



intervalo
(conjunto)

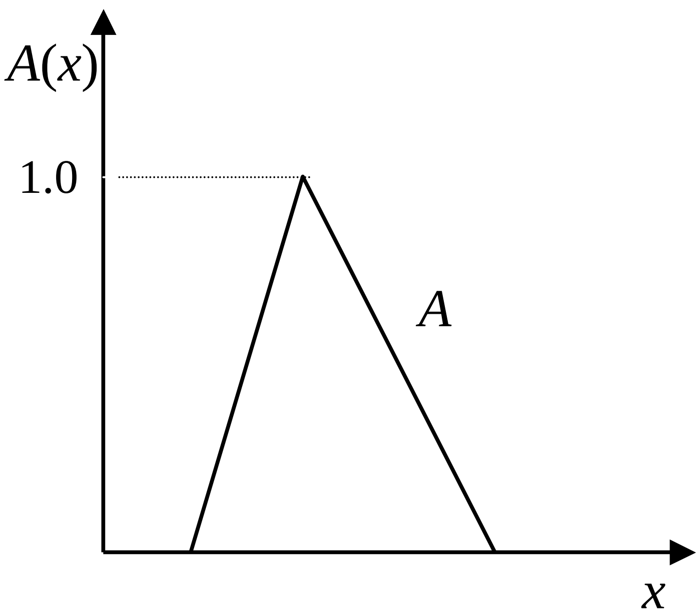
Exemplo: temperatura $t = \sim 20$ °C



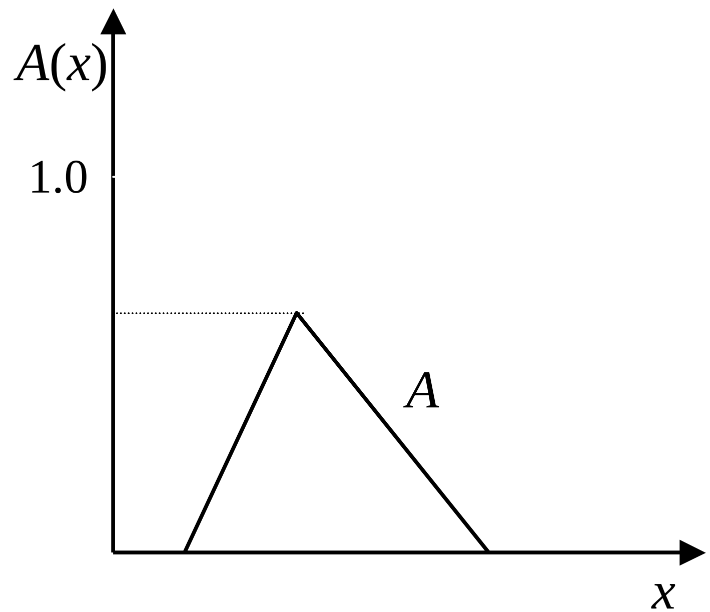
conjunto fuzzy

Normalidade

Normal: hgt(A) = 1



Subnormal: hgt(A) < 1

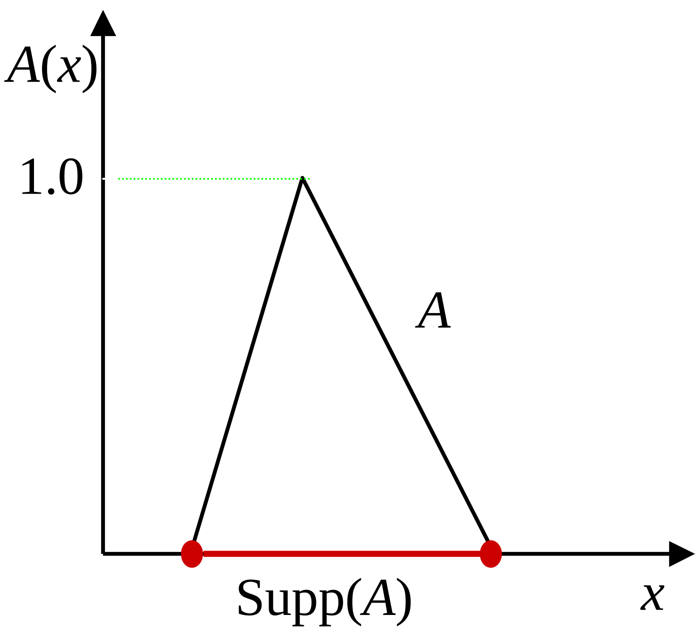


Altura de A hgt(A): $$\mathrm{hgt}(A) = \sup_{x \in \mathbf{X}} A(x)$$

Suporte

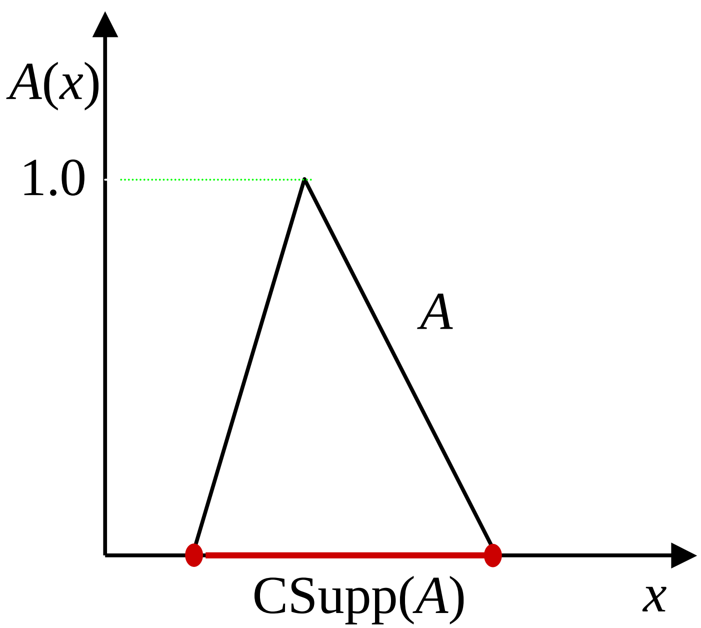
$$\text{Supp}(A) = \{x \in \mathbf{X} \mid A(x) > 0\}$$

conjunto aberto



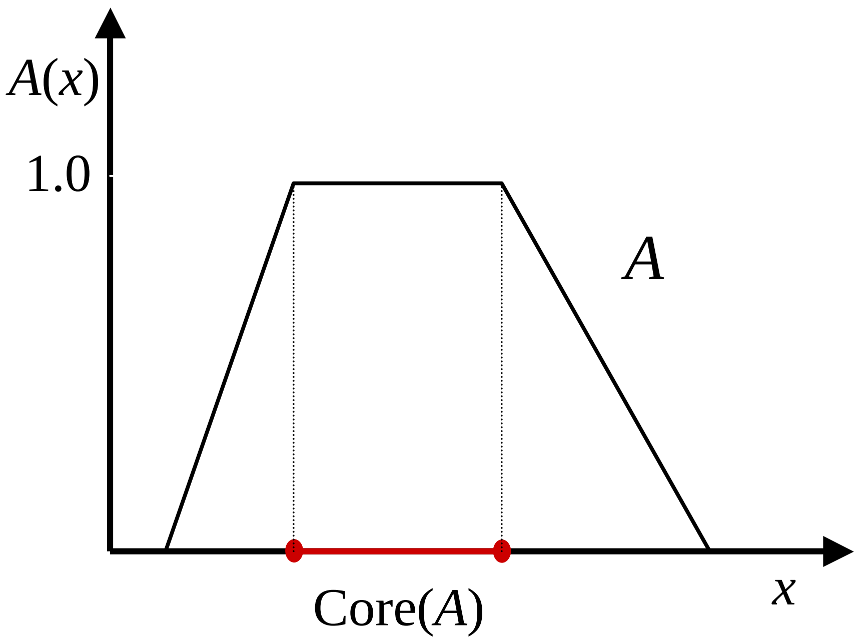
Suporte

$\mathrm{CSupp}(A) = closure\{x \in \mathbf{X} \mid A(x) > 0\}$ conjunto fechado



Núcleo

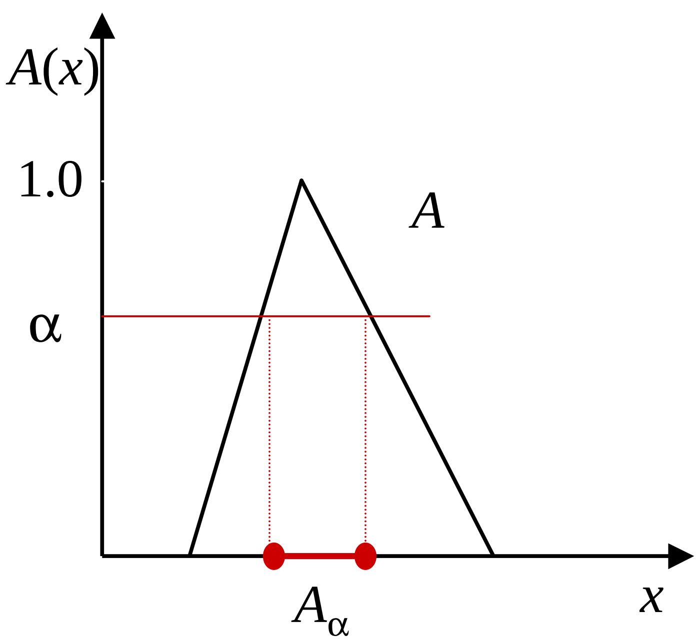
$$\text{Core}(A) = \{x \in \mathbf{X} \mid A(x) = 1\}$$

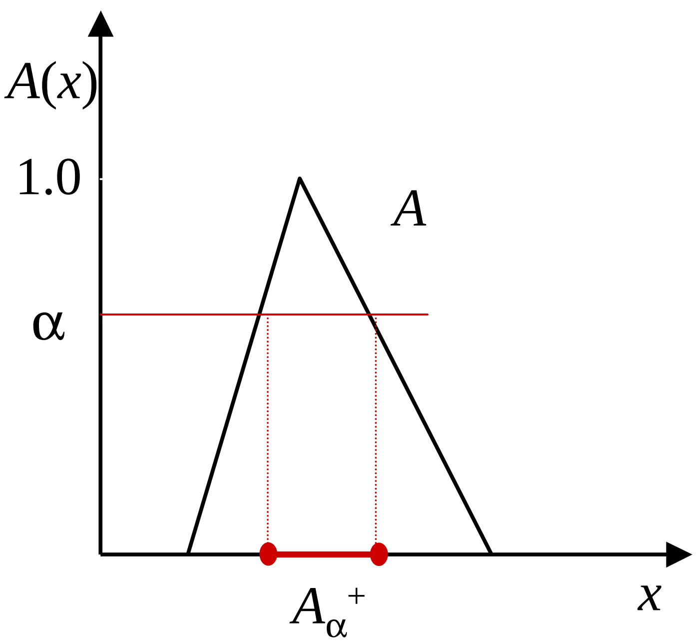


α–corte (nível)

$A_\alpha = \{x \in \mathbf{X} \mid A(x) \geq \alpha\}$

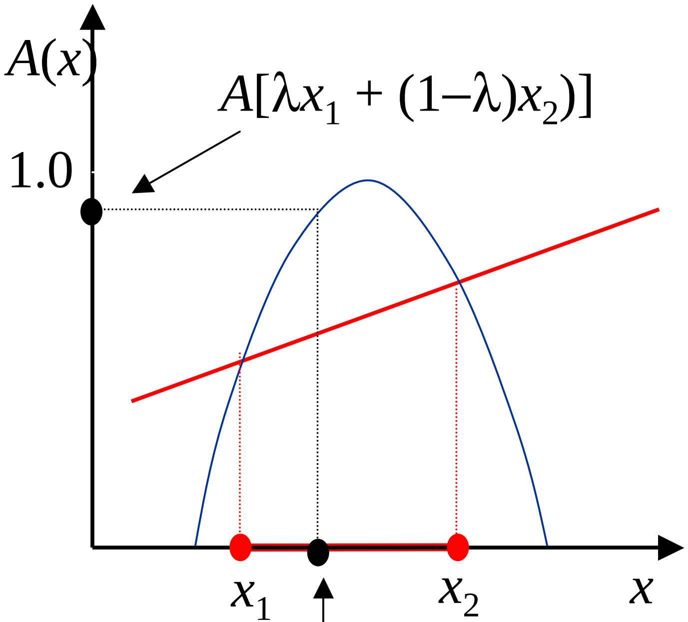
$A_\alpha = \{x \in \mathbf{X} \mid A(x) > \alpha\}$ α-corte forte





Convexidade

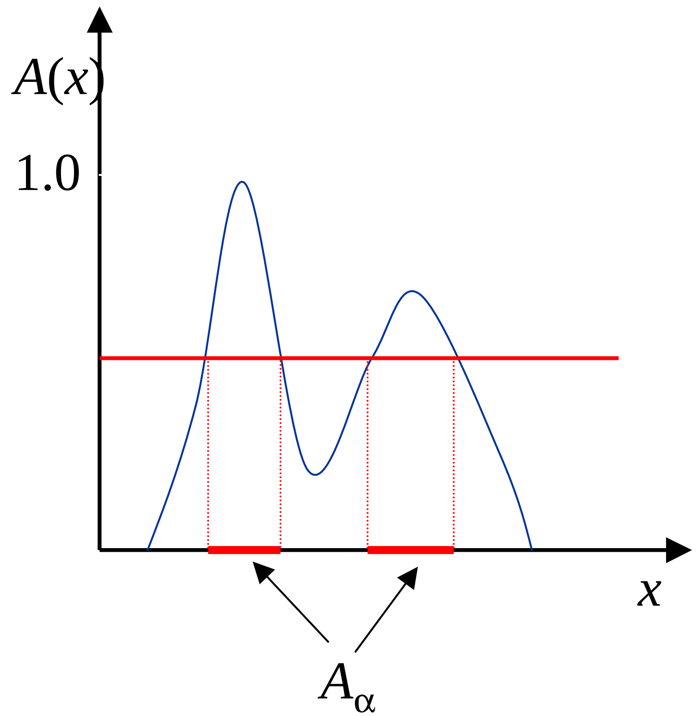
$$A[\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2] \geq \min[A(x_1), A(x_2)]$$



$x = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$

$0 \leq \lambda \leq 1$

Convexo



$A_\alpha = \{x \in \mathbf{X} \mid A(x) > \alpha\}$

Não convexo

Cardinalidade

$$\mathrm{Card}(A) = \sum_{x \in \mathbf{X}} A(x)$$ $\mathbf{X}$ finito ou contável

$$\mathrm{Card}(A) = \int_{\mathbf{X}} A(x)\mathrm{d}x$$

Card(A) = $|A|$ $\approx$ sigma count (σ–count)

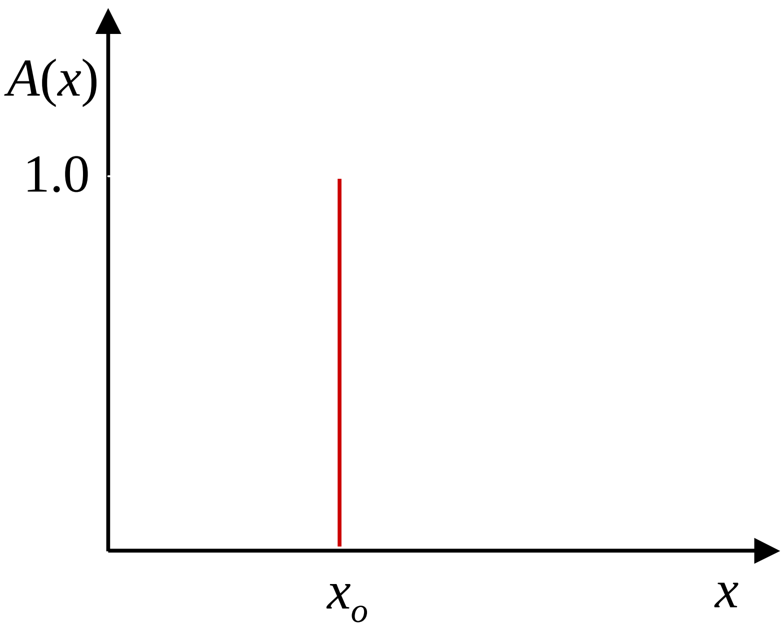
Inclusão

$$A \; e \; B \; \text{em} \; \mathbf{X}, \quad A \subseteq B \;\Leftrightarrow\; A(x) \le B(x)$$ Zadeh

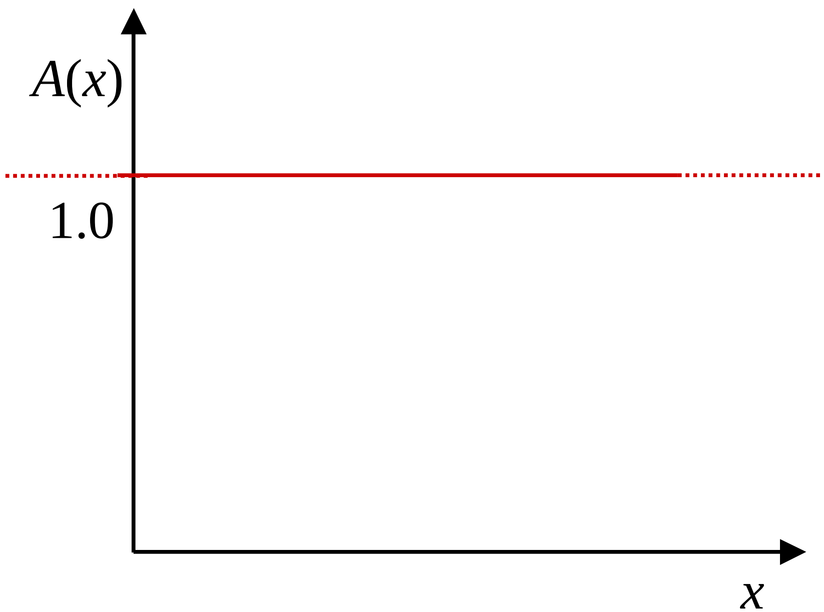
$$S(A,B) = \frac{1}{|A|}\left(|A| - \sum_{x \in \mathbf{X}} \max[0, A(x) - B(x)]\right)$$ Kosko

$$S(A,B) = \frac{|A \cap B|}{|A|}$$

Especificidade de conjuntos fuzzy



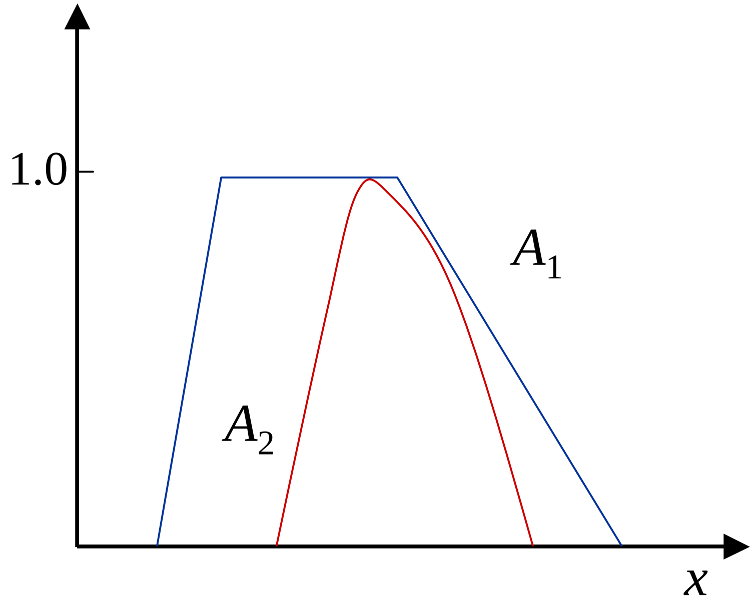
Específico



Não específico

Especificidade

1. $\text{Spec}(A) = 1$ se e somente se $\exists x_0 \in A(x_0) = 1,\ A(x) = 0 \quad \forall x \neq x_0$
2. $\text{Spec}(A) = 0$ se e somente se $A(x) = 0, \quad \forall x \in \mathbf{X}$
3. $\text{Spec}(A_1) \leq \text{Spec}(A_2)$ se $A_1 \supset A_2$



Exemplos

$$\mathrm{Spec}(A) = \int_0^{\alpha_{\max}} \frac{1}{Card(A_\alpha)} \mathrm{d}\alpha$$

$$\mathrm{Spec}(A) = \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{Card(A_{\alpha_i})} \Delta\alpha_i$$

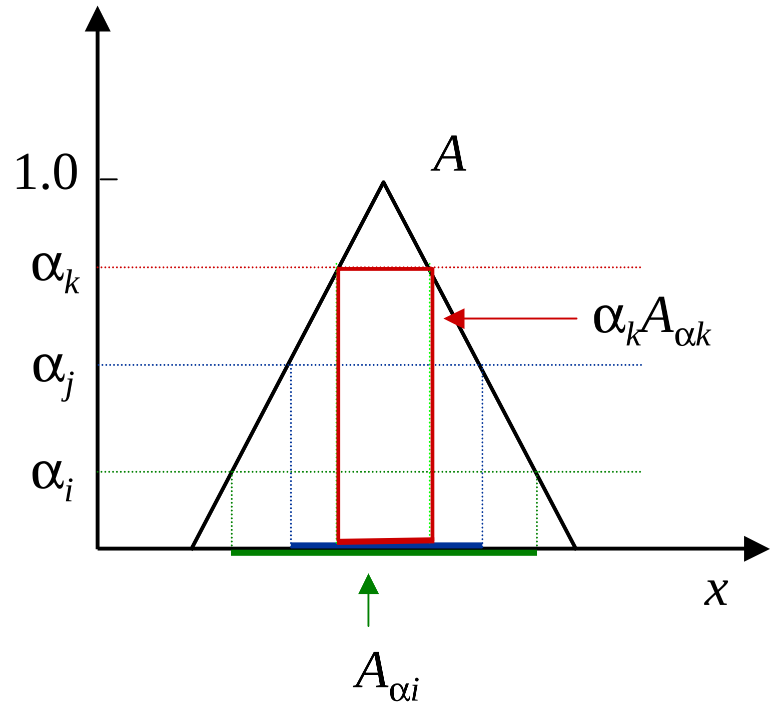
Yager (1993)

Teorema da representação

Qualquer conjunto fuzzy pode representado por uma família de conjuntos

$$A = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} \alpha A_\alpha$$

$$A(x) = \sup_{\alpha \in [0,1]} \alpha A_\alpha(x)$$



3-Operações básicas

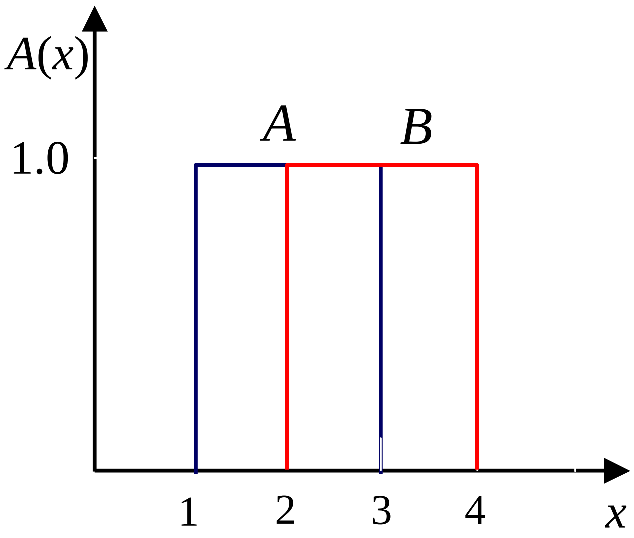
- Operações e operadores
  - união
  - interseção
  - complemento

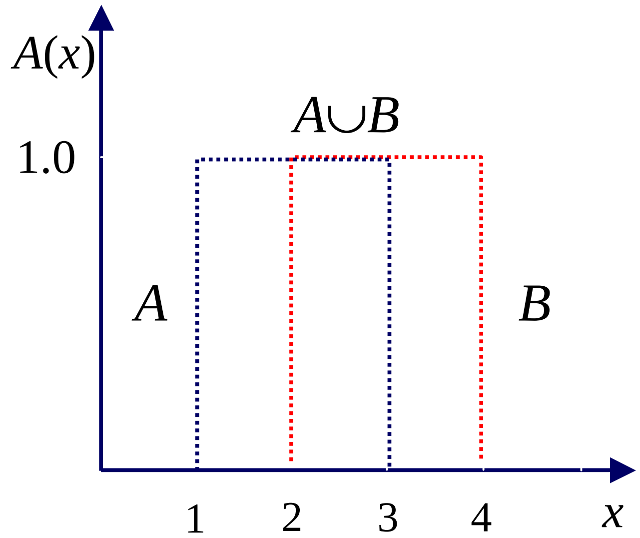
- Igualdade e inclusão (Zadeh)

$A = B$ se e somente se $A(x) = B(x) \quad \forall x \in \mathbf{X}$

$A \subseteq B$ se e somente se $A(x) \leq B(x) \quad \forall x \in \mathbf{X}$

União de conjuntos





$A = \{x \in \mathbf{R} \mid 1 \leq x \leq 3\}$

$B = \{x \in \mathbf{R} \mid 2 \leq x \leq 4\}$

$A \cup B: \{x \in \mathbf{R} \mid 1 \leq x \leq 4\}$

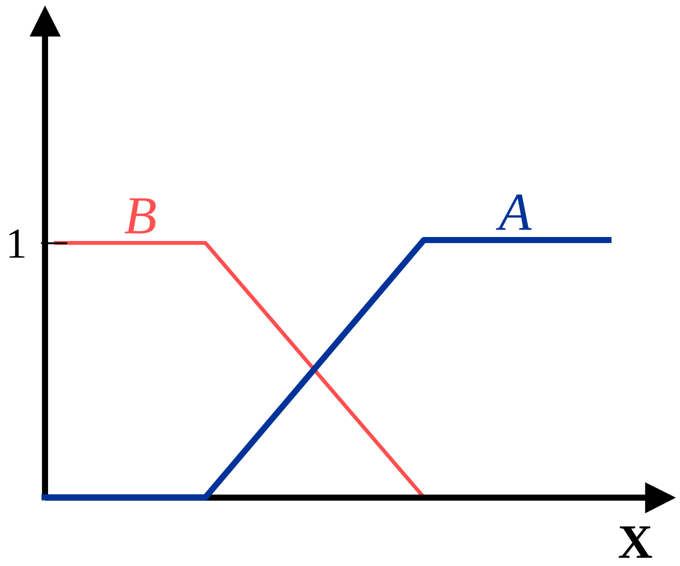
$$\boxed{(A \cup B)(x) = \max\,[A(x), B(x)]\ \forall x \in \mathbf{X}}$$

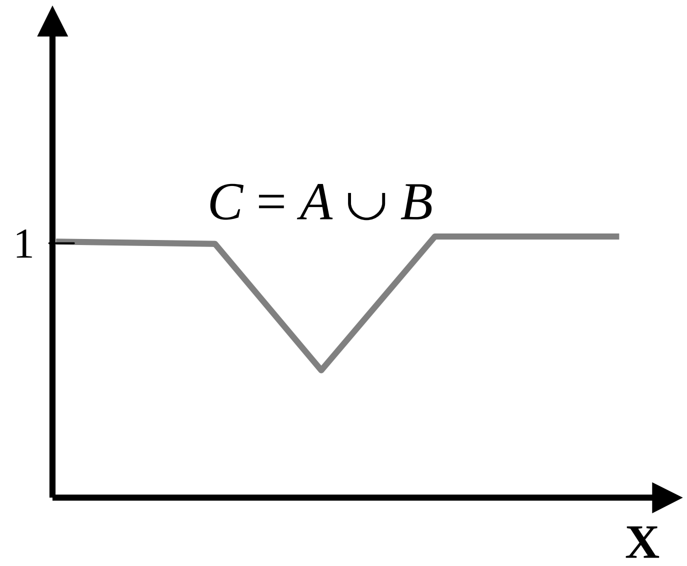
União de conjuntos fuzzy

$C = A \cup B$ $\qquad$ A, B e C em $\mathbf{X}$

$s : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$

$C(x) = A(x)\ s\ B(x)$ $\qquad$ $\forall\ x \in \mathbf{X}$





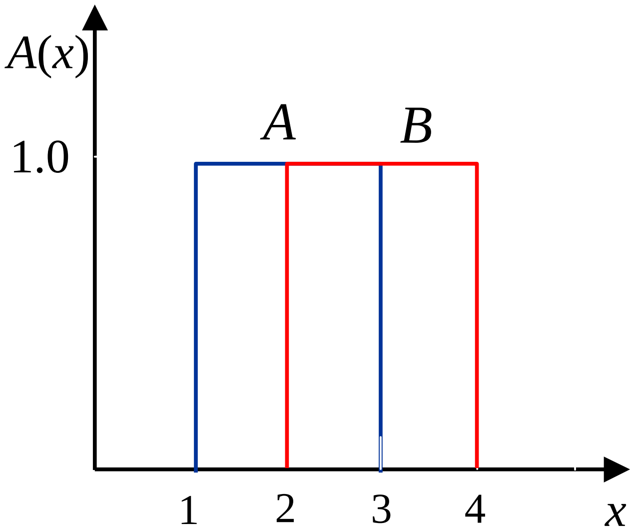
Conorma triangular (s-norma)

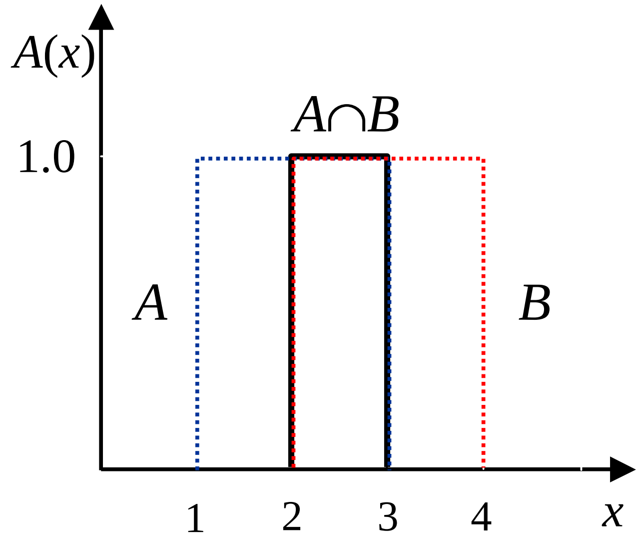
$$s : [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$$

- commutativa: $a \; s \; b = b \; s \; a$
- associativa: $a \; s \; (b \; s \; c) = (a \; s \; b) \; s \; c$
- monotônica: if $b \leq c$ then $a \; s \; b \leq a \; s \; c$
- condições de contorno: $a \; s \; 1 = 1$

  $a \; s \; 0 = a$

Interseção de conjuntos





$A = \{x \in \mathbf{R} | \ 1 \leq x \leq 3\}$

$B = \{x \in \mathbf{R} | \ 2 \leq x \leq 4\}$

$A \cap B$: $\{x \in \mathbf{R} | \ 2 \leq x \leq 3\}$

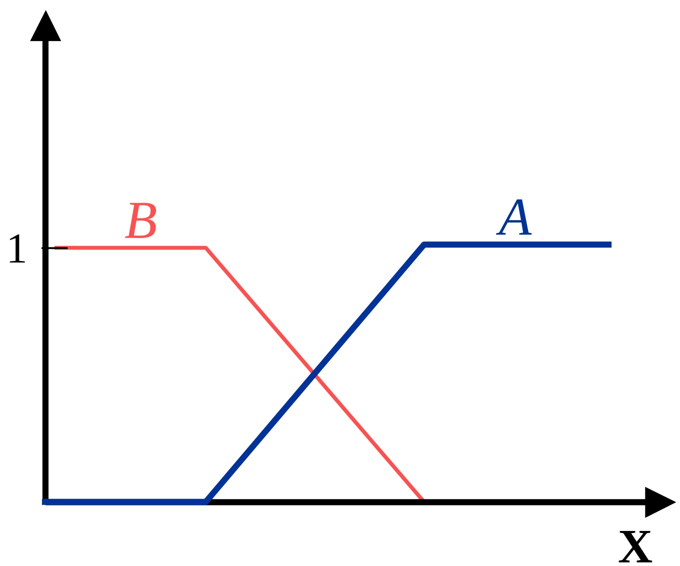
$$\boxed{(A \cap B)(x) = \min\,[A(x), B(x)]\ \forall x \in \mathbf{X}}$$

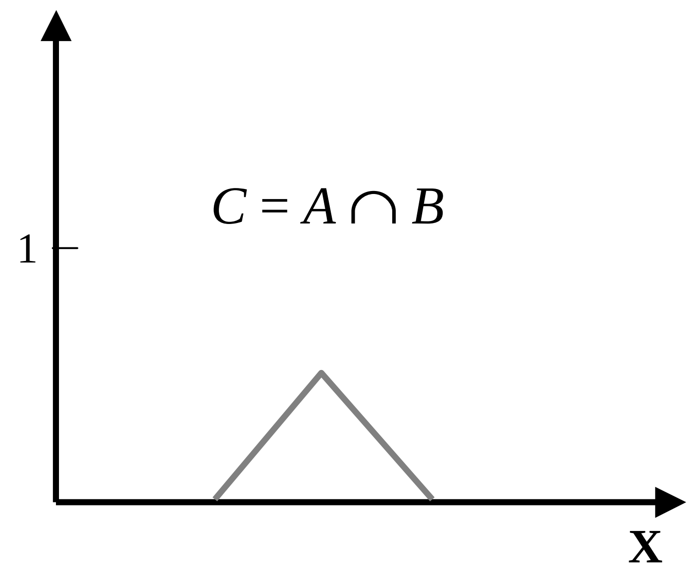
Interseção de conjuntos fuzzy

$C = A \cap B$ $\qquad$ A, B e C em $\mathbf{X}$

$t : [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$

$C(x) = A(x)\ t\ B(x)$ $\qquad$ $\forall\ x \in \mathbf{X}$





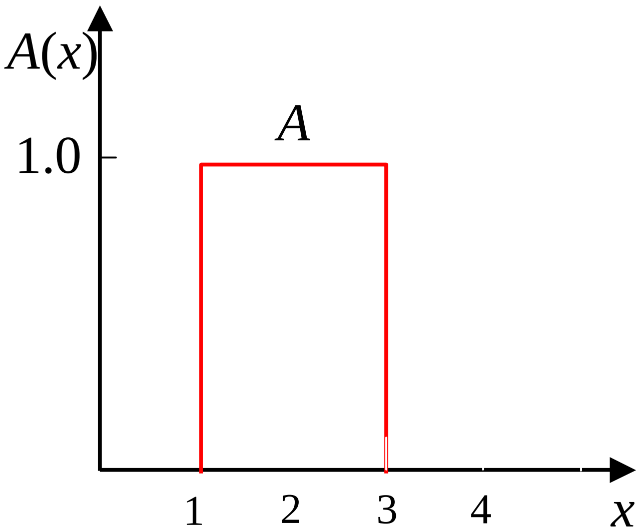
Norma triangular (t-norma)

$$t : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$$

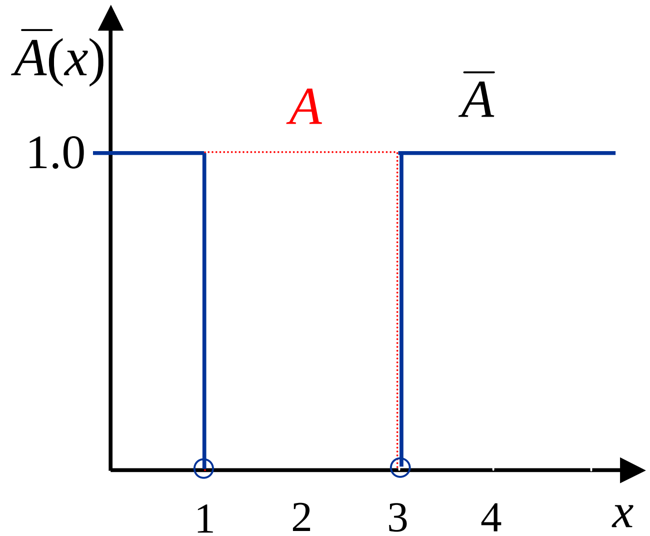
- commutativa: $a \; t \; b = b \; t \; a$
- associativa: $a \; t \; (b \; t \; c) = (a \; t \; b) \; t \; c$
- monotônica: if $b \leq c$ then $a \; t \; b \leq a \; t \; c$
- condições contorno: $a \; t \; 1 = a$

  $a \; t \; 0 = 0$

Complemento



$A = \{x \in \mathbf{R} \mid 1 \leq x \leq 3\}$



$\bar{A}(x) = \{x \in \mathbf{R} \mid x < 1 \text{ , x} > 3\}$

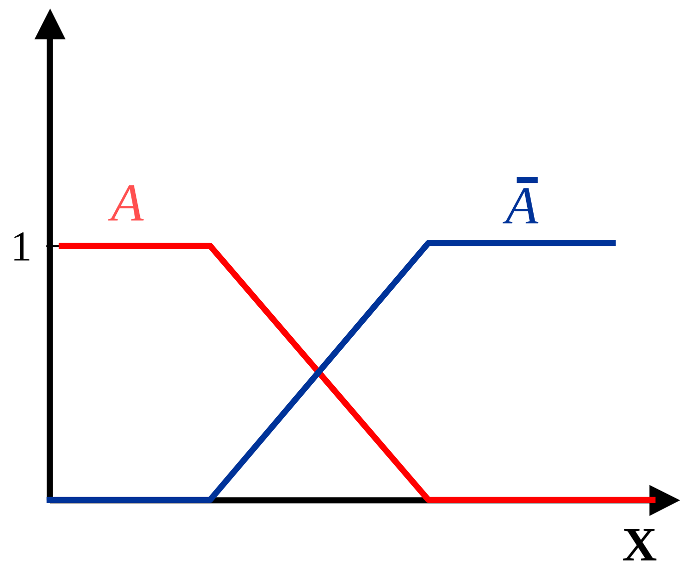
$A(x) = 1 - A(x) \quad \forall x \in \mathbf{X}$

Complemento fuzzy

$\bar{A}$ de A em $\mathbf{X}$

C: $[0,1] \rightarrow [0,1]$

$\bar{A}(x) = C(A(x)) \quad \forall\, x \in \mathbf{X}$

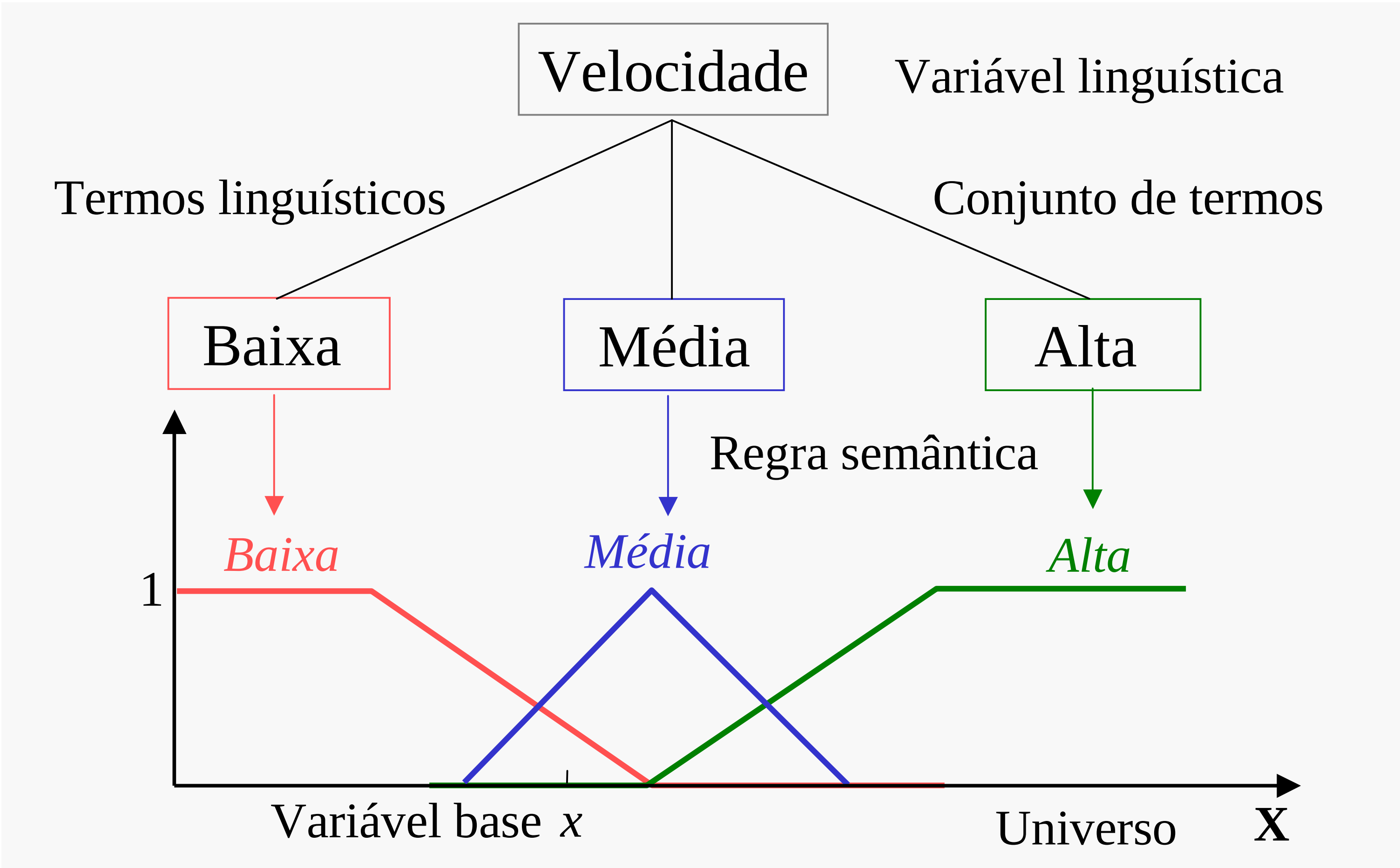


$\bar{A}(x) = 1 - A(x)$

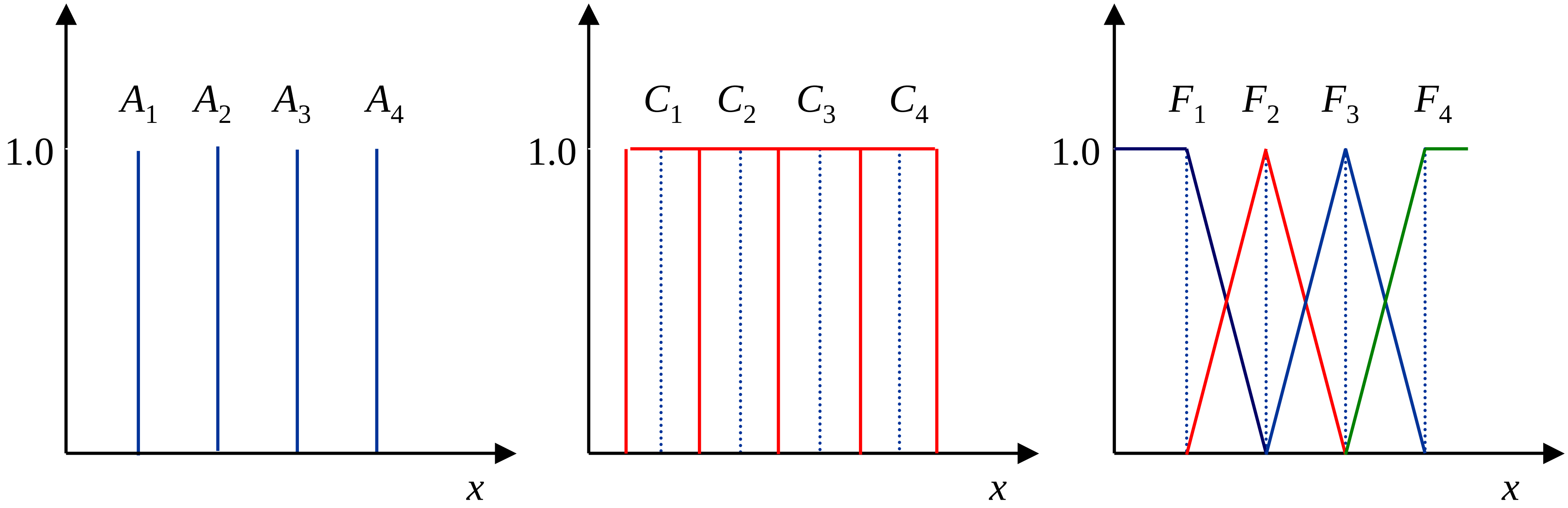
(complemento de um)

Variável linguística

- (X, T(X), $\mathbf{X}$, G, M)



Granularização



Discretatizar   Quantizar   Granularizar

Observação

Este material refere-se às notas de aula do curso CT 820 Teoria de Sistemas e Otimização Fuzzy: Introdução e Aplicações da Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação da Unicamp e do Centro Federal de Educação Tecnológica do Estado de Minas Gerais. Não substitui o livro texto, as referências recomendadas e nem as aulas expositivas. Este material não pode ser reproduzido sem autorização prévia dos autores. Quando autorizado, seu uso é exclusivo para atividades de ensino e pesquisa em instituições sem fins lucrativos.