Elementos da Teoria de Conjuntos Infinitos

Prof. Romis Attux

IA369S

Primeiro Semestre de 2013

Teoria dos Conjuntos

- A teoria de conjuntos, cujo estudo foi iniciado pelo brilhante matemático alemão (nascido na Rússia) Georg Cantor, forma uma área de pesquisa em matemática particularmente bela e, em certa medida, “misteriosa”.
- Esperamos que alguns elementos dessa beleza e também alguns aspectos que causam estupor à primeira vista fiquem claros ao longo desta apresentação.

Georg Cantor

- Cantor nasceu em São Petersburgo, no ano de 1845. Ainda muito jovem, ele se mudou com a família para a Alemanha, mais especificamente, para a cidade de Frankfurt.
- Um ótimo aluno em matemática, seu pai imaginava que ele se tornaria "uma estrela brilhante no firmamento da Engenharia" (!), mas o jovem tinha outros planos: estudar matemática pura em Berlim [Hawking, 2007].

Georg Cantor

- Seu pai deu a sua anuência, e Cantor, mais uma vez, se sobressaiu: em apenas quatro anos, ele se tornou matemático e doutor em matemática [Hawking, 2007].
- Após algum tempo, Cantor se estabeleceu na Universidade de Halle, seu lar acadêmico até o fim.
- Ao ter se deparado com um problema relacionado a séries trigonométricas, Cantor se voltou para o estudo em cujo contexto viria a fazer uma verdadeira revolução: o estudo do *infinito*.

Georg Cantor

- No contexto desse estudo, Cantor mostraria, entre outras coisas, que há, por assim dizer, “diferentes graus” de infinito. Essa visão de infinito, de certa forma, é diferente daquela que se constrói ao pensar em potencialidade e atualidade no sentido aristotélico.
- Busquemos analisar algumas das idéias de Cantor.

Cardinalidade

- Em termos intuitivos, o conceito de cardinalidade se vincula à noção de número de elementos de um dado conjunto. Por exemplo, tanto o conjunto $A = \{1, 2, 3\}$ quanto o conjunto $B = \{a, b, c\}$ possuem cardinalidade igual a 3.
- Avaliar a cardinalidade de um conjunto finito é, portanto, uma tarefa um tanto quanto direta, mas veremos que o assunto não é tão trivial quando se lida com coleções infinitas.

Cardinalidade

- Tomemos, por exemplo, o bem conhecido conjunto dos números naturais, que chamaremos de **N**:

  N = {0, 1, 2, 3, ...}

- Tomemos, agora, o conjunto dos números naturais que são pares, conjunto este que denominaremos **P**:

  P = {0, 2, 4, 6, ...}

Cardinalidade

- Imagine agora que perguntemos: quantos elementos possui **N**? E quantos elementos possui **P**? Ora, imediatamente intuímos que a resposta a ambas as questões envolve, digamos, uma quantidade infinita.
- No entanto, imagine agora que perguntemos: qual dos conjuntos possui maior cardinalidade, **N** ou **P**?

Cardinalidade

- Podemos construir uma resposta de acordo com a seguinte linha de raciocínio:
  - **P** é um subconjunto de **N**;
  - A “parte” é menor que o “todo”;
  - Portanto, card(**P**) < card(**N**).
- Como contestar isso, se vemos com clareza que **N** contém os pares e também os ímpares?
- No entanto, há aqui um paradoxo, conforme já percebia o genial Galileu Galilei (1564-1642). Vejamos a seguir um trecho de seus “Discorzi e dimostrazioni matematiche, intorno à due nuove scienze” (1638) (tradução de Crew e de Salvio – Dover).

Discorsi

Simplicio: Here a difficulty presents itself which appears to me insoluble. Since it is clear that we may have one line greater than another, each containing an infinite number of points, we are forced to admit that, within one and the same class, we may have something greater than infinity, because the infinity of points in the long line is greater than the infinity of points in the short line. This assigning to an infinite quantity a value greater than infinity is quite beyond my comprehension.

Salviati: This is one of the difficulties which arise when we attempt, with our finite minds, to discuss the infinite, assigning to it those properties which we give to the finite and limited; but this I think is wrong, for we cannot speak of infinite quantities as being the one greater or less than or equal to another. To prove this I have in mind an argument which, for the sake of clearness, I shall put in the form of questions to Simplicio who raised this difficulty.

I take it for granted that you know which of the numbers are squares and which are not.

Simplicio: I am quite aware that a squared number is one which results from the multiplication of another number by itself; this 4, 9, etc., are squared numbers which come from multiplying 2, 3, etc., by themselves.

Salviati: Very well; and you also know that just as the products are called squares so the factors are called sides or roots; while on the other hand those numbers which do not consist of two equal factors are not squares. Therefore if I assert that all numbers, including both squares and non-squares, are more than the squares alone, I shall speak the truth, shall I not?

Simplicio: Most certainly.

Discorsi

Salviati: If I should ask further how many squares there are one might reply truly that there are as many as the corresponding number of roots, since every square has its own root and every root its own square, while no square has more than one root and no root more than one square.

Simplicio: Precisely so.

Salviati: But if I inquire how many roots there are, it cannot be denied that there are as many as the numbers because every number is the root of some square. This being granted, we must say that there are as many squares as there are numbers because they are just as numerous as their roots, and all the numbers are roots. Yet at the outset we said that there are many more numbers than squares, since the larger portion of them are not squares. Not only so, but the proportionate number of squares diminishes as we pass to larger numbers, Thus up to 100 we have 10 squares, that is, the squares constitute 1/10 part of all the numbers; up to 10000, we find only 1/100 part to be squares; and up to a million only 1/1000 part; on the other hand in an infinite number, if one could conceive of such a thing, he would be forced to admit that there are as many squares as there are numbers taken all together.

Sagredo: What then must one conclude under these circumstances?

Salviati: So far as I see we can only infer that the totality of all numbers is infinite, that the number of squares is infinite, and that the number of their roots is infinite; neither is the number of squares less than the totality of all the numbers, nor the latter greater than the former; and finally the attributes "equal," "greater," and "less," are not applicable to infinite, but only to finite, quantities. When therefore Simplicio introduces several lines of different lengths and asks me how it is possible that the longer ones do not contain more points than the shorter, I answer him that one line does not contain more or less or just as many points as another, but that each line contains an infinite number. (Fonte: Projeto Gutenberg)

O Paradoxo de Galileu

- Trata-se do *paradoxo de Galileu*, e, sem dúvida, a sua solução desafia o senso comum.
- No entanto, não nos esqueçamos de que estamos lidando com conjuntos infinitos, e a nossa efetiva capacidade de lidar com entidades desse tipo é, até hoje, objeto de questionamento por parte de lógicos e matemáticos.

Cardinalidade

- Fundamentalmente, voltando aos conjuntos **N** e **P**, o que ocorre é que somos capazes de estabelecer facilmente um mapeamento biunívoco entre os dois conjuntos: f: **N** $\rightarrow$ **P** tal que *f(n) = 2n*. Assim, temos as seguintes associações: 0 $\rightarrow$ 0, 1 $\rightarrow$ 2, 2 $\rightarrow$ 4, 3 $\rightarrow$ 6, 4 $\rightarrow$ 8 e assim indefinidamente.
- Ora, uma vez que há uma função bijetora capaz de mapear cada elemento de **N** em um elemento de **P**, somos obrigados a aceitar que card (**N**) = card(**P**)!

Cardinalidade

- O fato de as cardinalidades serem iguais mesmo valendo **P** $\subset$ **N** só é justificável porque estamos lidando com conjuntos infinitos.
- Mostra-se também que a cardinalidade dos inteiros é igual à dos naturais. Isso pode ser visto se fizemos uma lista do seguinte tipo: 0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, ...

Cardinalidade

- Os racionais também possuem a mesma cardinalidade dos naturais, o que pode ser mostrado, por exemplo, apresentando as possíveis frações como uma seqüência com soma numerador-denominador crescente: 1/1, 2/1, 1/2, 1/3, 2/2, 3/1, 4/1, ... [Petzold, 2008][Hawking, 2007].
- Também é demonstrável que o conjunto das raízes de equações algébricas tem a mesma cardinalidade dos naturais [Petzold, 2008].

Conjuntos Contáveis

- Todos esses conjuntos são *contáveis*, já que possuem cardinalidade igual à do conjunto dos números naturais. De certa forma, associamos a contagem de elementos ao estabelecimento de uma bijeção entre os naturais e outros elementos quaisquer.
- Mas será que isso é sempre possível?

Cardinalidade dos Reais

- Um dos resultados mais famosos do trabalho de Cantor é a sua prova de que a cardinalidade dos reais é maior que a dos naturais, ou seja, de que os reais *não formam um conjunto contável*.
- Entenderemos a razão de ser desse fato através do clássico argumento diagonal.

Argumento Diagonal

- Suponha que façamos uma lista de números reais (no caso, entre 0 e 1) imaginando que o conjunto seja contável.

n	real
0	0,3422385611098...
1	0,9899612100473...
2	0,1111497602343...
3	0,8023776091121...
4	0,3032387763121...
...	

Argumento Diagonal

- Imaginemos agora que tomemos o primeiro dígito do primeiro número, o segundo dígito do segundo número, o terceiro dígito do terceiro número, e assim por diante.

n	real
0	0,**3**422385611098...
1	0,9**8**99612100473...
2	0,11**1**1497602343...
3	0,802**3**776091121...
4	0,3032**3**87763121...
...	

Argumento Diagonal

- Os dígitos selecionados formam o seguinte número 0,38133...
- Suponha agora que adicionemos “1” a cada um dos dígitos desse número (sendo que 9 + 1 = 0). O novo número formado será: 0,49244...
- Ora, esse número difere do primeiro número da lista no primeiro dígito, do segundo número no segundo dígito e assim por diante, ou seja, **ele não pode estar na lista!**

Argumento Diagonal

- Ora, isso significa que foi mostrado que há ao menos um número real que não pode ser associado à seqüência dos naturais, o que nos leva a concluir que ambos os conjuntos possuem cardinalidades diferentes.
- De fato, os reais possuem cardinalidade maior que a dos naturais, o que significa que o conjunto dos reais **não é contável**.

Cardinalidade dos Reais

- Cantor descobriu ainda que a cardinalidade dos reais é igual à cardinalidade do conjunto dos pontos do plano. Em outras palavras, há tantos reais na reta real quanto pares ordenados de reais (isso pode ser mostrado por meio da "mescla" das expansões de dois reais).
- Como mostrado em [Petzold, 2008], Cantor ficou tão surpreso com esse resultado que escreveu a Dedekind: "*Je le vois, mais je ne le crois pas*.".

Conjunto de Partes

- Considere o conjunto **A** = {0, 1}. Os possíveis subconjuntos de **A** são o conjunto vazio ∅, {0}, {1} e o próprio **A**. É possível mostrar que, se construirmos o conjunto dos subconjuntos de **A**, ele terá cardinalidade igual a $2^{card(\mathbf{A})}$. Esse resultado pode ser entendido de modo direto se pensarmos em cada subconjunto como uma string de bits indicando a presença ou a ausência de cada elemento.
- O conjunto dos subconjuntos de **A** recebe o nome de conjunto de partes de **A** (ou, em inglês, *power set*).

Conjunto de Partes e Transfinitos

- Cantor associou à cardinalidade dos naturais (e inteiros, e racionais) um número transfinito denominado áleph zero - $\aleph_0$. Interessantemente, é possível realizar operações com esses números...por exemplo, mostra-se que $\aleph_0+1 = \aleph_0$, e também que $2\aleph_0 = \aleph_0$.
- Por outro lado, o conjunto de partes sempre tem cardinalidade maior que o conjunto original. Em outras palavras, mostra-se que $2^{\aleph_0} > \aleph_0$.

Contínuo

- É possível mostrar que a cardinalidade dos reais é exatamente igual à cardinalidade do conjunto de partes dos naturais ($c = 2^{\aleph_0}$) . Isso pode ser feito se imaginarmos os reais como seqüências de bits e nos lembrarmos de que o conjunto dos subconjuntos de naturais também pode ser entendido dessa maneira.

Conjunto de Partes e Infinitos

- Vale ressaltar que Cantor demonstrou que, para qualquer conjunto A, a relação de que $2^{card(\mathbf{A})} > card(\mathbf{A})$, ou seja, não é possível estabelecer uma bijeção entre um conjunto e seu conjunto de partes.
- Curiosamente, aplicando repetidamente essa idéia, podemos chegar a infinitos de “crescente cardinalidade”.

Paradoxos

- Lidar com conjuntos infinitos corresponde a caminhar em terreno perigoso. Por exemplo, imagine que definamos o "todo-poderoso" *conjunto de todos os conjuntos* **C**. Pelo resultado de Cantor, o conjunto de partes de **C** deveria ter cardinalidade maior que **C**: como isso seria possível??
- O paradoxo de Russell também é instrutivo: seja **R** o conjunto dos conjuntos que não estão contidos em si mesmos. Ora, se **R** não está contido em si mesmo, então ele deve pertencer a **R**, o que é uma contradição. Por outro lado, se **R** está contido em si mesmo, então ele deve ser um conjunto que não está contido em si mesmo, o que leva, mais uma vez, a uma contradição.
- Paradoxos como esses levaram a um enorme esforço por parte dos matemáticos no sentido de fortalecer as bases lógicas da disciplina, como veremos posteriormente.

Georg Cantor (cont.)

- Os resultados de Cantor, apesar de brilhantes, não foram bem aceitos por todos os membros da comunidade acadêmica. Em particular, Leopold Kronecker não tinha apreço pela teoria de conjuntos como descrita por Cantor, e teria se oposto ao pleito deste por uma vaga de docente em Berlim [Hawking, 2007].

Georg Cantor

- Cantor enfrentou várias crises relativas a dificuldades psiquiátricas ao longo de sua vida, tendo, inclusive, passado muitos anos hospitalizado.
- Ao longo da Primeira Guerra Mundial, Cantor passou por muitas dificuldades financeiras e não pode receber uma homenagem por seu septuagésimo aniversário. Em 6 de janeiro de 1918, ele faleceu num sanatório.

Georg Cantor

- As idéias de Cantor foram fundamentais para moldar muito da matemática do século XX. Veremos, por exemplo, que o paper de Turing se inspira fortemente nelas, e o mesmo vale para o clássico trabalho de Kurt Gödel.
- Gostaríamos de terminar esta apresentação citando o trecho de um texto do grande David Hilbert sobre o infinito, encontrado em [Carnielli e Epstein, 2009]: “(...) Esta teoria (*a teoria dos números transfinitos*) me parece o mais refinado produto do gênio matemático e uma das façanhas supremas da pura atividade intelectual humana. (...)”.

Referências

[Carnielli e Epstein, 2009] W. Carnielli, R. L. Epstein, *Computabilidade, Funções Computáveis, Lógica e os Fundamentos da Matemática*, Editora UNESP, 2009.

[Hawking, 2007] S. Hawking, *God Created the Integers*, Running Press, 2007.

[Petzold, 2008] C. Petzold, *The Annotated Turing*, Wiley, 2008.