NOTAS DE AULA DO CURSO DE EE300

Romis Attux, Cristiano Cruz e Diogo Soriano

FEEC/UNICAMP, primeiro semestre de 2012

Capítulo 1 – Teoria da Relatividade Especial

1.1 – Cinemática Clássica: a Transformação de Galileu

"Paulo estava no km 35 da rodovia às 12:45 de ontem". "Carlos nasceu em São Paulo no dia 30 de dezembro". "Encontre-me no café da esquina às 20 horas".

Fazemos uso diariamente de expressões como essas para caracterizar determinados acontecimentos (o nascimento de Carlos, um encontro, etc.). Usualmente, podemos situar perfeitamente um *evento* no espaço e no tempo indicando sua localização e o instante de sua ocorrência. Em nosso universo, acreditamos ser possível caracterizar qualquer evento através de três coordenadas espaciais (e.g. latitude, longitude e altitude) e uma temporal (o momento em que ele tem lugar). Dotado de tais grandezas, um observador **O** pode registrar eventos em seu sistema de referência, que denominaremos **O**(x,y,z,t). Em consonância com a nomenclatura tradicional, as coordenadas x, y e z dizem respeito ao espaço, enquanto a coordenada t expressa a dependência temporal.

Destarte, do ponto de vista de **O**, eventos são completamente caracterizados por um conjunto de quatro números. Podemos então indagar: será o sistema que acabamos de construir o único imaginável? A resposta deve ser negativa, como, aliás, a nossa vivência bem atesta: seria possível ver Carlos nascer ao lado de sua mãe, na sala de parto, por uma janela, ao passar por um corredor ou deitado numa maca. Movidos pela curiosidade científica, indagamos: é viável estabelecer alguma relação entre todos esses sistemas de coordenadas? Tomemos dois sistemas, **O**(x,y,z,t) e **O'**(x',y',z',t'). Para que explicitemos algum tipo de conexão entre eles, faz-se necessário conhecer como é o movimento relativo entre **O** e **O'**.

Caso o movimento seja uniforme, ou seja, **O'** se mova com velocidade constante em relação a **O** (o inverso também é válido), a Física Clássica tem uma resposta muito intuitiva para nossos anseios. Tal resposta tem a forma da *transformação de Galileu*. Suponhamos que **O'** se mova com velocidade **u** em relação a **O**, e que essa velocidade tenha a direção do eixo *x*. Consideremos ainda que os eixos x, y e z sejam paralelos a x', y' e z', respectivamente, e que, no instante t = t'= 0, as duas origens coincidam. Sob a égide de tais considerações, a transformação de Galileu pode ser expressa como:

$$\begin{aligned} x' &= x - ut \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= t \end{aligned} \tag{1.1}$$

Note o leitor que a primeira expressão é estudada nos cursos de cinemática quando se lida com o movimento uniforme. As demais coordenadas espaciais não se alteram com a transformação, uma vez que a velocidade **u** tem a direção do eixo *x*.

A coordenada temporal também não se altera, o que merece consideração. Nesse fato, percebemos que a Física Clássica suporta a idéia de *tempo absoluto*, ou seja, de que o movimento relativo não altera a relação entre intervalos temporais medidos em cada um dos referenciais.

Podemos utilizar (1.1) para obter uma relação entre as velocidades em cada referencial. Como t = t', podemos escrever:

$$dt = dt' \qquad (1.2)$$

Se diferenciarmos as três primeiras equações de (1.1) com respeito ao tempo (não nos esqueçamos de (1.2)), chegaremos a:

$$\begin{aligned} v_x' &= v_x - u \qquad (1.3) \\ v_y' &= v_y \\ v_z' &= v_z \end{aligned}$$

A primeira equação de (1.3) é uma expressão da clássica *lei da adição das velocidades*.

EXEMPLO 1.1

*Um observador **O** está parado numa estação. Um trem procedente de uma cidade distante passa por ele, e então **O** reconhece seu irmão, que está sentado numa poltrona do trem. No momento em que vê seu irmão, este último começa a correr no mesmo sentido do trem, rumo a uma porta, com uma velocidade de 6 m/s em relação ao vagão. O trem tem uma velocidade de 15 m/s em relação a **O**. Qual será a velocidade do irmão de **O** em relação à estação (e ao próprio **O**)?*

Suporemos que o trem se move na direção e no sentido do eixo *x*. Podemos tomar como nossos referenciais **O** e o trem, que passa a ser, portanto, **O'**. Sabemos que a velocidade relativa entre eles é de 15 m/s. Este é, então, o valor de u. Temos a velocidade do irmão com relação ao vagão, que é:

$$v_x' = 6 \text{ m/s}$$

Conseqüentemente, podemos utilizar a primeira equação de (1.3) para obter o que desejamos, a velocidade do irmão em relação à estação, ou seja, v_x:

$$v_x = v_x' + u = 6 + 15 = 21 \text{ m/s}$$

Esse exemplo, que condiz com a nossa experiência cotidiana (e com o chamado "bom senso") é típico da aplicação da lei da adição das velocidades.

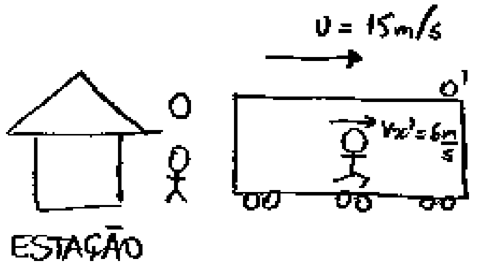


Figura 1.1: Ilustração do exemplo 1.1

A mecânica newtoniana está em harmonia com a transformação de Galileu. De fato, as leis de Newton são *invariantes* com respeito a essa transformação, o que pode ser percebido se notarmos, por exemplo, que a aceleração em **O** e **O'** é a mesma (o leitor pode verificar tal fato se repetir o procedimento que nos permitiu obter a transformação de velocidades). O que isso quer dizer? Quer dizer que a forma dessas leis físicas é idêntica em dois sistemas de referência que estejam em movimento relativo uniforme. De fato, tal é justamente o princípio da relatividade newtoniano: *as leis da mecânica são as mesmas para todos referenciais inerciais*.

Trata-se de uma lei muito interessante, pois, se as leis físicas fossem diferentes para dois referenciais em movimento uniforme, poderíamos, eventualmente, elevar um deles à categoria de "referencial privilegiado", o que nos conduziria à idéia de *movimento absoluto*. No entanto, de acordo com o princípio acima exposto, não há experiência baseada na mecânica tradicional que nos permita determinar se nos encontramos em movimento ou em repouso. Uma conseqüência dessa assertiva é a conhecida constatação de que, idealmente, estar de olhos vendados num trem com velocidade uniforme em relação ao solo proporciona as "mesmas sensações" que estar de pé sobre o solo.

Seria, no entanto, muito natural perguntar: todas as leis físicas são invariantes com relação à transformação de Galileu? A resposta é *não*, e tal negativa nos conduzirá a um novo princípio da relatividade, proposto por Einstein em 1905.

1.1.1 – Interlúdio: o Eletromagnetismo e a Transformação de Galileu

James Clerk Maxwell tem seu nome associado a uma teoria física de elegância cativante: a *teoria eletromagnética*. Seria indubitavelmente apropriado tomá-la como cobaia de nossa investigação sobre o problema de invariância, que acabamos de discutir. Na verdade, como já sabiam os físicos no fim do século XIX, as leis do eletromagnetismo *não são invariantes* à transformação de Galileu. Essa transformação engendra "formas distintas" das equações de Maxwell para referenciais distintos, mesmo que eles estejam em movimento relativo uniforme. De acordo com o que discutimos na seção anterior, disso decorreria a constatação da existência de um referencial privilegiado, no qual as leis do eletromagnetismo teriam sua forma, digamos, mais simples [Ohanian, 1995]. Eis que fomos conduzidos a uma "absolutização" do movimento, a qual está intimamente ligada a uma entidade que permeou o imaginário da maioria dos físicos até o começo do século XX: o éter.

1.2 – O Éter e a Experiência de Michelson-Morley

"Ondas sonoras não se propagam no vácuo!". Esta frase já foi proferida por muitos jovens (e críticos) após (ou durante) a exibição de filmes de ficção científica. Não questionaremos esse fato...a Física indica, impassível, que o som precisa de um meio material para que possa se propagar.

Quando Maxwell predisse a existência de ondas eletromagnéticas, existência, aliás, suportada pelo trabalho experimental de Heinrich Hertz, era parte do "senso comum" que tais ondas também deveriam necessitar de um meio de propagação. A esse meio foi dado o nome de *éter*. Durante o século XIX, o éter povoou a mente dos físicos com diversas conjecturas.

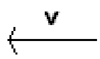
Como seria o éter? Qual seria a sua composição? Seria intangível? Essas foram algumas das questões levantadas sem demora. No entanto, obter respostas conclusivas parecia uma tarefa nada trivial. Alguns atribuíam a tal meio, por exemplo, a idéia de "repouso absoluto", o que nos faz perceber a associação direta entre o éter e o referencial privilegiado que discutimos na seção 1.1.1, no qual as leis do eletromagnetismo têm sua forma mais simples e a luz se propaga com velocidade c. Em outros referenciais inerciais, a velocidade da luz seria obtida pela lei da adição das velocidades, o que não seria problema, pois, no mundo clássico, as equações de Maxwell não precisavam ser invariantes.

1.2.1 – O Vento de Éter

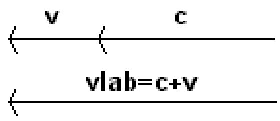
Num dia em que o ar se encontra em perfeita calmaria, imagine que você está na praia. Pense agora que você começa a correr e sinta o vento tocar sua face como se soprasse uma agradável brisa. Não se esqueça, no entanto, que o dia é de calmaria; porém, o movimento através do ar causou uma sensação equivalente a de um vento, o que não se afigura nada espantoso. Novamente, é uma questão de movimento relativo!

Da mesma forma que o seu movimento na praia provocou o surgimento de um vento, o movimento da Terra pelo éter deveria causar a existência de um *vento de éter*, possivelmente detectável. Em tese, esse vento deveria alterar a velocidade da luz se o movimento de translação de nosso planeta se desse através de um éter "estático" (como muitos imaginavam).

Pensemos um pouco sobre isso. Assumamos que o vetor **v** represente a velocidade do vento em relação a um laboratório localizado em algum lugar da face da Terra.

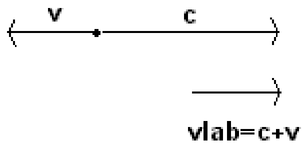


Imaginemos agora que um raio de luz fosse disparado na mesma direção e sentido de **v**. Sob a ótica da Física Clássica, a velocidade do raio, do ponto de vista de um cientista parado no laboratório, seria **vlab**:



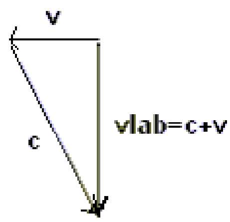
Percebe-se que ||**vlab**|| = vlab = c + v. Assim, o cientista mediria, para o raio, uma velocidade c + v.

Se o raio se movesse em sentido contrário ao do vento, teríamos:



sendo ||**vlab**|| = c – v. Neste caso, a velocidade medida seria menor.

Se o raio se movesse em uma direção ortogonal à do vento, teríamos o seguinte cenário:



em que $vlab = \sqrt{c^2 - v^2}$.

Esperava-se que a velocidade desse vento fosse igual à velocidade de translação da Terra em torno do Sol, que vale cerca de 30 km/s. Como v << c, exigia-se um aparato muito preciso para detectar qualquer efeito. Um aparato desse tipo foi construído no final do século XIX, como veremos a seguir.

1.2.2 – As experiências

Albert Abraham Michelson teve uma carreira marcada por importantes contribuições ao estudo da luz, as quais lhe renderam o Prêmio Nobel de Física de 1907 (o primeiro concedido a um cientista estadunidense). Uma de suas especialidades era medir a velocidade da luz, o que é de grande interesse prático. No final do século XIX, ele se dedicou à busca de evidências experimentais da existência do vento de éter. Para tanto, concebeu e construiu o chamado *interferômetro de Michelson*¸ cujo esquema simplificado apresentamos na Fig. 1.2 [Ohanian, 1995, Krane, 1983].

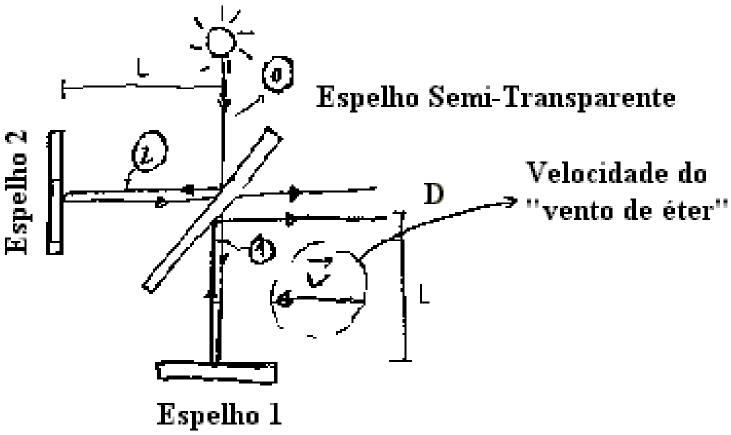


Figura 1.2 – Esquema Simplificado do Aparato

Um feixe de luz monocromática **0** atinge um espelho semi-transparente (EST). Como o próprio nome desse dispositivo indica, uma parte do feixe atravessa o espelho e forma o feixe **1,** enquanto a outra parte é refletida e forma o feixe **2**. Os feixes **1** e **2** são refletidos, respectivamente, pelos espelhos 1 e 2 (E1 e E2), e voltam ao EST. De lá, a luz deles proveniente é direcionada para um detector de franjas de interferência **D**.

Para melhor entendermos a razão de ser dessa refinada montagem, realizemos uma breve análise matemática. Entre a ida e a volta de **1**, transcorre um tempo t_1, expresso por:

$$t_1 = \frac{L}{\sqrt{c^2 - v^2}} + \frac{L}{\sqrt{c^2 - v^2}} = \frac{2L}{\sqrt{c^2 - v^2}} \tag{1.4}$$

Para obter t_1, usamos o raciocínio desenvolvido na seção anterior. Para **2**, temos, para ida e volta:

$$t_2 = \frac{L}{c+v} + \frac{L}{c-v} = \frac{L(c-v) + L(c+v)}{c^2 - v^2} = \frac{2Lc}{c^2 - v^2} \tag{1.5}$$

A diferença os estes dois intervalos de tempo é:

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{2L}{c} . \left(\frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} - \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) \tag{1.6}$$

Se o comprimento de onda da luz emitida é λ, Δt se reflete numa diferença de fase $\Delta\phi$ entre os feixes (quando eles atingem **D**) de:

$$\Delta\phi = \frac{2\pi c}{\lambda} \Delta t \tag{1.7}$$

Tal diferença de fase produz um padrão de interferência passível de detecção, que é, por sua vez, a chave para a determinação da velocidade v. Eis, em linhas gerais, o plano de Michelson.

Para sua grande surpresa, ele *não detectou nenhum efeito conclusivo do vento de éter sobre a velocidade da luz*. Isso o levou a uma nova empreitada, dessa vez em conjunto com o químico Edward Morley, e com um aparato ainda mais preciso. Porém, uma vez mais não foi detectada nenhuma corrente de éter, para espanto dos dois cientistas e de Rayleigh, Kelvin, Lorentz e outros [Pais, 1995]. Realmente, o resultado negativo punha em xeque a concepção corrente acerca do eletromagnetismo, o que fez surgir um grande desconforto e algumas hipóteses interessantes.

Michelson e outros continuaram repetindo a experiência por algumas décadas, sem obter, jamais, resultados conclusivos a favor da existência do vento de éter. Aliás, um fato muito interessante ocorreu em 1921, quando Dayton Miller afirmou ter obtido um valor não-nulo para a velocidade da corrente de éter. O fato, desnecessário dizer, causou comoção, pois a relatividade já havia sido formulada (veremos a relevância disto a seguir) e Einstein era uma figura muito popular. Quando soube dos resultados de Miller, o alemão proferiu uma frase célebre: “O Senhor é sutil, mas não malicioso”, pois tinha uma profunda convicção da inexistência do éter e da correção dos resultados de Michelson e Morley [Pais, 1995].

1.3 – Os Postulados da Relatividade

Um dos artigos publicados por Einstein em 1905 pode ser considerado a pedra angular da teoria da relatividade. Nesse trabalho, intitulado “Da Eletrodinâmica dos Corpos em Movimento”, encontramos os dois postulados fundamentais, que são os pilares de tal edifício teórico. Ambos são muito simples, e esperamos que sirvam para desmistificar a tão falada complexidade conceitual da relatividade:

1 – <u>Todas</u> as leis da Física são idênticas em todos referenciais inerciais.

2 – A velocidade da luz no vácuo é a mesma em todos os referenciais inerciais.

O primeiro postulado é o princípio da relatividade levado às últimas conseqüências: <u>todas</u> (os grifos são nossos) as leis da Física são idênticas em <u>todos</u> referenciais inerciais. Não podemos contar com os fenômenos eletromagnéticos ou de qualquer outra natureza para nos dizer quem está, em termos absolutos, em movimento uniforme ou repouso. Trata-se da proclamação de igualdade entre referenciais inerciais: não há privilégios de nenhuma espécie! Essa era uma crença profunda de Einstein, uma convicção que permeia toda a sua formulação teórica. Ela deverá também estar em nossas mentes quando analisarmos a relatividade.

O segundo postulado afirma que a velocidade da luz no vácuo é a mesma em todos referenciais inerciais. Trata-se de uma condição relevante, pois, se ela não fosse obedecida, o eletromagnetismo não se encaixaria no contexto do primeiro postulado. Os dois postulados, portanto, estão interligados.

A hipótese levantada acerca da velocidade da luz, de aparência inocente, contém uma drástica negação da cinemática clássica. Um exemplo pode indicar a razão.

<u>EXEMPLO 1.2</u>

Suponha que um astronauta A está em repouso relativamente a uma estação espacial. Ele vê duas naves se aproximarem com velocidade 0.5c, uma de cada lado, em rota de colisão. De repente, a nave que vem da esquerda (NE) dispara um facho de luz na direção da outra nave (ND) para avisar o piloto do risco iminente. Qual será a velocidade desse facho relativamente a cada nave e ao astronauta A?

A lei da adição das velocidades fornece as seguintes respostas:

$$V_{raioNE} = c$$

pois o emissor está acoplado à nave, estando em repouso em relação a esta. Do ponto de vista do astronauta, a velocidade do facho será:

$$V_{raioA} = c + 0.5c = 1.5c$$

Do ponto de vista da outra nave, a velocidade será:

$$V_{raioND} = V_{NdrelativaNE} + c = c + c = 2c$$

Os resultados obtidos parecem bastante razoáveis. Porém, o segundo postulado afirma que, do ponto de vista de <u>todos</u>, a velocidade do raio será c! Assim, teríamos:

$$V_{raioA} = c$$

$$V_{raioNE} = c$$

$$V_{raioND} = c$$

Isso já mostra que a transformação de Galileu foi irremediavelmente abandonada.

Trata-se, certamente, de um postulado espantoso *a priori*, pois a nossa intuição parece estar de acordo com a cinemática clássica. No entanto, nossa intuição foi formada a partir da observação de fenômenos que envolvem velocidades muito inferiores à da luz, o que impede a confrontação entre as duas cinemáticas apenas pela vivência cotidiana.

A relatividade, por si mesma, já foi exposta nesta seção. Passaremos agora à análise de algumas conclusões decorrentes dos dois postulados que acabamos de discutir.

1.4 – A Dilatação do Tempo

Uma conseqüência muito importante dos dois postulados é a abolição da idéia de tempo absoluto. Como vimos na equação (1.1), a Cinemática Clássica prega que a passagem do tempo se dá no mesmo "ritmo" em dois referenciais em movimento relativo uniforme. Veremos que, do ponto de vista relativístico, isso não é verdade. Um exemplo [Krane, 1983] pode nos ajudar a entender melhor o que ocorre.

<u>*EXEMPLO 1.3*</u>

*Dois observadores, **O** e **O'**, presenciam um mesmo fenômeno: o disparo, por **O**, de um facho de luz. Esse facho é refletido por um espelho, e volta ao canhão emissor. Estudaremos a ocorrência a partir dos pontos de vista de ambos os referenciais, os quais estão interligados pelo fato de que **O'** se move com velocidade u em relação a **O**. A direção dessa velocidade é ortogonal àquela de propagação do raio.*

Vejamos, primeiramente, como a coisa se dá na ótica de **O**. A Fig. 1.3 mostra um esquema.

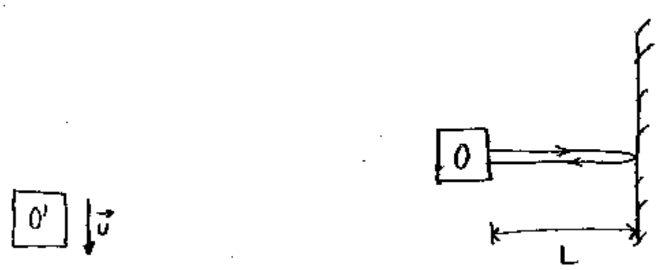


Figura 1.3 – Ponto de Vista de O

O intervalo de tempo decorrido entre a emissão e a volta é:

$$\Delta t = \frac{2L}{c} \qquad (1.8)$$

Passemos agora ao ponto de vista de O'. O esquema está na Fig. 1.4.

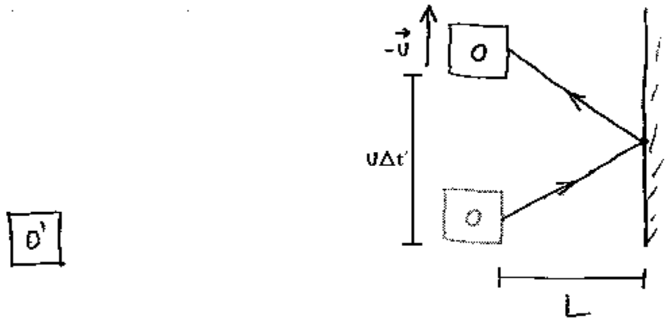


Figura 1.4 – Ponto de Vista de O’

A distância total percorrida pelo raio é, neste caso:

$$\Delta x' = 2\sqrt{L^2 + \left(\frac{u\Delta t'}{2}\right)^2} \tag{1.9}$$

sendo Δt’ o tempo gasto entre a ida e a volta do raio.

Como propõe o segundo postulado, a velocidade da luz, do ponto de vista de O’, também deve ser c. Assim, podemos escrever, a partir de (1.9):

$$c = \frac{\Delta x'}{\Delta t'} = \frac{2\sqrt{L^2 + \left(\frac{u\Delta t'}{2}\right)^2}}{\Delta t'} \tag{1.10}$$

Reescrevendo (1.8), obtemos:

$$L = \frac{c\Delta t}{2} \tag{1.11}$$

Substituindo (1.11) em (1.10), chegamos a:

$$c = \frac{2\sqrt{\left(\frac{c\Delta t}{2}\right)^2 + \left(\frac{u\Delta t'}{2}\right)^2}}{\Delta t'} \tag{1.12}$$

Após algumas manipulações, (1.12) nos leva a:

$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \tag{1.13}$$

Essa é a expressão matemática da *dilatação do tempo*¸ um dos mais célebres efeitos relativísticos. É possível mostrar que $\Delta t' \geq \Delta t$ para $u < c$, o que justifica o emprego do termo "dilatação".

A equação (1.13) é um símbolo de ruptura com o conceito clássico de tempo. Dois observadores em movimento relativo irão discordar quanto à medida do tempo de duração de um fenômeno qualquer. Do ponto de vista de O, os relógios de O' serão mais lentos que os seus, e, do ponto de vista de O', os relógios de O é que serão mais lentos. E <u>ambos terão razão</u>, pois lidamos com o princípio da relatividade.

1.5 – A Contração do Comprimento

Uma segunda consequência dos dois postulados é que as medidas de comprimento também são relativas. Isso significa que, segundo a teoria da relatividade, dois observadores em movimento relativo uniforme poderão obter medidas discrepantes para um comprimento qualquer.

O que isso quer dizer?

Imagine que você esteja num trem em movimento a segurar uma régua de 30cm numa direção paralela à dos trilhos. Seu irmão, que o vê passar a partir de um banco da estação, obterá uma medida de comprimento para a régua <u>menor</u> que 30cm. Da mesma forma, se o seu irmão estivesse segurando a régua, <u>seria você</u> quem iria medir um comprimento menor para a régua.

Vale frisar que a contração se dá <u>apenas na direção do movimento</u>, ou seja, não há discrepância no que se refere a medidas nas outras direções ortogonais. Um exemplo [Krane, 1983] similar ao da seção anterior pode nos ajudar a ver as coisas de forma mais clara.

<u>*EXEMPLO 1.4*</u>

Novamente, dois observadores, ***O*** *e* ***O'****, estudam a emissão de um raio por* ***O*** *e sua posterior reflexão.* ***O'*** *move-se com velocidade u em relação a* ***O****,* <u>*agora numa direção paralela à do raio de luz*</u>*.*

Analisemos, em primeiro lugar, o ponto de vista de **O**. A Fig. 1.5 traz um esquema da situação.

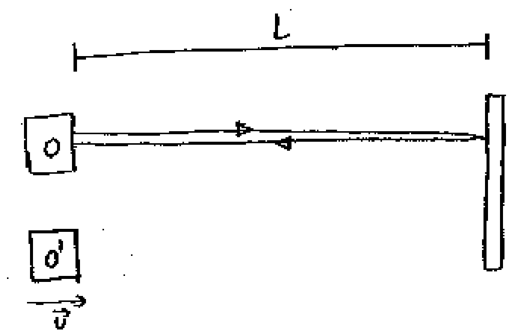


Figura 1.5 – Ponto de Vista de O

Podemos escrever:

$$2L = c\Delta t \tag{1.14}$$

sendo Δt o intervalo de tempo decorrido entre a ida e a volta do raio.

Passemos agora ao outro observador. Na Fig. 1.6, está representado o ponto de vista de **O’** no instante do disparo.

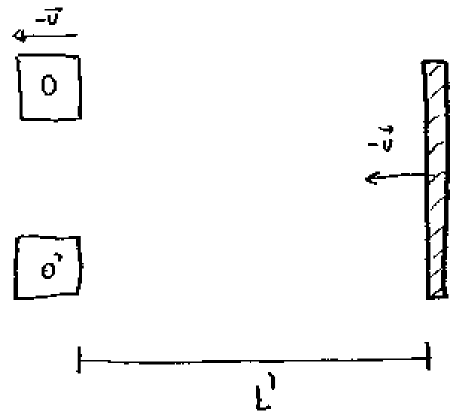


Figura 1.6 – Ponto de Vista de O’ no Instante do Disparo

Vejamos, primeiramente, o que ocorre até a reflexão. A Fig. 1.7 ilustra a situação.

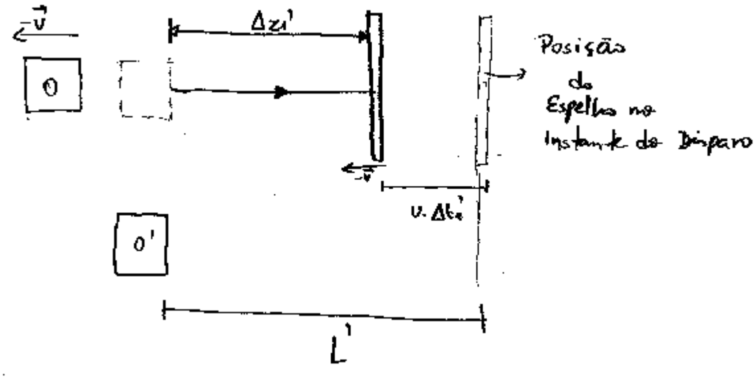


Figura 1.7 – Esquema até a Reflexão

A distância percorrida pelo raio, $\Delta x_1'$, é:

$$\Delta x_1' = L' - u.\Delta t_1' \qquad (1.15)$$

sendo $\Delta t_1'$ o intervalo de tempo decorrido entre a emissão e a reflexão.
De (1.15) obtemos:

$$\Delta t_1' = \frac{L'}{c+u} \qquad (1.16)$$

Passemos agora à investigação da volta do raio. A Fig. 1.8 traz um esquema.

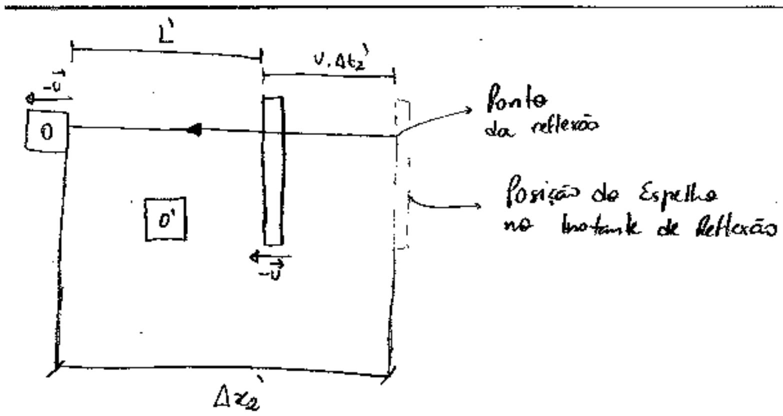


Figura 1.8 – Esquema da Reflexão até a Volta

Neste caso, a distância percorrida pelo raio de luz, da reflexão até a volta, é:

$$\Delta x_2' = L' + u.\Delta t_2' \qquad (1.17)$$

Manipulando (1.17), obtemos:

$$\Delta t'_2 = \frac{L'}{c-u} \tag{1.18}$$

Sendo Δt' o tempo total do ponto de vista de O', podemos escrever:

$$\Delta t' = \Delta t'_1 + \Delta t'_2 = \frac{L'}{c+u} + \frac{L'}{c-u} = \frac{2L'c}{c^2 - u^2} \tag{1.19}$$

Substituindo a fórmula da dilatação do tempo, (1.13), que relaciona Δt e Δt' em (1.19), obtemos:

$$L' = L\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} \tag{1.20}$$

Da expressão (1.20) decorre que $L' \leq L$, para $u < c$. Daí a denominação dada ao fenômeno: *contração do comprimento.*

Observando as equações (1.13) e (1.20), percebemos a existência de um fator comum às duas. Tal fator,

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \tag{1.21}$$

recebe o nome de *fator de Lorentz*, em homenagem a Hendrik Lorentz, físico holandês que foi um dos precursores da relatividade. Aliás, a contração do comprimento é também denominada *contração de Lorentz-FitzGerald* em homenagem ao já mencionado físico e ao físico irlandês George FitzGerald. O motivo da homenagem é que ambos chegaram a (1.20) antes de Einstein, embora numa perspectiva conceitual distinta.

1.6 – O Efeito Doppler

Quando passa por nós uma ambulância com a sirene ligada, experimentamos sensações auditivas distintas durante sua aproximação e seu afastamento. Isso ocorre graças a um efeito físico, o *efeito Doppler*, cujo nome é uma homenagem a Christian Doppler, cientista austríaco que primeiro o descreveu.

Analisemos o tratamento dado ao efeito Doppler no contexto de ondas sonoras. Seja **S** uma fonte que emite uma onda sonora de frequência *f* e **O** um observador que mede, para a mesma onda, uma frequência *f* '. A teoria clássica fornece as seguintes relações:

$$f' = f\,\frac{v + v_o}{v - v_s} \tag{1.22}$$

caso fonte e observador estejam se aproximando, e

$$f' = f\,\frac{v - v_o}{v + v_s} \tag{1.23}$$

caso fonte e observador estejam se afastando. v_o e v_s são as velocidades de fonte e observador em relação ao meio de propagação (e.g. o ar). v é a velocidade de propagação da onda no meio.

Classicamente, quando se estudava o efeito em ondas luminosas, eram usadas as mesmas fórmulas, sendo modificados apenas os valores das grandezas envolvidas. No entanto, do ponto de vista da relatividade, tal intercâmbio não é satisfatório.

Como vimos anteriormente, o éter não tinha nenhum papel no programa de Einstein. Assim, v_o e v_s seriam velocidades medidas em relação a que meio? Sem um meio, poderíamos nos sentir tentados a dizer "em relação a um referencial privilegiado qualquer (e.g. o éter), talvez um em repouso com relação às estrelas fixas". Isso traria de volta a noção de movimento absoluto, que não condiz com o espírito da teoria. É necessário obter uma fórmula que leve em conta apenas o <u>movimento relativo entre fonte e observador</u>.

Que resposta têm os dois postulados? Através da transformação de Lorentz, que estudaremos no próximo capítulo, é possível mostrar que uma onda eletromagnética de freqüência f tem uma freqüência

$$f' = f\sqrt{\frac{1+\frac{u}{c}}{1-\frac{u}{c}}} \tag{1.24}$$

do ponto de vista de um observador que se aproxima da fonte de luz com velocidade u. Caso observador e fonte estejam se afastando, basta trocar u por –u na equação acima.

A expressão (1.24) é perfeitamente condizente com os dois postulados, com o espírito da relatividade. Vale mencionar que Einstein obteve uma fórmula mais geral que (1.24), a qual previa um desvio Doppler mesmo se a direção de propagação da onda não fosse a mesma da velocidade **u**. Assim, a relatividade levou à descoberta do *efeito Doppler transverso* [Pais, 1995].

1.7 – A Transformação de Lorentz

Conforme discutimos, a teoria da relatividade contraria o espírito da transformação de Galileu. É, portanto, de capital importância obter uma transformação que seja coerente com os dois postulados. Na realidade, quando Einstein escreveu o seu célebre primeiro artigo sobre a relatividade, essa transformação já havia sido obtida por mais de um cientista, embora em contextos distintos [Pais, 1995]. Porém, no trabalho de 1905, Einstein chega à transformação <u>a partir dos dois postulados</u>, o que deu uma dimensão profundamente nova ao conjunto de equações que expomos agora:

$$x' = \frac{x - ut}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

$$y' = y \qquad (1.25)$$

$$z' = z$$

$$t' = \frac{t - \frac{ux}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

A obtenção de (1.25) parte de hipóteses similares às discutidas quando expusemos a transformação de Galileu (1.1), ou seja: que **u** é paralelo ao eixo *x*, que os eixos são paralelos entre si, e que as origens coincidem no instante inicial.

Imediatamente, percebemos a presença do fator de Lorentz na primeira expressão e na última. É possível notar ainda que a coordenada temporal não mais é preservada, o que, tendo em vista os efeitos discutidos nas últimas seções, não chega a surpreender. No entanto, nota-se que t' depende de t <u>e de x</u>, o que revela uma íntima conexão entre tempo e espaço. Hermann Minkowski explorou a fundo tal conexão e estabeleceu um formalismo matemático baseado no conceito de espaço-tempo, que depois foi de grande valia para o próprio Einstein durante as suas pesquisas sobre relatividade geral. Por fim, frisamos que, conforme é esperado, as leis do eletromagnetismo <u>são invariantes com relação à transformação de Lorentz</u>, ao contrário do que ocorria com a transformação de Galileu.

A partir de (1.25), e tendo em vista que dt' $\neq$ dt, obtemos a transformação de velocidades:

$$v'_x = \frac{v_x - u}{1 - \frac{v_x . u}{c^2}}$$

$$v'_y = v_y \frac{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}{1 - \frac{v_x u}{c^2}} \qquad (1.26)$$

$$v'_z = v_z \frac{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}{1 - \frac{v_x u}{c^2}}$$

Conforme também era esperado, a lei clássica de adição de velocidades não é mais válida. Também chama a atenção o fato de as velocidades v_y' e v_z' <u>dependerem</u> de v_x, o que não ocorria no caso clássico. Matematicamente, isto decorre da expressão de *dt'*. Intuitivamente, podemos pensar em todos estes fatores como "mecanismos" para transformar velocidades no cenário delineado pelos postulados, no qual a velocidade da luz é a mesma em todos os referenciais.

1.8 – A Relatividade da Simultaneidade

Temos, de fato, intuição da simultaneidade de dois eventos? Dois eventos simultâneos para um observador são simultâneos do ponto de vista de todos observadores? São perguntas de grande relevância, que põem em xeque nosso senso comum. Podemos pensar: ora, se duas coisas acontecem ao mesmo tempo, não há o que discutir, elas serão simultâneas também para os demais observadores. Porém, a relatividade tem uma resposta diferente: a simultaneidade de dois eventos não é absoluta.

Mais uma vez, lançaremos mão de um exemplo para esclarecer essa discussão.

EXEMPLO 1.6

Imagine que você deseja sincronizar dois relógios, ou seja, fazer com que eles comecem a operar no mesmo instante. Para realizar tal tarefa, você os coloca a uma mesma distância de uma fonte luminosa. Assim, quando a fonte for ativada, a luz atingirá os relógios no mesmo momento e dará início ao trabalho de ambos.

Suponha que um cientista **O'**, que se move com velocidade u_x em relação ao aparato, observe o mesmo fenômeno. A Fig. 1.10 traz um esquema da situação [Krane, 1983].

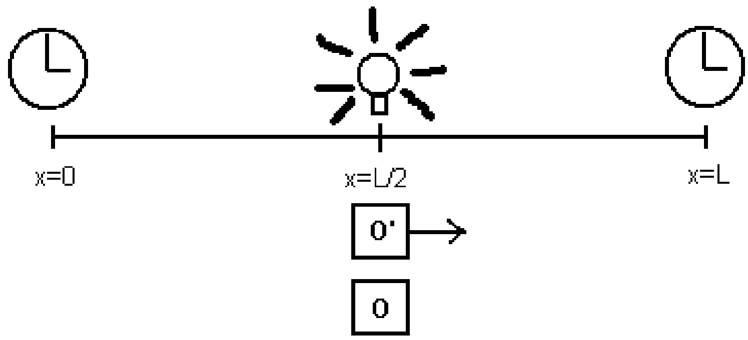


Figura 1.10

Do ponto de vista de **O**, temos:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 0 \\
x_2 &= L \\
t_1 &= t_2 = \frac{L}{2c}
\end{aligned}
\qquad (1.27)
$$

sendo x_1 a posição do primeiro relógio, x_2 a posição do segundo, t_1 o instante de tempo em que o raio atinge o primeiro relógio e t_2 o instante em que o raio atinge o segundo. O instante $t = 0$ é o momento em que a luz deixa a fonte.

Para que conheçamos o ponto de vista de **O'**, aplicaremos a transformação de Lorentz:

$$t_1' = \frac{t_1 - \frac{u.x_1}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} = \frac{\frac{L}{2c} - \frac{u.0}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} = \frac{L}{2c}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \qquad (1.28)$$

$$t_2' = \frac{t_2 - \frac{u.x_2}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} = \frac{\frac{L}{2c} - \frac{uL}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \qquad (1.29)$$

Tais equações nos conduzem a:

$$\Delta t' = t_1' - t_2' = \frac{\frac{uL}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \neq 0 \qquad (1.30)$$

Isso nos mostra que os dois eventos <u>não serão simultâneos do ponto de vista de **O'**</u>. De fato, $t_2' < t_1'$, o que indica que o relógio 2 começará a funcionar mais cedo desse ponto de vista, não havendo, portanto, sincronismo. A negação da simultaneidade absoluta provoca também uma importante mudança de paradigma em relação à Física Clássica.

Podemos atribuir a validade de (1.30) ao termo espacial presente na transformação t' (1.25), o que indica que a relatividade da simultaneidade <u>se liga intimamente à concepção de espaço-tempo</u>. Convém frisar que dois eventos com a mesma posição são sempre simultâneos do ponto de vista de <u>todos</u> referenciais.

Para concluir a seção, apresentamos um trecho do livro "O Valor da Ciência", de Henri Poincaré [Poincaré, 1995], que belamente antecipou concepções relativísticas sobre o tempo:

"Não temos intuição direta da simultaneidade, nem a da igualdade entre duas durações. Se cremos ter esta intuição, é uma ilusão."

1.9 – O Paradoxo dos Gêmeos

Um dos mais célebres experimentos imaginários da Física Moderna é o *paradoxo dos gêmeos*. Convém que analisemos brevemente tal construção mental.

Dois gêmeos, João e Joana, estão sobre a Terra. João resolve partir, num foguete, para uma viagem. Ao chegar, viajando com uma velocidade próxima à da luz, a um ponto distante do espaço, ele resolve voltar. Retorna, então, a nosso planeta. Ao chegar, percebe com grande surpresa que sua irmã já é avó, enquanto ele ainda é um adolescente.

De fato, à primeira vista isso não nos causa surpresa, pois vimos que a passagem do tempo é relativa. Porém, conforme a relatividade indica, não há referenciais inerciais privilegiados, o que leva à contradição: como um dos irmãos é mais velho? Ora, se João está em movimento com relação a Joana, Joana também está em movimento com respeito a João. Conseqüentemente, ambos deveriam "ter o direito" de se considerarem mais jovens e mais velhos: surge um paradoxo.

A chave para eliminar tal impasse é atentar para o fato de que <u>apenas um dos gêmeos (João) sofre aceleração (para retornar)</u>, o que torna seu referencial "diferenciado". Isso gera uma assimetria que, de certa maneira, soluciona o paradoxo. Um experimento baseado no transporte de relógios de altíssima precisão (que fazem o papel dos gêmeos) em aviões levou a resultados favoráveis a essa interpretação (e, portanto, à relatividade) [Halliday e Resnick, 1994].

1.10 - Dinâmica Relativística: Massa e Momento Linear

Até agora, vínhamos estudando as conseqüências dos dois postulados que se relacionam mais diretamente à cinemática. Entretanto, como veremos, a proposta relativística conduz também a mudanças profundas na concepção da dinâmica.

Dentre os vários princípios físicos existentes, as leis de conservação ocupam um lugar de destaque. É difícil imaginar um mundo no qual energia ou massa seja criada arbitrariamente, ou em que o momento linear de um conjunto de partículas seja modificado num sistema fechado. Considera-se, portanto, de grande interesse analisar tais princípios à luz da relatividade.

Uma primeira "cobaia" pode ser a lei da conservação do momento linear. Essa lei, em termos simples, afirma que o momento linear total de um sistema no qual não há influência de forças externas se conserva. <u>Do ponto de vista do princípio da relatividade</u>, dado que essa lei se aplica a um sistema qualquer, é fundamental que ela continue sendo válida para <u>todos observadores em movimento uniforme</u> relativamente ao sistema em questão. A mecânica clássica relaciona observadores em movimento uniforme através da transformação de Galileu, e propõe a seguinte expressão para o momento linear **p** de uma partícula:

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} \tag{1.31}$$

sendo **v** a velocidade da partícula em um referencial **O**.

Pode-se verificar que a expressão (1.31) conduz à esperada conclusão de que, caso a conservação do momento valha para um observador **O** qualquer, ela valerá para todos demais observadores em movimento uniforme em relação a **O**, desde que a relação entre observadores seja a expressa pela transformação de Galileu. Em outras palavras, isso significa que o princípio clássico da relatividade é válido para o “pacote” equação (1.31)/transformação de Galileu.

No entanto, sabemos que, do ponto de vista da relatividade, a transformação de Galileu não é adequada: é a transformação de Lorentz que define a relação entre observadores distintos de uma maneira coerente com os postulados fundamentais. Porém, será que essa transformação forma, em conjunto com a equação (1.31), um “pacote coerente” com o princípio da relatividade de Einstein? A equação (1.31), tão intimamente ligada ao cenário clássico, mantém sua solidez no contexto relativístico? Passemos à investigação.

Seja a seguinte colisão, que é vista por um observador **O** da maneira exibida na Fig. 1.11. Duas partículas, marcadas antes da colisão com os rótulos 1 e 2, chocam-se e permanecem juntas em repouso. Suas massas são todas iguais a *m* [Krane, 1983].

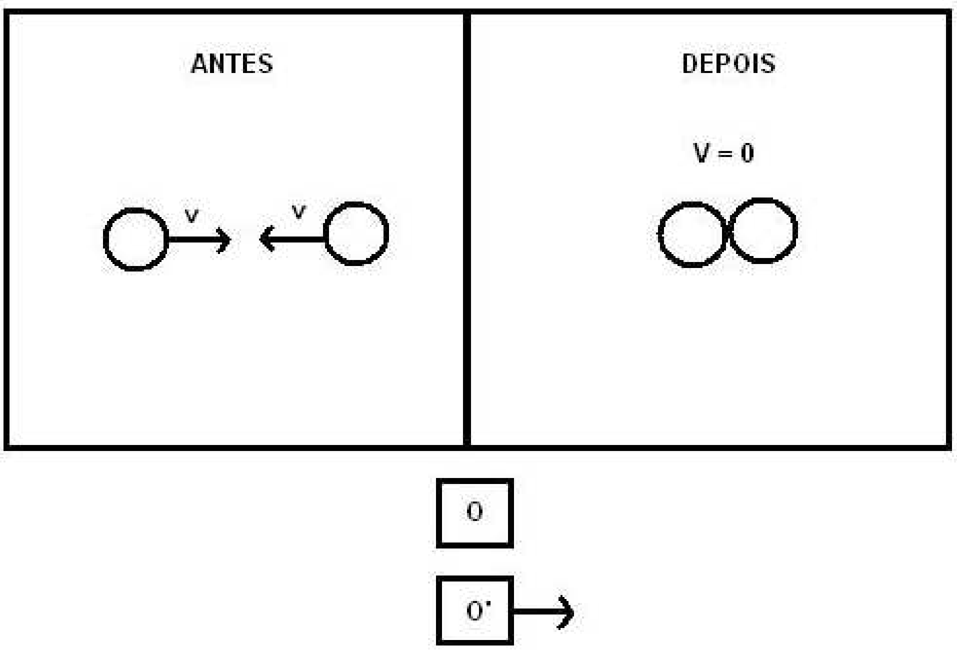


Figura 1.11

Passemos a uma análise “clássica” desta colisão. Vejamos, em primeiro lugar, o ponto de vista de **O**. Calculemos o momento linear total antes da colisão:

$$\mathbf{p}_{\text{antes}} = (\text{mv} - \text{mv}).\mathbf{a_x} = 0.\mathbf{a_x} \tag{1.32}$$

Agora, o momento linear total depois da colisão:

$$\mathbf{p}_{\text{depois}} = (2\text{m})0\mathbf{a_x} = 0.\mathbf{a_x} \tag{1.33}$$

Com isso, concluímos que o momento foi conservado, o que, aliás, não chega a surpreender. Tentemos agora analisar como um observador **O’**, com velocidade **u** (na direção x) em relação a **O**, vê o fenômeno. Para que possamos obter as velocidades no novo referencial, utilizaremos a transformação de Galileu, expressa na equação (1.3).

$$\mathbf{p'}_{antes} = [m(v\text{-}u) + m(\text{-}v\text{-}u)]\mathbf{a_x} = (\text{-}2mu)\mathbf{a_x} \qquad (1.34)$$

Calculemos o momento após a colisão:

$$\mathbf{p'}_{depois} = (2m)(0\text{-}u)\mathbf{a_x} = (\text{-}2mu)\mathbf{a_x} \qquad (1.35)$$

Vemos que o momento, mais uma vez, conservou-se.

Não nos esqueçamos, entretanto, que nosso objetivo é buscar um ponto de vista relativístico, o que nos proíbe o uso da lei clássica de adição de velocidades. Isso significa que é preciso transformar as velocidades através das equações de Lorentz. Vejamos qual será o ponto de vista de **O'**:

$$\mathbf{p}'_{antes} = \left[m\frac{v-u}{1-\frac{vu}{c^2}} + m\frac{-v-u}{1+\frac{vu}{c^2}} \right]\mathbf{a}_x \qquad (1.36)$$

$$\mathbf{p}'_{\mathbf{depois}} = \left[2m\frac{0-v}{1-\frac{0v}{c^2}} \right]\mathbf{a}_x = -2mv\mathbf{a}_x \qquad (1.37)$$

Percebemos que o momento linear não se conserva. A conclusão é que a expressão clássica do momento é incapaz de engendrar um cenário em que a lei de conservação seja válida para todos os referenciais inerciais. Para que nos mantenhamos fiéis às idéias mais essenciais do programa relativístico, faz-se necessário buscar uma nova definição para o momento linear.

O que seria razoável esperar, num primeiro momento, da expressão que buscamos? Para velocidades muito menores que a da luz, é razoável alimentar a expectativa de que a fórmula relativística forneça valores próximos aos obtidos através de sua contraparte clássica. Em particular, é lícito imaginar que, para uma velocidade nula, o momento linear seja também nulo.

A expressão capaz de atender a esses requisitos básicos e, além disso, conservar o momento linear sob a égide da transformação de Lorentz, é:

$$\mathbf{p} = \frac{m_0\mathbf{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad (1.38)$$

sendo m_0 a massa da partícula medida por um observador em repouso relativamente a ela e **v** a velocidade da partícula do ponto de vista deste mesmo observador. Tal expressão é comumente reescrita como:

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}, \text{ com } m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{1.39}$$

sendo *m* entendida como uma *massa relativística* que aumenta com a velocidade v.

Recomendamos, desde já, muito cuidado com essa nova interpretação do conceito de massa. No caso, ela nos oferece uma ponte entre o “novo mundo” e a expressão clássica do momento. Não obstante, se fôssemos aplicá-la sem maiores considerações, por exemplo, à lei de Newton **F** = m**a**, chegaríamos a um resultado incoerente. O mesmo ocorreria se a usássemos na fórmula clássica da energia cinética. Entretanto, uma vez que esteja o leitor ciente dessas armadilhas, torna-se altamente desejável que reflita sobre a relatividade de uma grandeza tão fundamental.

Havendo, pois, definido o momento linear no contexto da nova dinâmica, estamos prontos para a conquista de novas fronteiras. Podemos, por exemplo, indagar: qual é a expressão relativística da força? Embora estejamos acostumados a pensar na fórmula **F** = m**a,** a expressão “mais geral” é

$$\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt, \tag{1.40}$$

ou seja, a força é <u>a variação temporal do momento linear</u>. Tal expressão continua válida no contexto relativístico, desde que usemos a expressão (1.38), que <u>não</u> levará a **F** = m**a**.

1.11 – Dinâmica Relativística: Energia Cinética

Definidos momento e força, tratemos de considerar a noção de energia cinética. Suponhamos que uma partícula seja acelerada, na direção *x*, a partir do repouso, até uma velocidade *v*. Podemos, como na física clássica, fazer uso do fato de que o trabalho realizado pela força é igual à variação da energia cinética da partícula, ou seja:

$$\tau = \Delta E_c = E_{cfinal} - E_{cinicial} \tag{1.41}$$

sendo τ o trabalho e E_c a energia cinética. No contexto por nós delimitado, a definição clássica do trabalho fornece:

$$\tau = \int_{x_{inicial}}^{x_{final}} F.dx \tag{1.42}$$

Podemos escrever, partir de (1.40), que:

$$F = \frac{dp}{dt} \tag{1.43}$$

sendo p definido como em (1.38). <u>Dispensamos as notações vetoriais por estarmos lidando apenas com a direção *x*.</u>

Substituindo (1.43) em (1.42), obtemos:

$$\tau = \int_{x_{inicial}}^{x_{final}} F.dx = \int_{x_{inicial}}^{x_{final}} \frac{dp}{dt}.dx = \int_{v_{inicial}}^{v_{final}} v.dp \tag{1.44}$$

Utilizemos a fórmula da integração por partes

$$\int v.dp = vp - \int p.dv \tag{1.45}$$

em conjunto com (1.45), e tenhamos em mente que $v_{inicial} = 0$:

$$\tau = \frac{m_0.v^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - \int_0^v \frac{m_0.v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.dv \tag{1.46}$$

Para que resolvamos a integral, é vantajoso fazer a substituição:

$$u = v^2/c^2 \rightarrow du = (2v/c^2)\, dv \tag{1.47}$$

Ela então se torna:

$$\int_0^{\frac{v^2}{c^2}} \frac{m_0.c^2.du}{2.\sqrt{1-u}} = m_0.c^2\left[-\sqrt{1-u}\,\right]_0^{v^2/c^2} = m_0.c^2.\left[1-\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\right] \tag{1.48}$$

Voltando a (1.46), obtemos, após algumas manipulações:

$$\tau = E_{cfinal} - E_{cinicial} = m_0.c^2.\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - 1\right) \tag{1.49}$$

Como supusemos que a partícula foi acelerada a partir do repouso, temos $E_{cinicial} = 0$, o que, por fim, leva-nos a:

$$E_c = m_0.c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - 1\right) = m_0.c^2\left(\gamma - 1\right) \tag{1.50}$$

que é a fórmula da energia cinética relativística.

1.12 - Relação entre Massa e Energia

Poderíamos reescrever (1.50) como:

$$E_c = \gamma m_0.c^2 - m_0.c^2 = E - E_0 \tag{1.51}$$

Manipulando (1.51), chegamos a:

$$E = E_c + E_0 \tag{1.52}$$

Podemos interpretar (1.52) como uma manifestação de que a *energia total* de uma partícula, $E=\gamma m_0 c^2$, é a soma da energia cinética, associada ao movimento, e de uma energia de repouso E_0. Esta energia é dada por:

$$E_0 = m_0.c^2 \tag{1.53}$$

sendo, como já dissemos, m_0 a massa de repouso da partícula.

É pertinente que façamos uma breve reflexão. O raciocínio que acabamos de expor, cujo ponto de partida foi a obtenção de uma fórmula para o momento linear coerente com a idéia de conservação e com a transformação de Lorentz, conduziu-nos a resultados intrigantes. A equação (1.53), por exemplo, mostra, com sua simplicidade desconcertante, que a massa de repouso de uma partícula é também uma forma de energia. Sustenta, inversamente, que qualquer quantidade de energia tem a si associada uma quantidade equivalente de massa. Massa e energia, para a relatividade, são, por assim dizer, faces da mesma moeda. A expressão para a energia total, $E = mc^2 = \gamma m_0.c^2$, simplesmente reafirma o que foi dito, com a ressalva de que nela a massa envolvida é a relativística, maior que a de repouso graças à energia cinética. Com isso, percebemos que essa modalidade de energia se liga intimamente à dilatação da massa, que discutimos quando abordamos o momento linear.

A comprovação do intercâmbio massa-energia foi, desde a primeira hora, um assunto de grande interesse. Einstein, em seu artigo de 1906, "A inércia de um corpo depende de seu conteúdo energético?", sugeriu que as energias liberadas por reações envolvendo sais de rádio talvez pudessem permitir uma verificação adequada de (1.53). Na verdade, comprovações mais sólidas (e trágicas) vieram com o avanço do estudo das reações nucleares, as quais liberam energias suficientemente grandes para levar a uma variação sensível da massa dos reagentes. Experimentos dessa natureza são amplamente favoráveis à relatividade.

Um outro aspecto dinâmico muito relevante diz respeito à energia cinética. Vejamos, para uma massa de repouso de 1kg., como a mesma varia de acordo com o fator v/c (velocidade da partícula em relação à da luz).

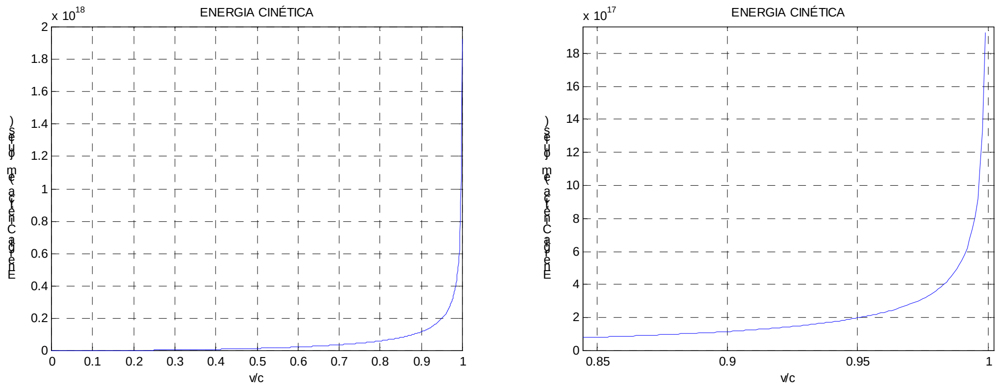


Figura 1.12

Conforme nos mostram o primeiro gráfico e sua ampliação, representados na Fig. 1.12, a energia cinética da partícula tende a aumentar de forma cada vez mais pronunciada à medida que *v* tende a *c*. Além disso, para acelerar a partícula até a velocidade da luz, <u>seria preciso um trabalho infinito</u>, ou seja, <u>nada que possua massa de repouso não-nula pode atingir a velocidade da luz</u>.

Uma outra forma de internalizar esses conceitos é sugerida pela análise da expressão para a força relativística, dp/dt:

$$F = \frac{dp}{dt} = \frac{dp}{dv}.\frac{dv}{dt} = \left[\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + \frac{m_0\left(\frac{v^2}{c^2}\right)}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} \right].a = \frac{m_0}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}}.a \qquad (1.54)$$

Imaginemos que seja aplicada a uma partícula em repouso, com m_0 = 1kg, uma força de 1N. Sua aceleração seria, do ponto de vista da física clássica, constante e igual a 1m/s^2. No entanto, uma aceleração constante permitiria que, por exemplo, 6.10^8 segundos depois do experimento, a partícula se movesse com o dobro da velocidade da luz, o que, como acabamos de ver, é inadmissível na teoria da relatividade. Como (1.54) já adianta, a aceleração de uma partícula, para uma força constante, <u>depende de sua velocidade</u>. Na Fig. 1.13, mostramos qual será a aceleração da partícula sob influência de uma força de 1N, em função da relação v/c, para a relatividade e para a física clássica.

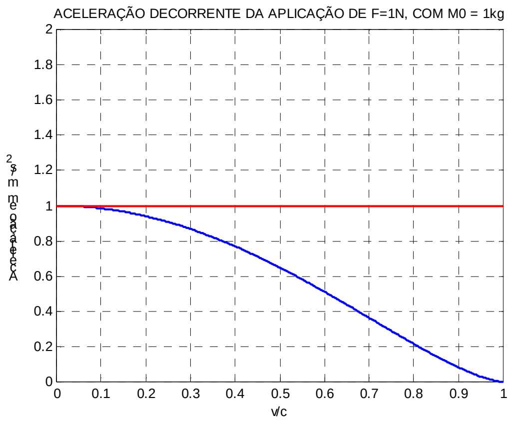


Figura 1.13

Notamos que, quanto maior a velocidade da partícula, menos consegue a força de 1N prosseguir com o aumento de velocidade, ao contrário do que ocorria no caso clássico. Quando a velocidade tende à da luz, a aceleração tende a zero, o que condiz com as conclusões por nós obtidas a partir do estudo da energia cinética. Essa visível diminuição nos remete, mais uma vez, à idéia de aumento da massa, da "inércia" da partícula, com o aumento da velocidade.

Vale a pena ainda exibir um conjunto de fórmulas que relacionam diretamente o momento e a energia do ponto de vista de um observador **O** com as mesmas grandezas do ponto de vista de um observador **O',** que, como de costume, move-se com velocidade u (na direção *x*) em relação a **O**:

$$\begin{aligned} p_x^{'} &= \frac{p_x - \frac{u.E}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \\ p_y^{'} &= p_y \\ p_z^{'} &= p_z \\ E^{'} &= \frac{E - p_x.u}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \end{aligned} \qquad (1.55)$$

sendo **p** = (p_x, p_y, p_z) e **p'** = ($p_x^{'}$, $p_y^{'}$, $p_z^{'}$) respectivamente os momentos para **O** e **O',** e E e E' a energia total para estes observadores. Foi Max Planck quem primeiro explicitou essas relações, num dos primeiros artigos "relativísticos" influenciados, mas não escritos, por Einstein [Pais, 1995]. Seria justo citar que Planck e Max von Laue estiveram entre os primeiros cientistas a procurar o jovem Einstein para manifestar interesse em seu trabalho sobre a relatividade. Einstein, mais tarde, manifestaria a Planck sua gratidão nestes termos: "O senhor foi o primeiro a defender a teoria da relatividade" [Pais, 1995].

Voltemo-nos para um outro aspecto importante. Sabemos que, na mecânica clássica, a lei da conservação do momento e a lei da conservação da energia são princípios distintos.

Na relatividade, como, aliás, pode-se deduzir de (1.55), as duas leis estão intimamente unidas. Em termos mais precisos, elas se tornam aspectos de um único princípio de conservação. Assim, por exemplo, para que o momento linear se conserve do ponto de vista de todos os possíveis observadores inerciais, é preciso que a energia total também se conserve, e vice-versa [Symon, 1982][1]. Também é muito importante atentar para o fato de que as leis de conservação da massa e da energia se fundem numa única lei. Não faz mais sentido buscar isoladamente a conservação dessas grandezas.

A dinâmica relativística, como era esperado, fornece resultados muito próximos aos clássicos para velocidades muito menores que a da luz. Em outras palavras, a Física Clássica continua "válida" para uma determinada gama de aplicações.

Por fim, vale a pena mencionar que experimentos realizados com partículas dotadas de altas velocidades têm dado origem a resultados notavelmente próximos aos previstos pelas expressões apresentadas. Particularmente, já se conseguiu acelerar elétrons até velocidades muito próximas à da luz, sem que, no entanto, tenha sido possível ultrapassá-la. Para a relatividade, nas palavras do escritor Isaac Asimov, a velocidade da luz é o "limite de velocidade definitivo", muito distante dos habituais 80 km/h [Halliday e Resnick, 1994].

BIBLIOGRAFIA DO CAPÍTULO 1

A. Einstein e outros, *The Principle of Relativity* (coletânea de artigos originais sobre relatividade), Dover, 1924.

R. Eisberg, *Fundamentals of Modern Physics*, Wiley, 1961.

D. Halliday, R. Resnick, *Fundamentos da Física*, LTC, 1994.

K. Krane, *Modern Physics*, Wiley, 1983.

H. Ohanian, *Modern Physics*, Prentice Hall, Second Edition, 1995.

A. Pais, *Sutil é o Senhor: a Ciência e a Vida de Albert Einstein*, Nova Fronteira, 1995.

H. Poincaré, *O Valor da Ciência*, Contraponto, 1995.

R. Serway, *Physics for Scientists and Engineers*, Saunders College Publishing, Third Edition, 1990.

M. Simonsen, *Ensaios Analíticos*, Fundação Getúlio Vargas, 1994.

K. Symon, *Mecânica*, Editora Campus, Sexta Edição, 1982.

[1] No exemplo de colisão apresentado anteriormente, é fundamental que se aplique a lei da conservação da energia total relativística para que se obtenha a massa de repouso do conjunto formado pelas duas partículas após a colisão (note que a energia cinética do par não pode simplesmente "desaparecer").