Transformações Geométricas

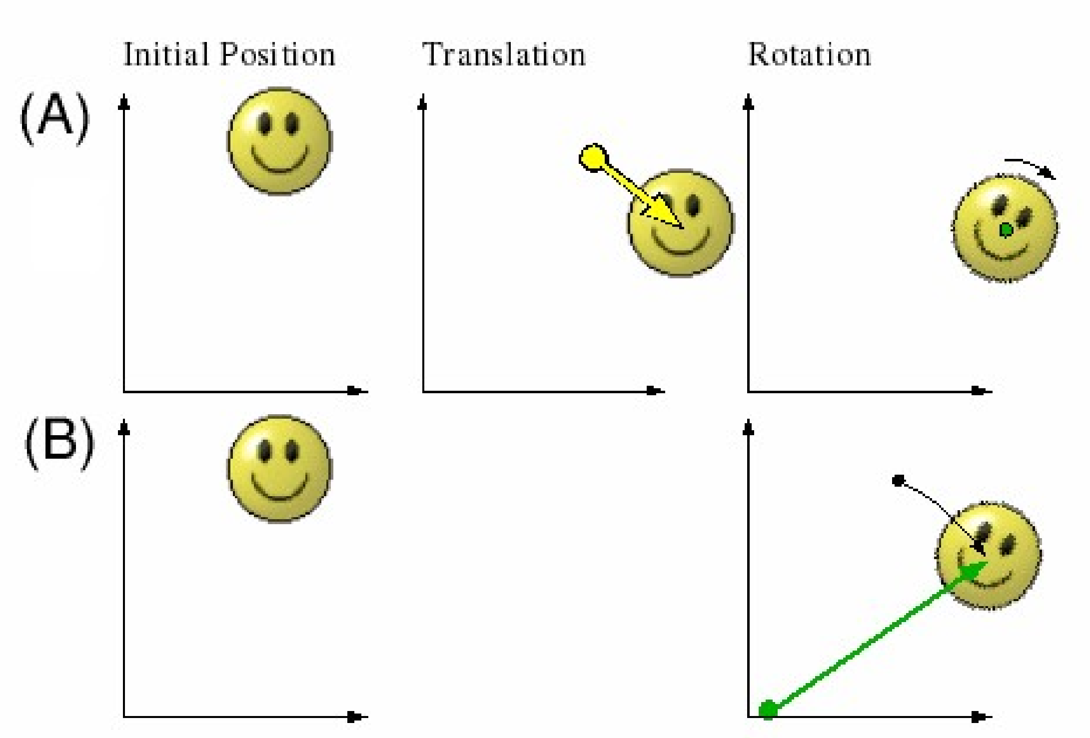
Hughes et al. Caps. 10 e 11

IA725 – Primeiro Semestre de 2016

PE - 22

Profa. Ting

Reposicionamento



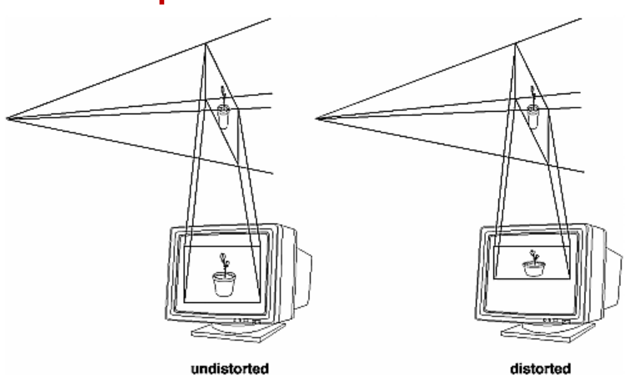
"Algebrizando"

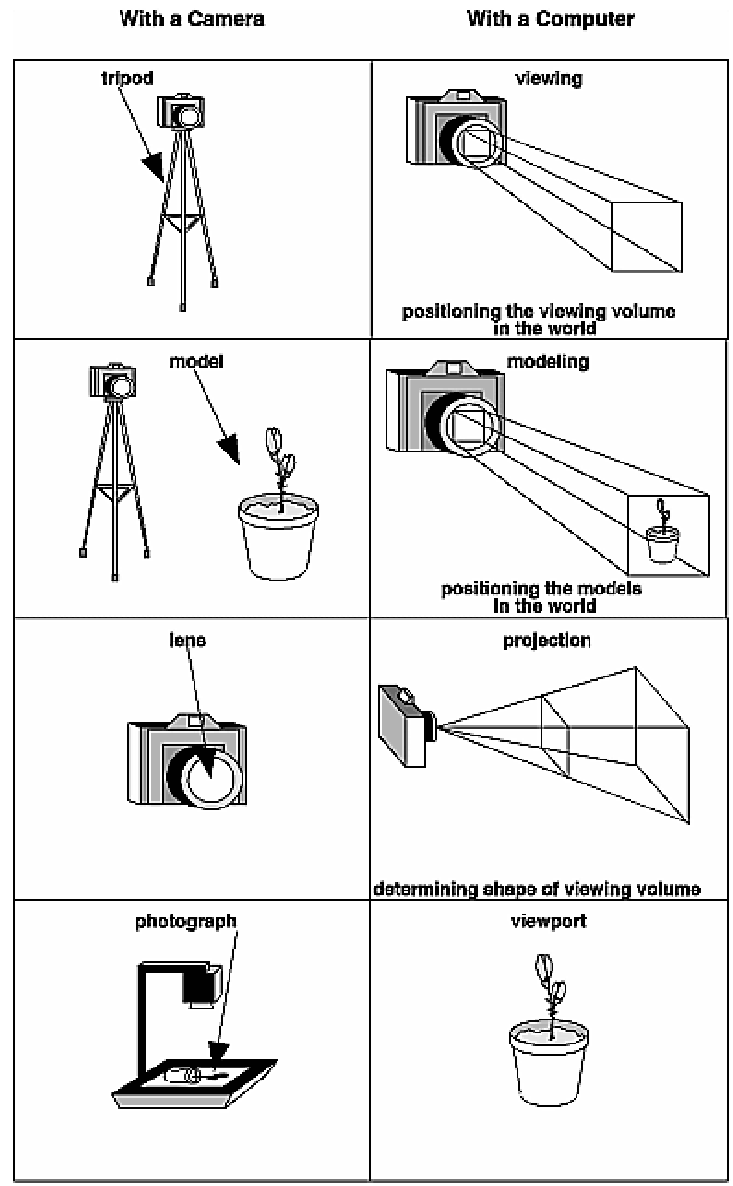
$$P=\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \xrightarrow{\quad T \quad} P'=\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}$$

$$P'=TP$$

Transformações Geométricas

- Posicionar os blocos constituintes de uma cena
  - Alterar as coordenadas dos pontos
- Projetar a cena sobre o plano de imagem
  - Alterar as coordenadas dos pontos
- Enquadrar a cena na janela de exibição
  - Alterar as coordenadas dos pontos

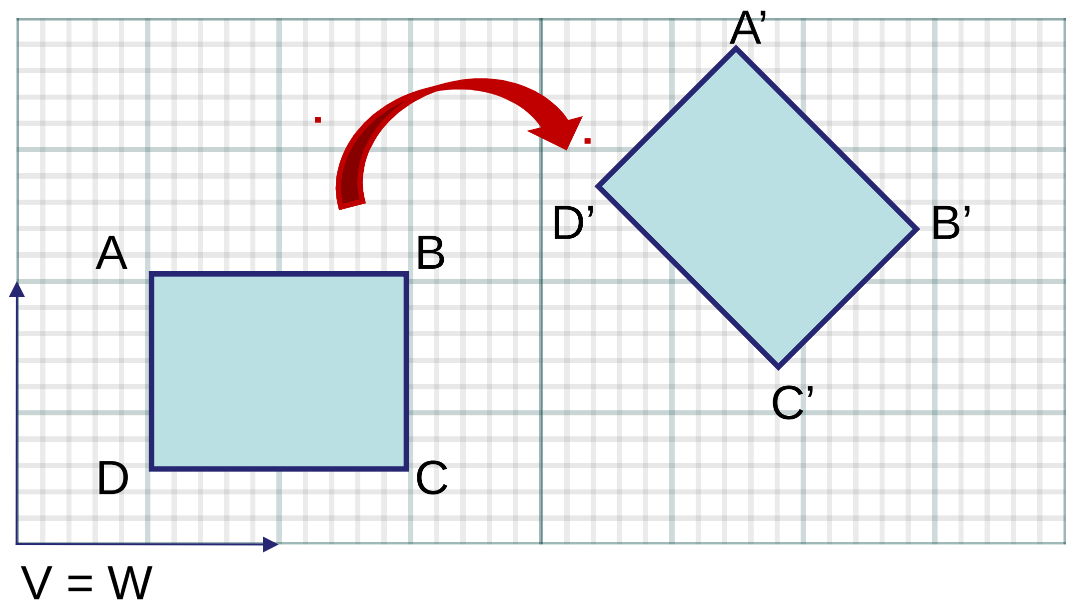




Transformações Rígidas

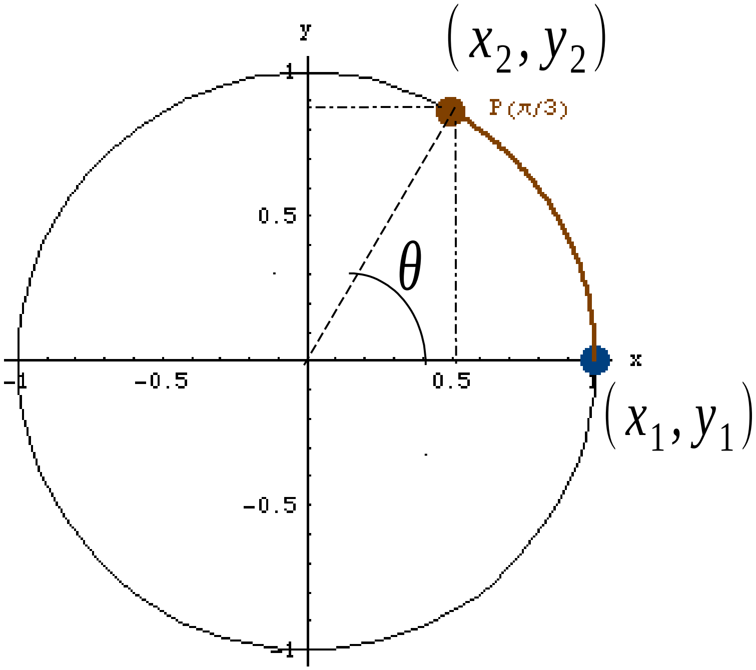
As formas das figuras não são alteradas:

- Rotação
- Reflexão
- Deslocamento



f: P → P'

Rotação 2D



Ponto Inicial:

$$(x_1, y_1) = (R\cos\varphi, R sen\,\varphi)$$

Ponto Final:

$$(x_2, y_2) = (R\cos(\varphi+\theta), R sen(\varphi+\theta))$$

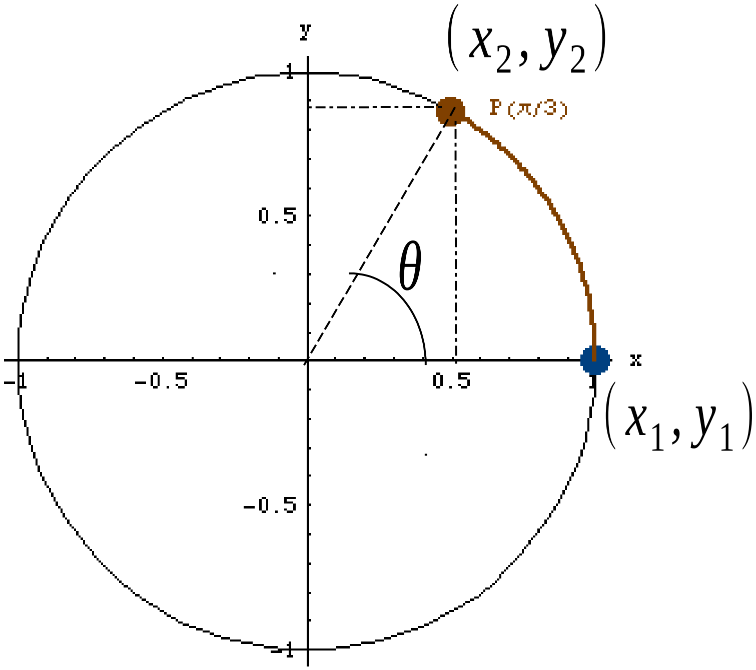
$$x_2 = R\cos(\varphi+\theta) = R\cos\varphi\cos\theta - R sen\,\varphi\, sen\,\theta = x_1\cos\theta - y_1 sen\,\theta$$

$$y_2 = R sen(\varphi+\theta) = R sen\,\varphi\cos\theta + R\cos\varphi\, sen\,\theta = x_1\, sen\,\theta + y_1\cos\theta$$

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -sen\,\theta \\ sen\,\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

Em linguagem matemática:
Rotação pode ser traduzida em uma
transformação linear!!!!

Rotação 2D



Ponto Inicial:

$$(x_1, y_1) = (R\cos\varphi, R sen\,\varphi)$$

Quais são os pontos invariantes nesta formulação?

Ponto Final:

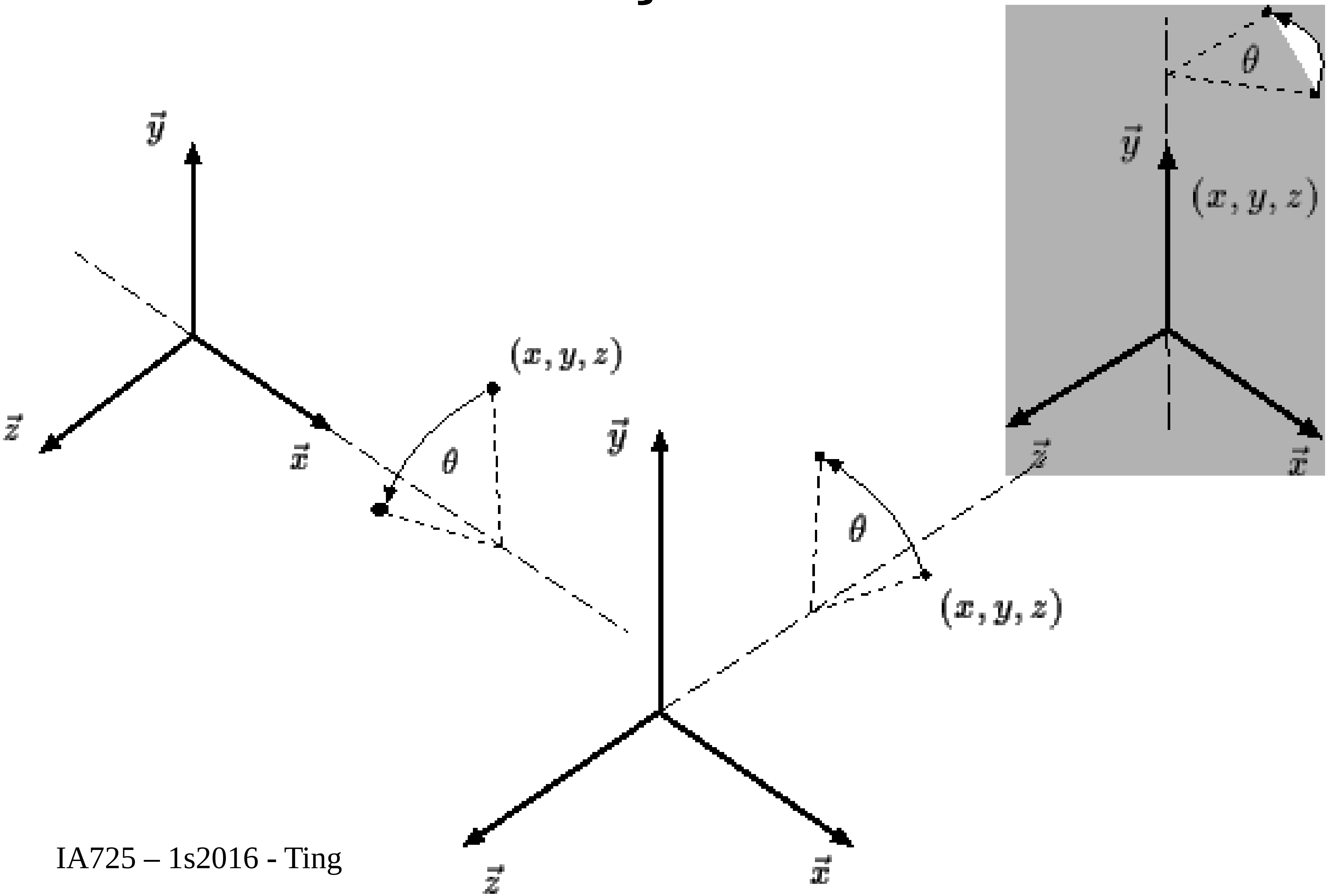
$$(x_2, y_2) = (R\cos(\varphi+\theta), R sen(\varphi+\theta))$$

$$x_2 = R\cos(\varphi+\theta) = R\cos\varphi\cos\theta - R sen\,\varphi\, sen\,\theta = x_1\cos\theta - y_1 sen\,\theta$$

$$y_2 = R sen(\varphi+\theta) = R sen\,\varphi\cos\theta + R\cos\varphi\, sen\,\theta = x_1\, sen\,\theta + y_1\cos\theta$$

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -sen\,\theta \\ sen\,\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

Rotação 3D



$\vec{y}$
$\vec{z}$
$\vec{x}$
(x, y, z)
θ
$\vec{y}$
θ
(x, y, z)
$\vec{z}$
$\vec{x}$
θ
$\vec{y}$
(x, y, z)
$\vec{z}$
$\vec{x}$

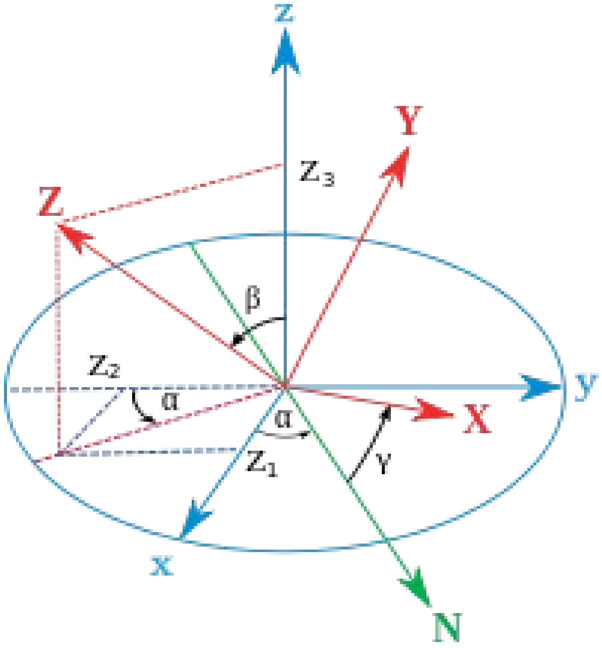
Notação Matricial

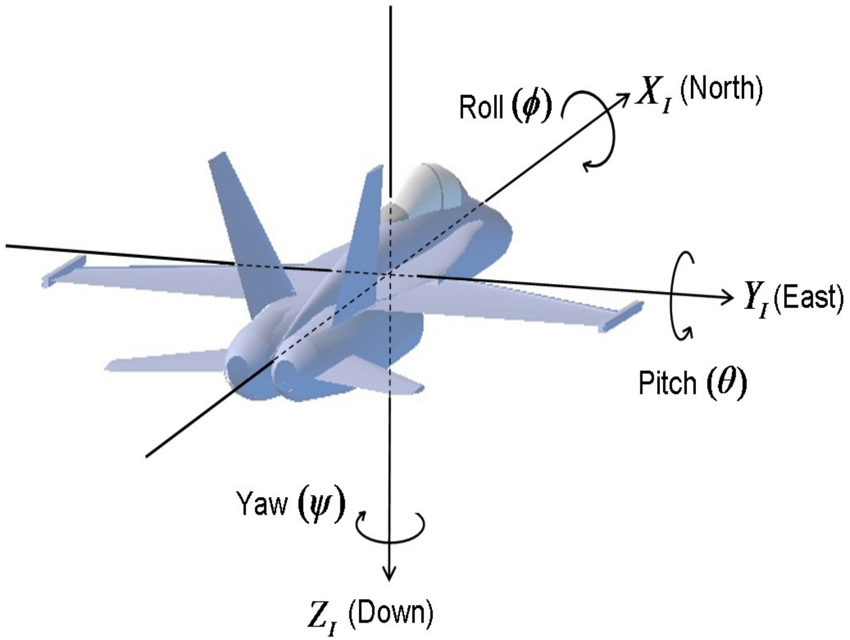
$$R_z(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\,\theta & 0 \\ \text{sen}\,\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R_x(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\text{sen}\,\theta \\ 0 & \text{sen}\,\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$R_y(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \text{sen}\,\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\text{sen}\,\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}$$

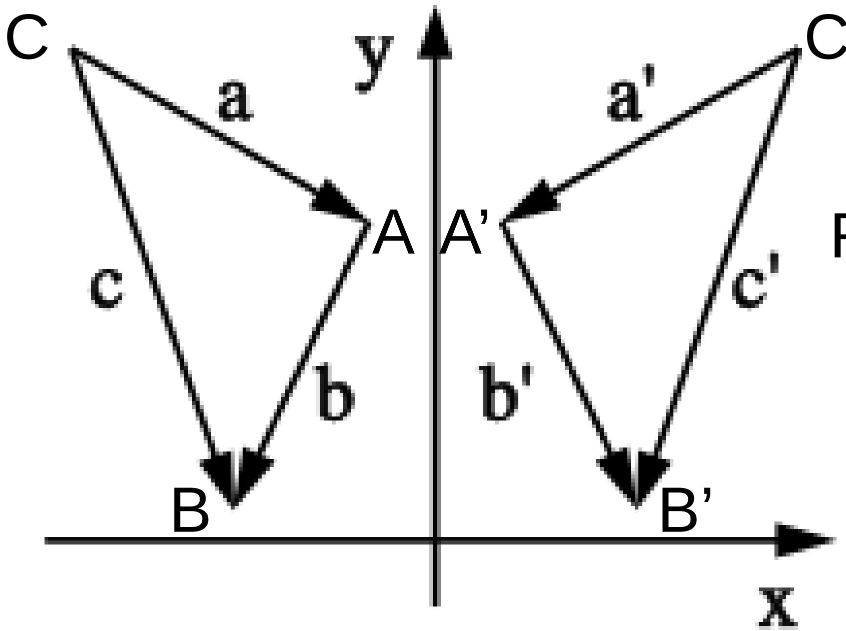
Ângulos de Euler





 http://www.chrobotics.com/library/understanding-euler-angles

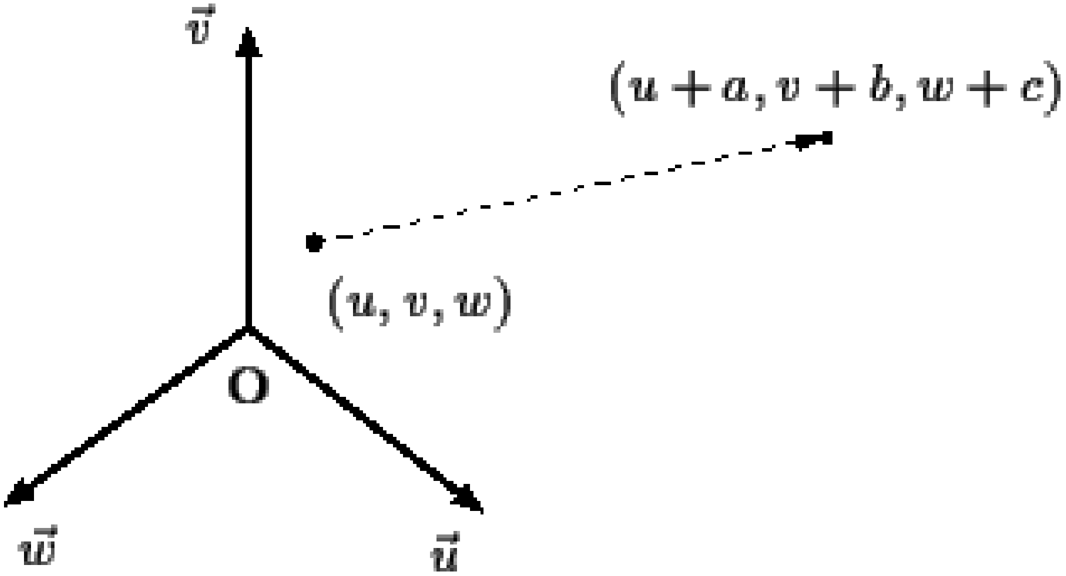
Reflexão 2D



$$\text{Reflexao}_y = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Nesta formulação, quais são os pontos invariantes?

Translação



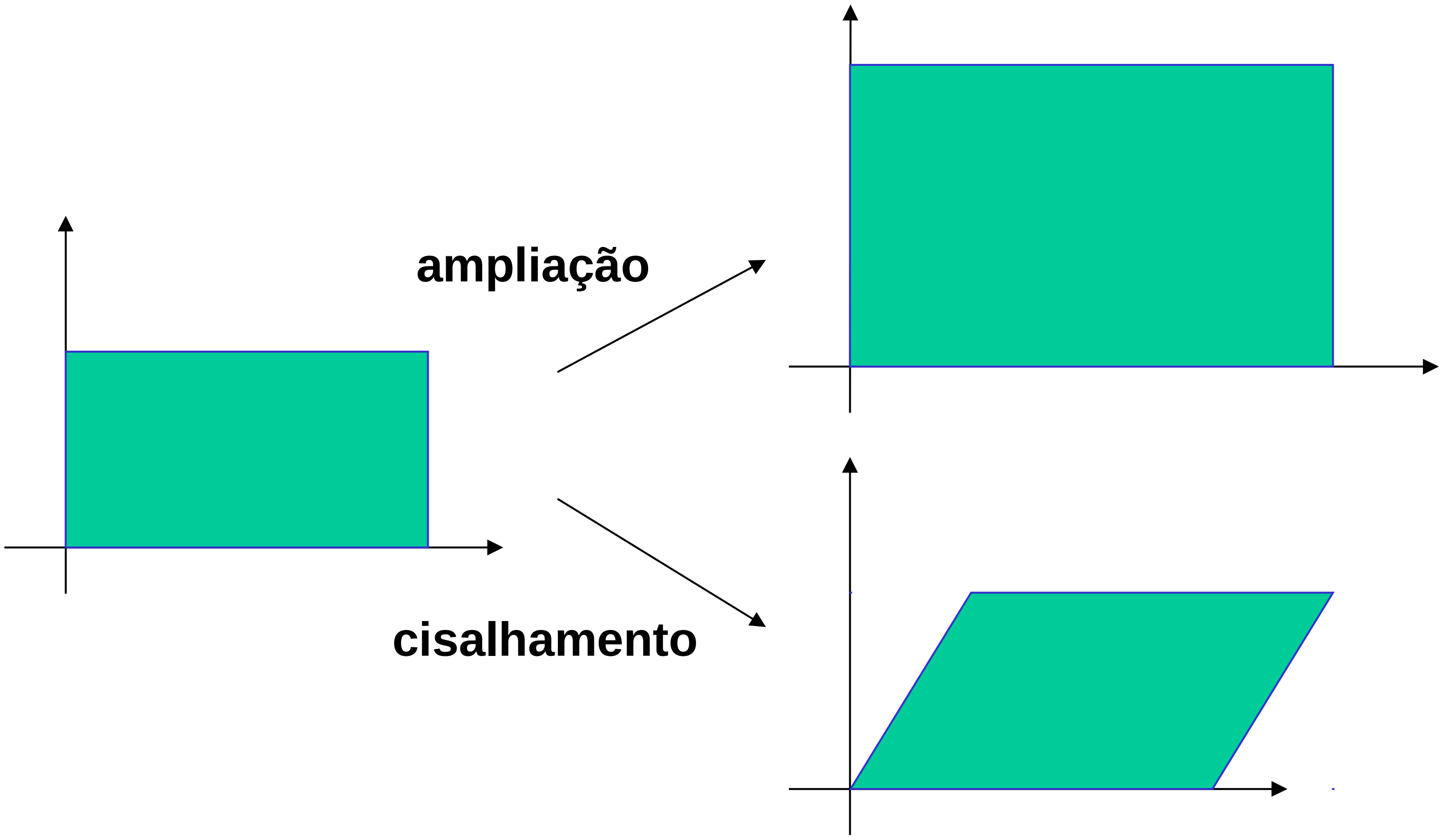
Há pontos invariantes neste tipo de ação?

Notação Matricial

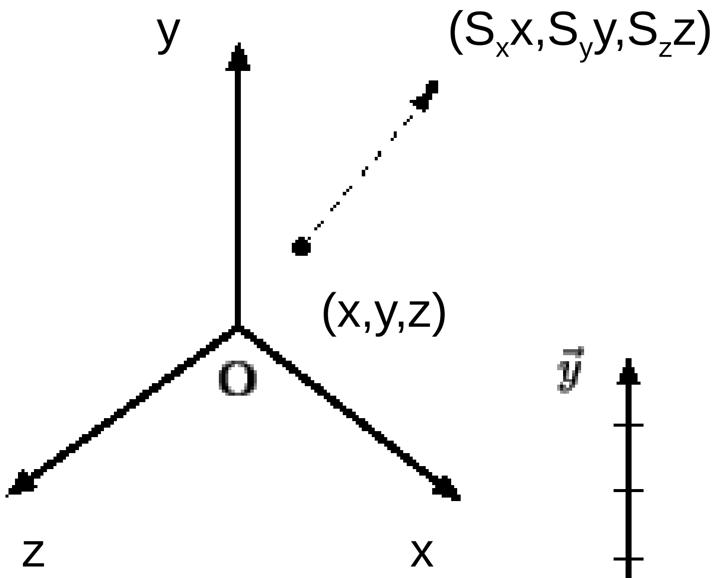
$$Tr = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

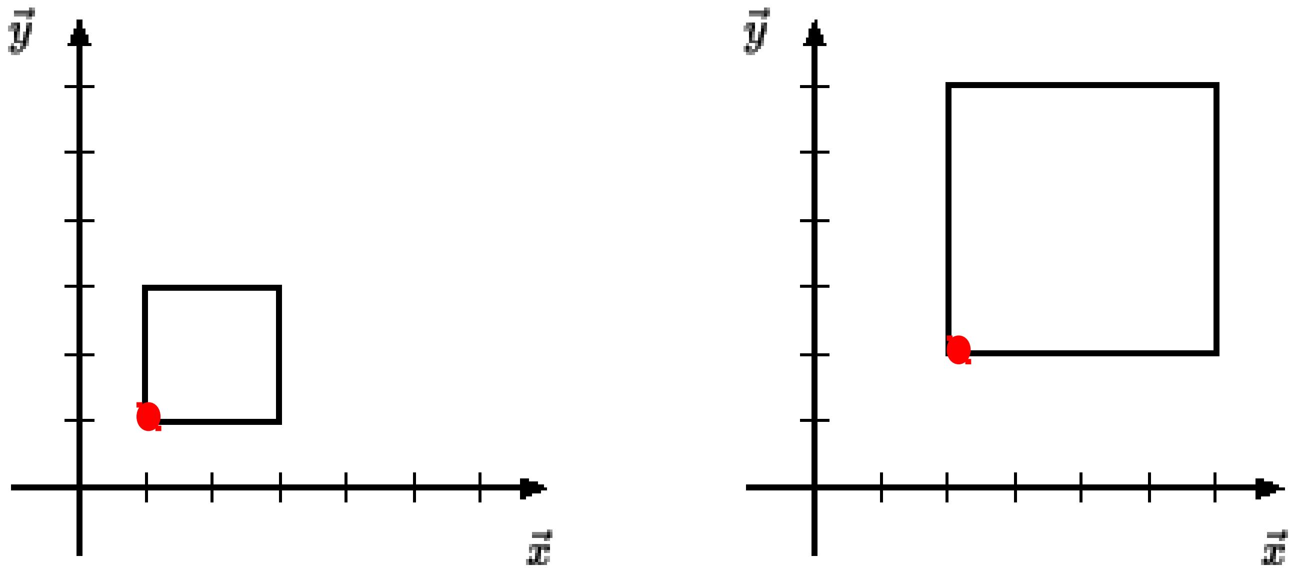
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

Transformações Não-Rígidas



Mudança de Escala





Notação Matricial

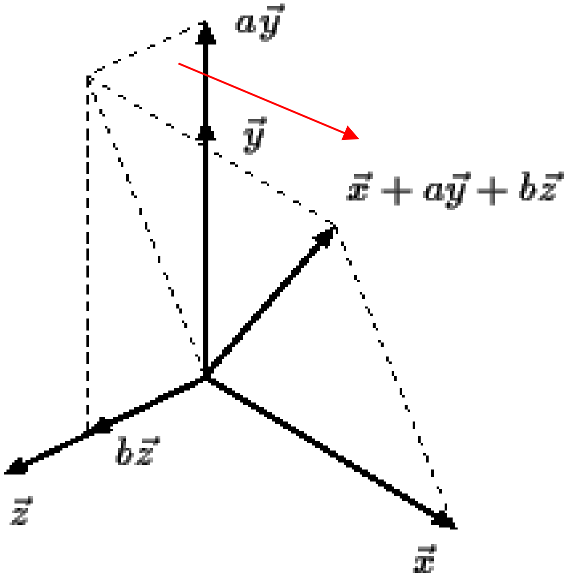
$$S = \begin{pmatrix} S & 0 & 0 \\ 0 & S & 0 \\ 0 & 0 & S \end{pmatrix} \qquad S = \begin{pmatrix} S_x & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 \\ 0 & 0 & S_z \end{pmatrix}$$

Uniforme

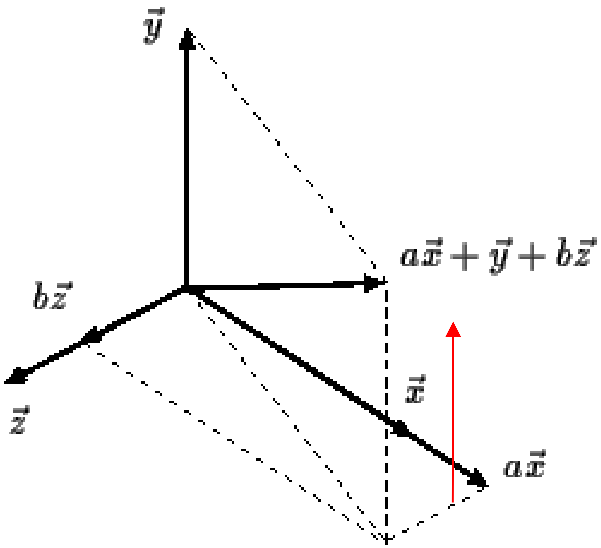
Não-Uniforme

Nesta formulação, quais são os pontos invariantes?

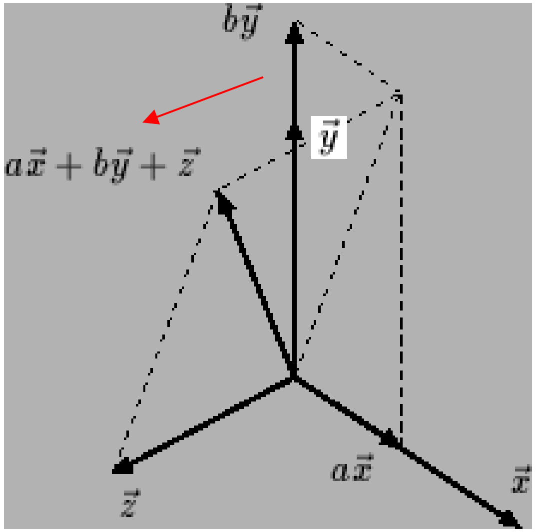
Cisalhamento (*Shearing*)



x em relação a y e z



y em relação a x e z



z em relação a x e y

Notação Matricial

$$Sh_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \Delta x/\Delta z \\ 0 & 1 & \Delta y/\Delta z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Sh_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \Delta y/\Delta x & 1 & 0 \\ \Delta z/\Delta x & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Sh_y = \begin{pmatrix} 1 & \Delta x/\Delta y & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \Delta z/\Delta y & 1 \end{pmatrix}$$

Nesta formulação, quais são os pontos invariantes?

Síntese

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

reflexão

$$\begin{pmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & s_z \end{pmatrix}$$

re-dimensionamento

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

deslocamento

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -sen\,\theta \\ 0 & sen\,\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

rotação

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & sh_{xz} \\ 0 & 1 & sh_{yz} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

cisalhamento

Transformações Afins

Afins = lineares + deslocamento

⇕

Aditividade: $f(x+y) = f(x) + f(y)$

Homogeneidade: $f(ax) = af(x)$

Transformações rígidas

Reflexões

Rotação

Mudança de escala

Cisalhamento

Transformações Afins

Transformações T entre dois espaços vetoriais V e W que preservam paralelismo

$$T: V \rightarrow W$$

$$x_2 = a_{00}\, x_1 + a_{01}\, y_1 + a_{02}\, z_1 + a_{03}$$
$$y_2 = a_{10}\, x_1 + a_{11}\, y_1 + a_{12}\, z_1 + a_{13}$$
$$z_2 = a_{20}\, x_1 + a_{21}\, y_1 + a_{22}\, z_1 + a_{23}$$

Concatenação Matricial

Transformação Linear

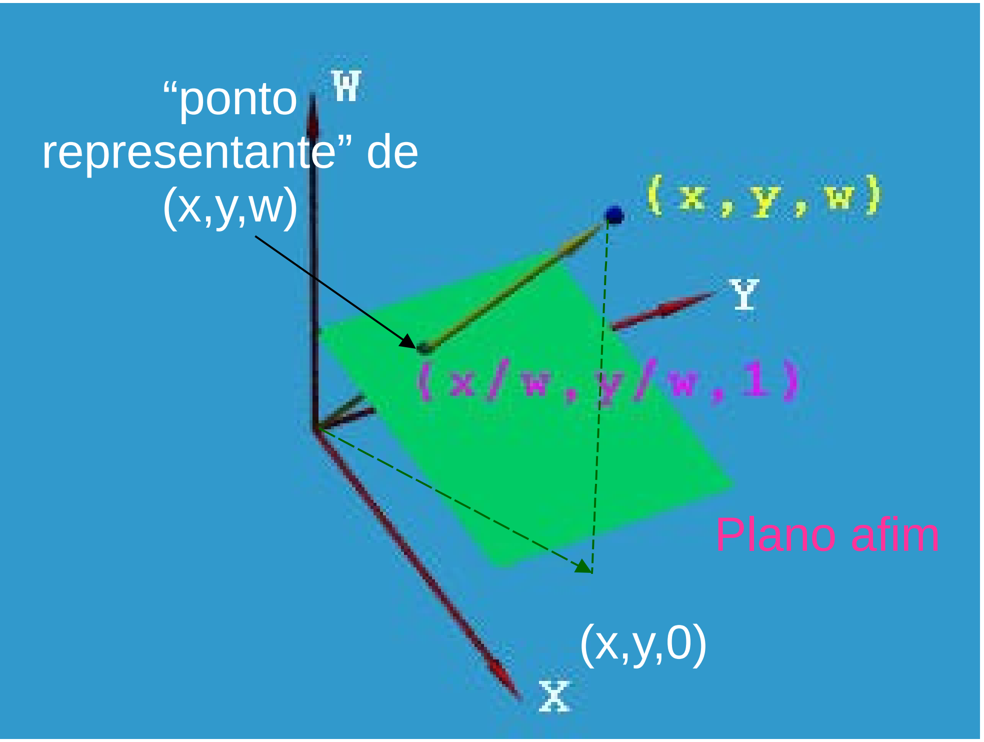
Translação

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix}$$

Coordenadas Homogêneas = pontos R^n representados por (n+1) escalares

Coordenadas Homogêneas

(x,y,z,w)



Ponto

(x/w,y/w,z/w,1), ou seja, projeção de (x,y,z,w), sobre o plano w=1 com centro de projeção na origem.

Vetor

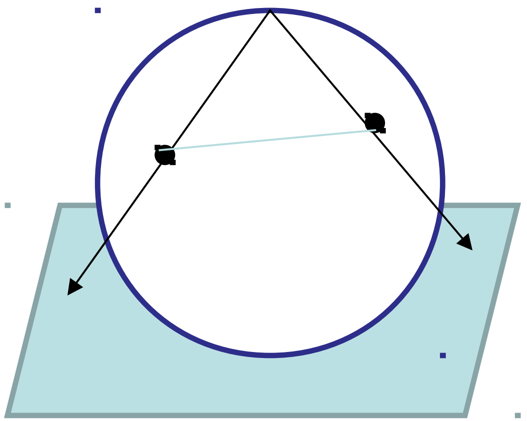
“diferença” de 2 pontos homogeneizados → Quarta coordenada(w) é nula

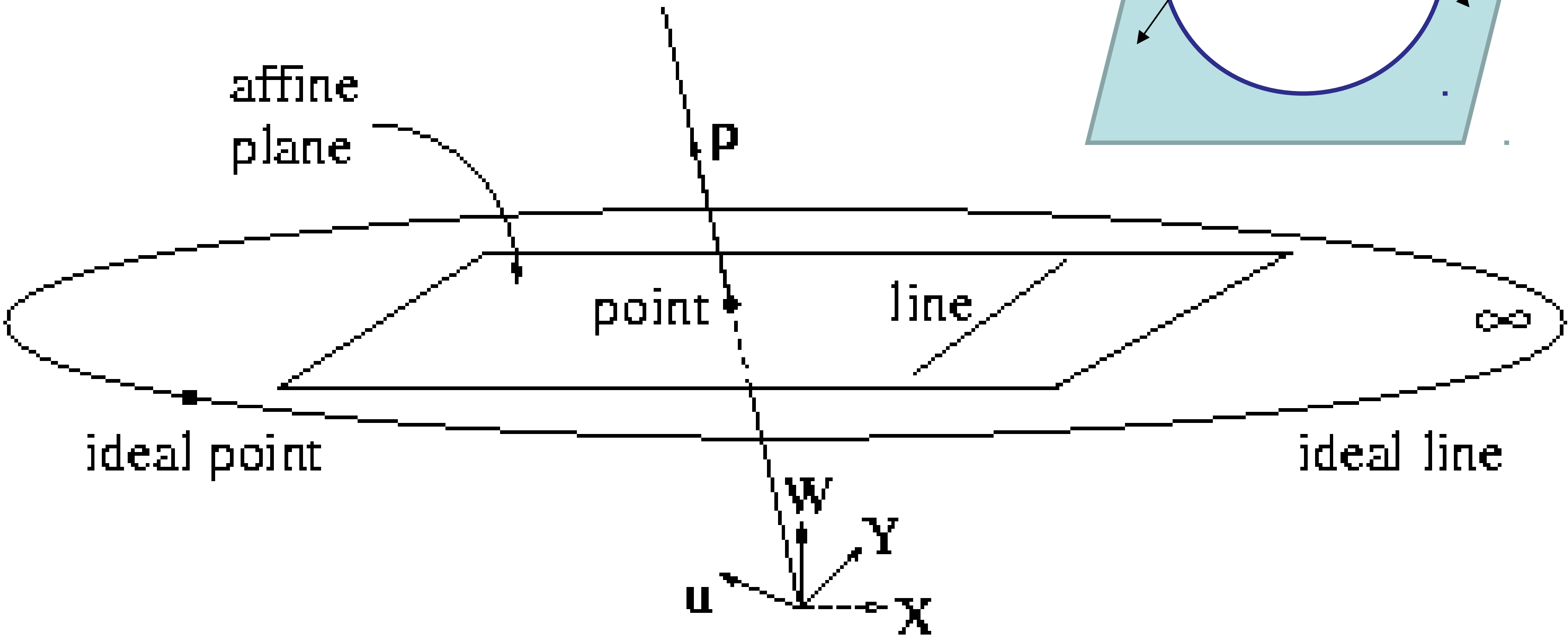
Outra interpretação geométrica:

$$\lim_{w \to 0} (x/w, y/w, z/w, w/w) = (\infty, \infty, \infty, 1)$$

Vetores paralelos ao plano w=1, p.e., (x,y,z,0), interceptam w=1 no “infinito” na direção (x,y,z).

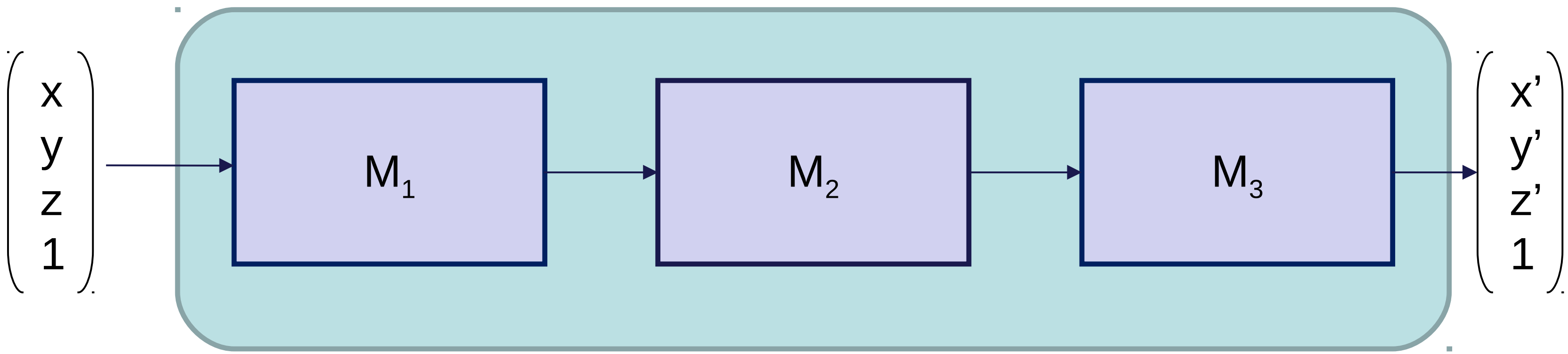
Plano Afim

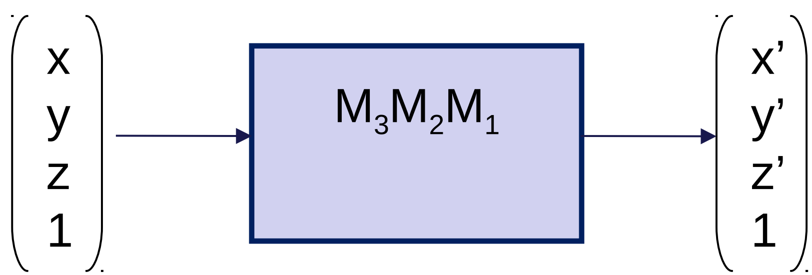




Transformações Afins

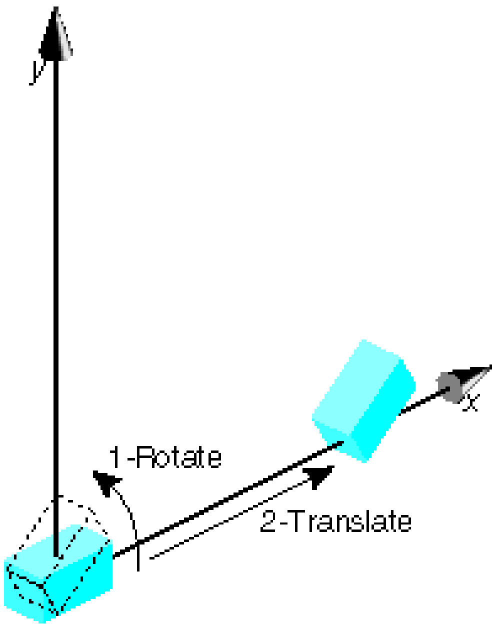
Notação Matricial

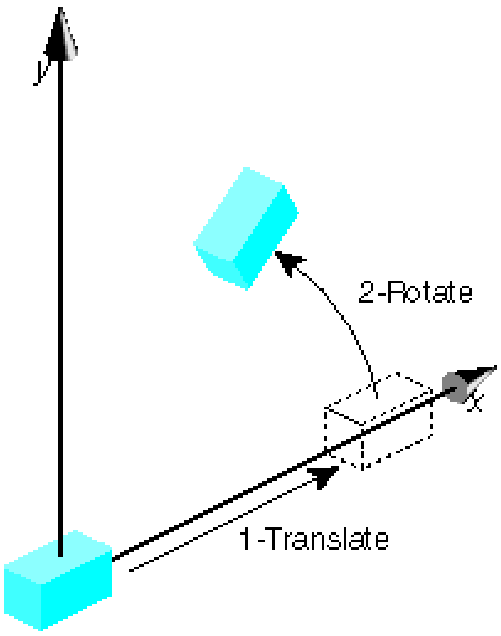




Composição de matrizes

Dois Exemplos

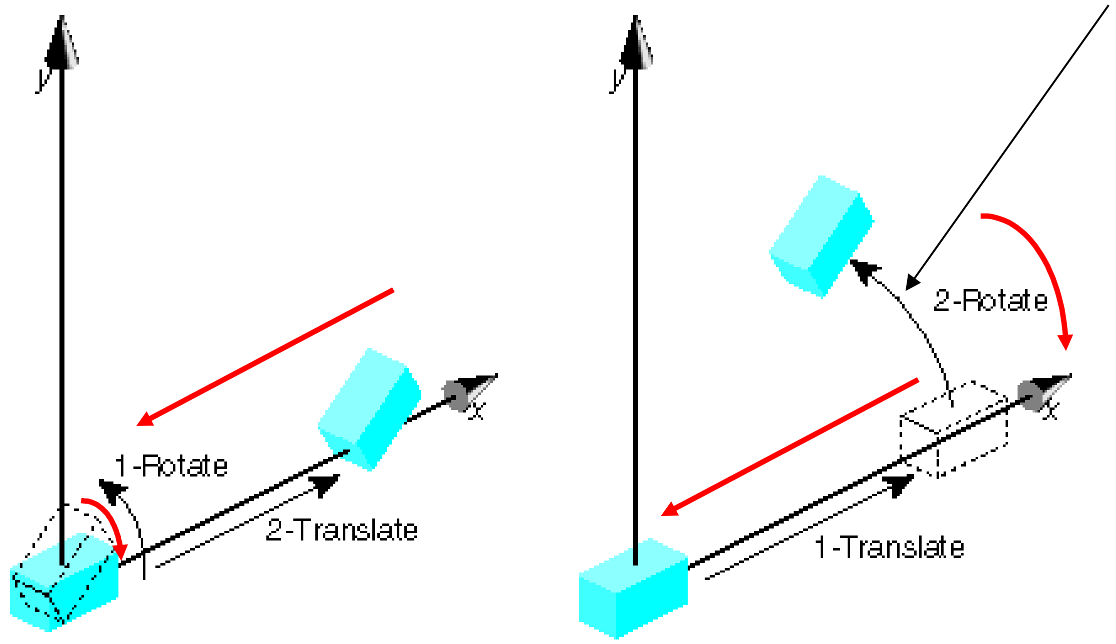




P’ = T.(R.P) = (T.R).P

P’ = R.(T.P) = (R.T).P

Transformações Inversas



$P' = T.(R.P) = (T.R).P$

$(T.R)^{-1}\ P' = P$

$R^{-1}\ T^{-1}\ P' = P$

$P' = R.(T.P) = (R.T).P$

$(R.T)^{-1}\ P' = P$

$T^{-1}\ R^{-1}\ P' = P$

Matrizes inversas

Alternativas para "algebrizar" Rotações

- Notação Matricial
- Rodrigue's rotation formula

$$\vec{v}\,' = \vec{v}\cos\theta + \left(\vec{k}\times\vec{v}\right) sen\,\theta + \vec{k}\left(\vec{k}\cdot\vec{v}\right)\left(1-\cos\theta\right)$$

https://en.wikipedia.org/wiki/Rodrigues%27_rotation_formula

- Quatérnios

$$\vec{v}\,' = q\vec{v}\,q^{-1}$$

quatérnios

Quatérnios

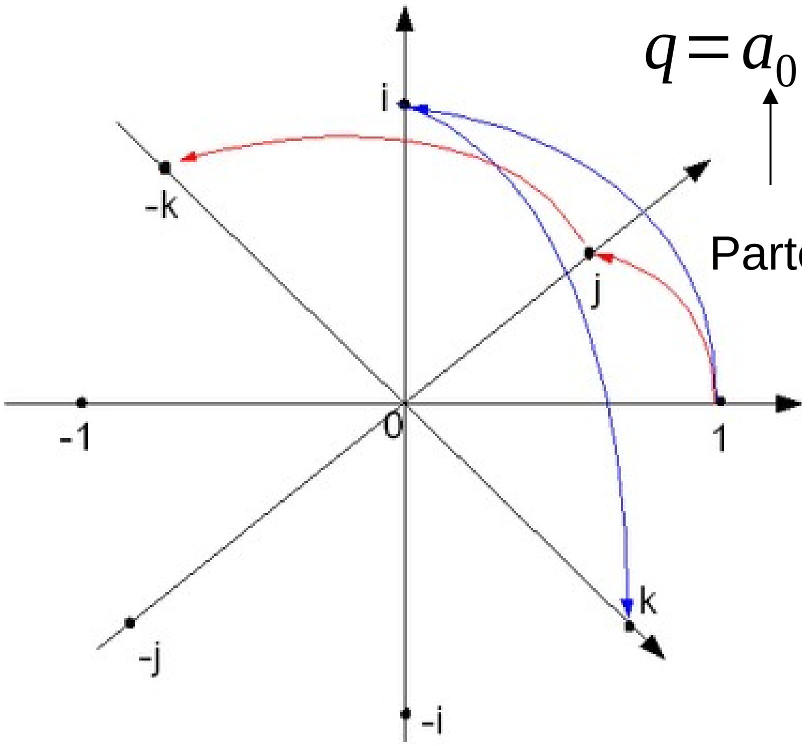
Elementos da base

$$q = a_0 + \underbrace{a_1 i + a_2 j + a_3 k}_{\text{Parte vetorial}} = r(\cos\theta + I sen\theta) = re^{I\theta}$$

Parte escalar

$$I = a_1 i + a_2 j + a_3 k$$

$$I^2 = -1$$



Graphical representation of quaternion units product as 90°-rotation in 4D-space

ij = k
ji = -k
ij = -ji

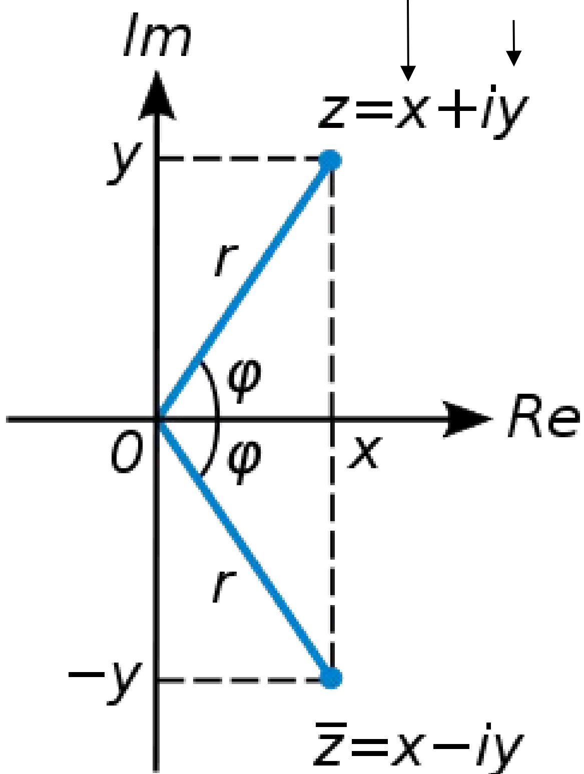
x	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	-j
j	j	-k	-1	i
k	k	j	-i	-1

Não é comutativo!

Números Complexos

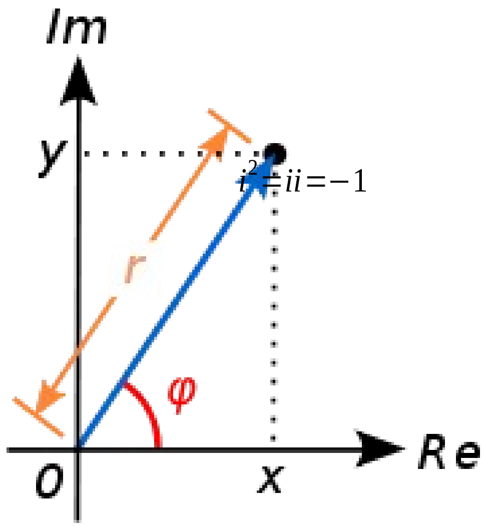
Parte real

Parte imaginária



(conjugado)

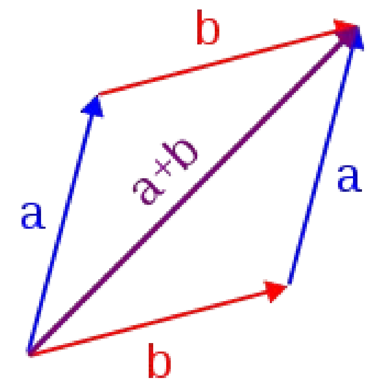
$$z^{-1}=\frac{\bar{z}}{z\,.\,\bar{z}}=\frac{\bar{z}}{x^2+y^2}$$



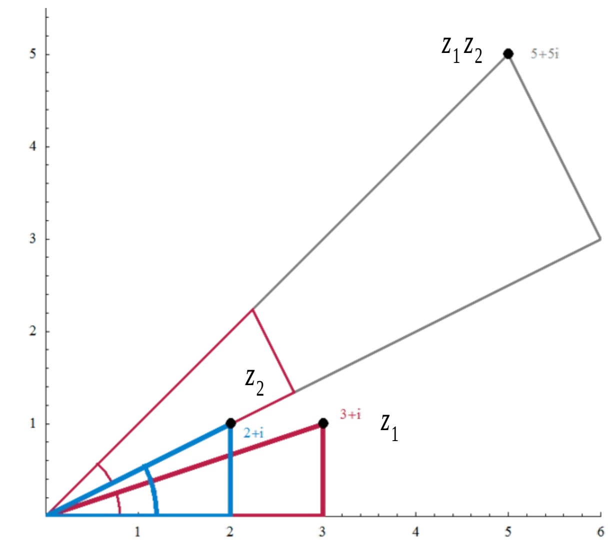
$i^2=ii=-1$

Forma Polar

$$z=r\left(\cos\phi+i sen\,\phi\right)=re^{i\phi}$$



$a+b$



$$z_1 z_2=r_1 r_2\left(\cos\left(\phi_1+\phi_2\right)+i sen\left(\phi_1+\phi_2\right)\right)$$

Quatérnios

- Conjugado

$$\bar{q}=a_0-(a_1 i+a_2 j+a_3 k)$$

- Adição e Subtração:

$$q\pm q'=(a_0\pm a_0')+(a_1\pm a_1')i+(a_2\pm a_2')j+(a_3\pm a_3')k$$

- Multiplicação

$$qq'=(a_0 a_0'-a_1 a_1'-a_2 a_2'-a_3 a_3')+(a_0 a_1'+a_1 a_0'+a_2 a_3'-a_3 a_2')i+$$
$$(a_0 a_2'-a_1 a_3'+a_2 a_0'+a_3 a_1')j+(a_0 a_3'+a_1 a_2'-a_2 a_1'+a_3 a_0')k$$

$$=\begin{bmatrix} a_0' & -a_1' & -a_2' & -a_3' \\ a_1' & a_0' & a_3' & -a_2' \\ a_2' & -a_3' & a_0' & a_1' \\ a_3' & a_2' & -a_1' & a_0' \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_0' & a_1' & a_2' & a_3' \\ -a_1' & a_0' & -a_3' & a_2' \\ -a_2' & a_3' & a_0' & -a_1' \\ -a_3' & -a_2' & a_1' & a_0' \end{bmatrix}$$

$$=rr'(\cos(\phi_1+\phi_2)+I sen(\phi_1+\phi_2))=rr' e^{I(\phi_1+\phi_2)}$$

- Norma e Inverso

$$|q|^2=q\,\bar{q}=a_0^2+a_1^2+a_2^2+a_3^2 \qquad q^{-1}=\frac{\bar{q}}{q\,\bar{q}}$$

Quatérnios em “forma vetorial”

$$q = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k = a_0 + (a_1 i + a_2 j + a_3 k) = a_0 + \vec{v}$$

- Conjugado

$$\bar{q} = a_0 - \vec{v}$$

- Adição e Subtração:

$$q + q' = (a_0 + a_0') + (\vec{v} + \vec{v}\,')$$

- Multiplicação

$$qq' = (a_0 a_0' - \vec{v}\,\vec{v}\,') + (\vec{v} \times \vec{w} + a_0 \vec{v}\,' + a_0' \vec{v})$$

$$\vec{v}\,\vec{v}\,' = \vec{v} \times \vec{v}\,' - \vec{v} \cdot \vec{v}\,'$$

- Inverso

$$(a_0 + \vec{v})^{-1} = \frac{a_0 - \vec{v}}{|a_0 + \vec{v}|^2} = \frac{a_0 - \vec{v}}{a_0^2 + |\vec{v}|^2}$$

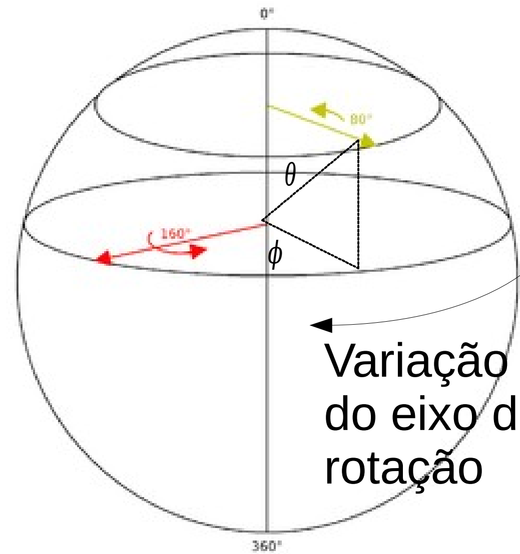
Espaço de Rotações “2D”

Parametrização em coordenadas esféricas (θ, ϕ)

degeneração nos pólos

Parametrização em coordenadas (w, x, y)

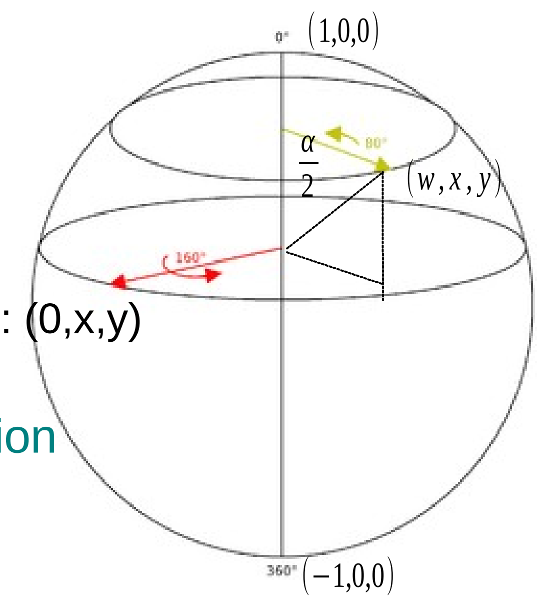
Aumenta
o ângulo
de
rotação



Variação
do eixo de
rotação

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{w}{1} = w$$

$$sen\frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{1} = \sqrt{x^2 + y^2}$$



No equador: (0,x,y)

https://en.wikipedia.org/wiki/Quaternions_and_spatial_rotation

Espaço de Rotações "3D"

Parametrização em coordenadas esféricas (θ, ϕ, γ)

↓

degeneração nos pólos

↓

Parametrização em coordenadas (w, x, y, z)

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{w}{1} = w$$

Parte real

$$sen\frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{1} = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

Parte imaginária

↕

$$q = \cos\frac{\alpha}{2} + I sen\frac{\alpha}{2} = e^{I\frac{\alpha}{2}}$$

http://en.wikipedia.org/wiki/Quaternions_and_spatial_rotation

Quatérnios e Rotações

- Rotação de um vetor $\vec{v}$ por um ângulo α em torno do vetor (unitário) $\vec{I}$ $\left(q=\cos\frac{\alpha}{2}+\vec{I}\,sen\,\frac{\alpha}{2}\right)$

$$\vec{v}\,'=q\vec{v}q^{-1}$$

$$\vec{v}\,'=q\vec{v}q^{-1}=\vec{v}\cos\alpha+\left(\vec{I}\times\vec{v}\right)sen\,\alpha+\vec{I}\left(\vec{I}\cdot\vec{v}\right)\left(1-\cos\alpha\right)$$

Fórmula de rotação de Rodrigues

Demonstração se encontra em

https://en.wikipedia.org/wiki/Quaternions_and_spatial_rotation

Quatérnios e Rotações

- Composição de rotações:

$$\vec{v}\,'=pq\vec{v}\left(pq\right)^{-1}=pq\;\vec{v}q^{-1}p^{-1}=p\left(q\vec{v}q^{-1}\right)p^{-1}$$

- Quatérnio unitário $\longleftrightarrow$ Matrix ortogonal

$$q=a+bi+cj+dk$$

$$\downarrow$$

$$\begin{bmatrix} a^2+b^2-c^2-d^2 & 2bc-2ad & 2bd+2ac \\ 2bc+2ad & a^2+b^2-c^2-d^2 & 2cd-2ab \\ 2bd-2ac & 2cd+2ab & a^2-b^2-c^2+d^2 \end{bmatrix}$$

Exemplos

- Rotação de um vetor em torno do eixo (1,0,1) por 90^0

$$\vec{v}\,'=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}i+\frac{1}{2}k\right)\vec{v}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}i-\frac{1}{2}k\right)$$

- Rotação acima aplicada no vetor-posição $\vec{v}=(0,1,0)=j$

$$\vec{v}\,'=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}i+\frac{1}{2}k\right)j\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}i-\frac{1}{2}k\right)=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}i+\frac{1}{2}k\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}j+\frac{1}{2}k-\frac{1}{2}i\right)$$

$$=-\frac{\sqrt{2}}{2}i+\frac{\sqrt{2}}{2}k$$

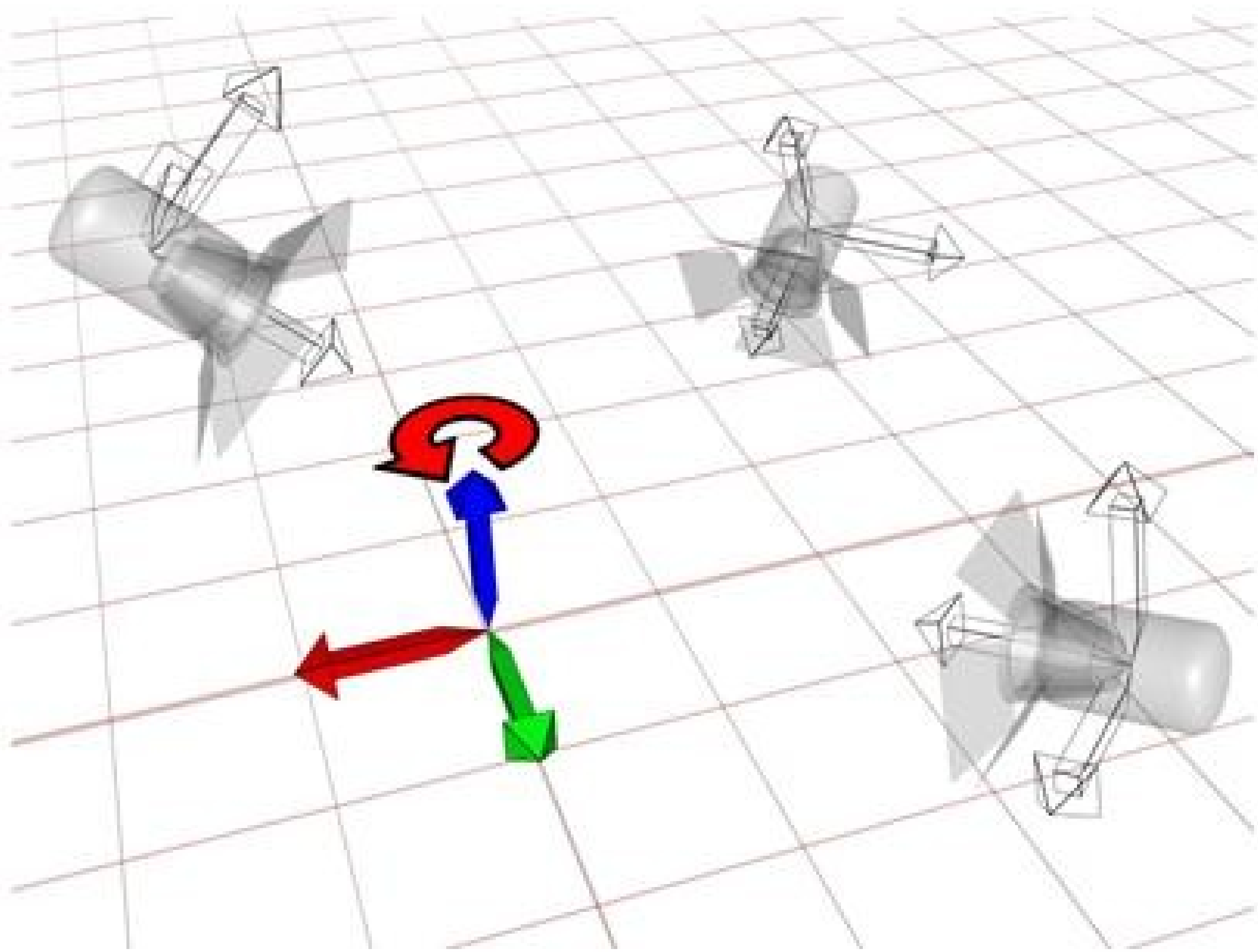
- Composição de 45^0 em torno de y e 45^0 em torno de x

$$\frac{\sqrt{2}+i}{2}\frac{\sqrt{2}+j}{2}=\frac{2}{4}+\frac{1}{4}\left(i\sqrt{2}+j\sqrt{2}+k\right)=\cos\frac{\alpha}{2}+I sen\frac{\alpha}{2}$$

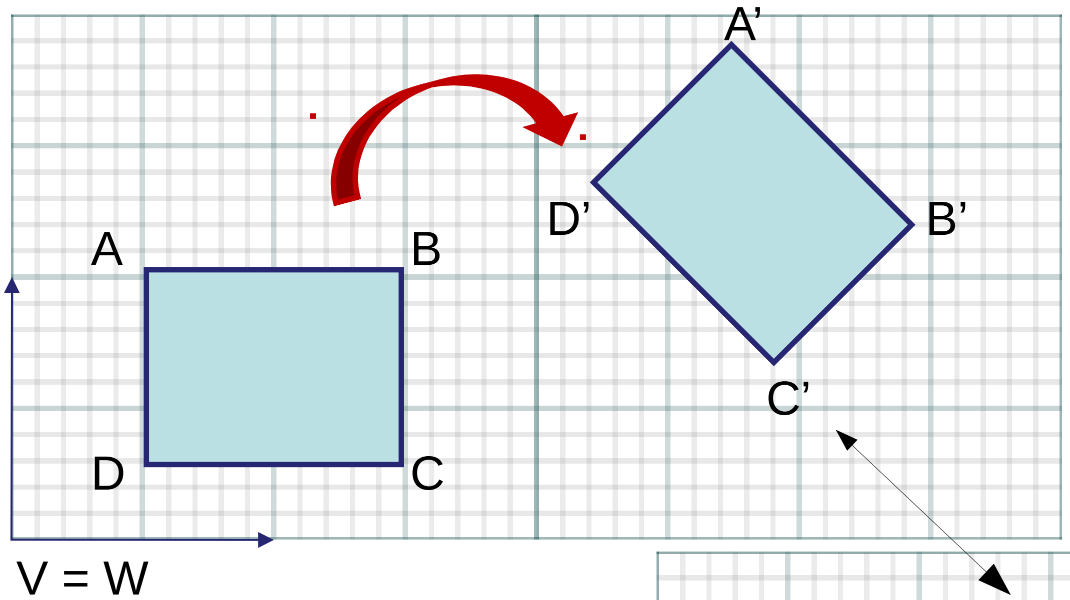
$\alpha=120^0$ em torno do eixo $\left(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)$

- Arcball

Construção de uma Cena

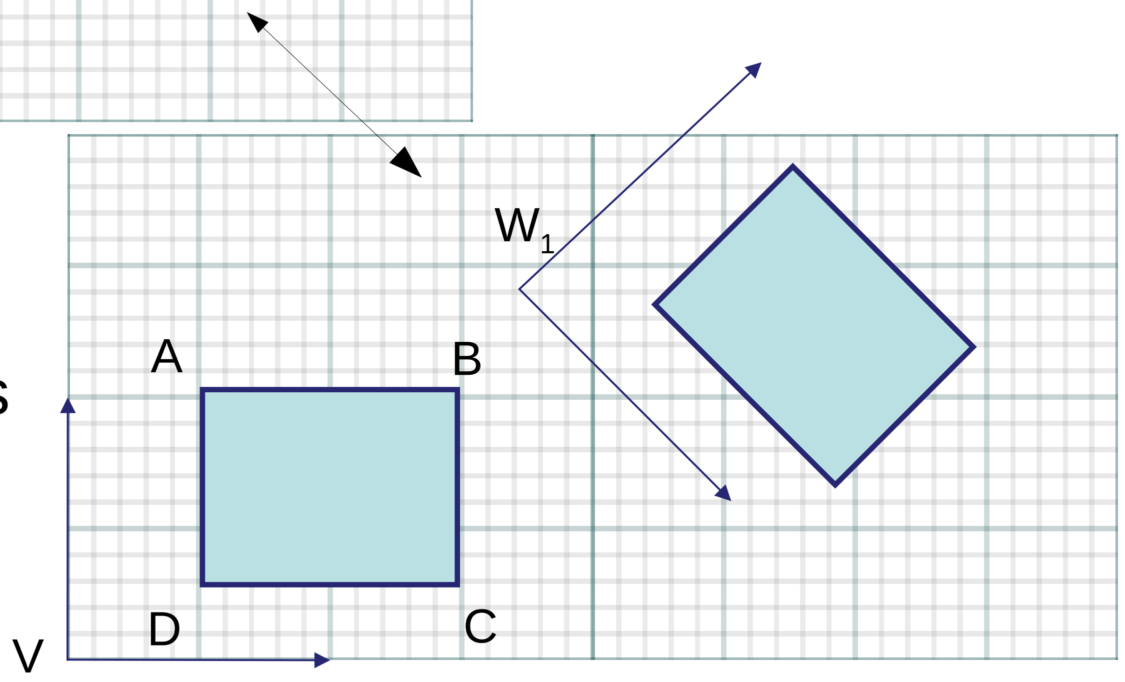


Dois Paradigmas de Transformações



No mesmo referencial

Mudança de referenciais

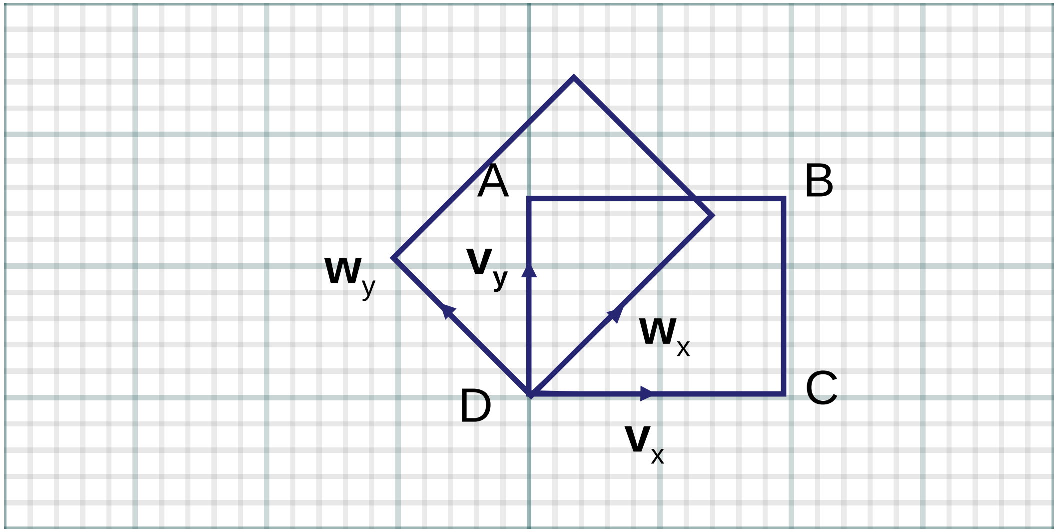


Mudança de Referenciais

Reposicionamento de Objetos

P' =TP
T = P'P^{-1},
se P for inversível

"Transformação de Base"

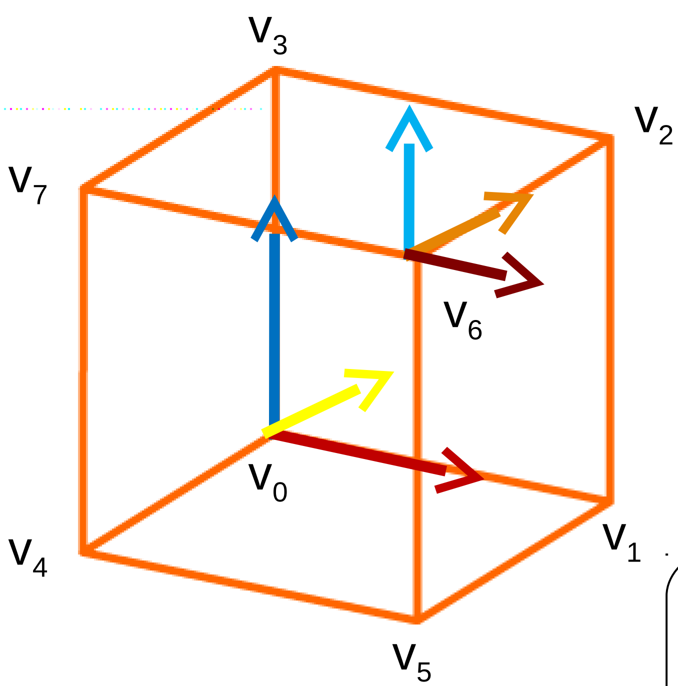


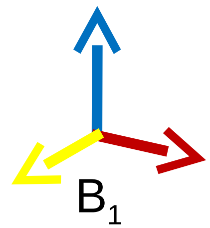
$$\begin{bmatrix} w_x & w_y \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} v_x & v_y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_{x,x} & w_{y,x} \\ w_{x,y} & w_{y,y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{x,x} & v_{y,x} \\ v_{x,y} & v_{y,y} \end{bmatrix}^{-1}$$

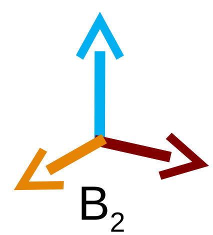
$T = B_w B_v^{-1}$

Exemplo





$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P' = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P' = B_1 B_2^{-1} P$$

Transformações de Vetores

Pontos

$$\begin{pmatrix} A_x & B_x & C_x \\ A_y & B_y & C_y \end{pmatrix} \xrightarrow{f} \begin{pmatrix} A'_x & B'_x & C'_x \\ A'_y & B'_y & C'_y \end{pmatrix}$$

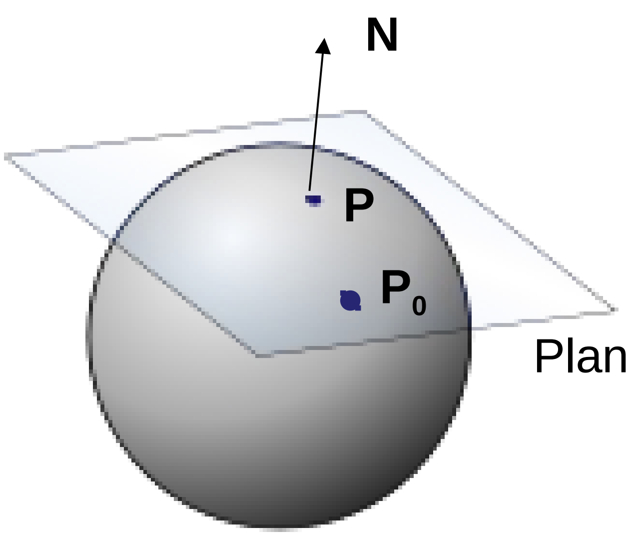
Vetores: diferença de 2 pontos

$$\begin{pmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \end{pmatrix} \xrightarrow{f} \begin{pmatrix} a'_x & b'_x & c'_x \\ a'_y & b'_y & c'_y \end{pmatrix}$$

$$MP_2 - MP_1 = M(P_2 - P_1) = M\overrightarrow{P_2P_1}$$

Vetores Normais

Em superfície suave, pode-se definir localmente um plano tangente a cada ponto. O vetor normal deste plano coincide com o vetor normal da superfície neste ponto **P**.



Antes da transformação T:

$$N(P_0-P) = 0$$

Após a transformação T:

$$N'(TP_0-TP) = 0$$

$$N(P_0-P) = N'T(P_0-P)$$

$$N = N'T$$

$$NT^{-1} = N'$$

Se for deslocamento d:

$$N'(P_0+d - (P+d)) = N(P_0-P) = 0$$

$$N' = N$$

N e N' em vetor-linha!

Funções Analíticas

$$\begin{pmatrix}\bar{x}\\ \bar{y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{00} & a_{01}\\ a_{10} & a_{11}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$$

Equação implícita de uma circunferência

$$x^2+y^2=R^2 \quad \Longrightarrow \quad (a_{00}x+a_{01}y)^2+(a_{10}x+a_{11}y)^2=R^2$$

Equação paramétrica de uma circunferência

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}R\cos\theta\\ R\mathrm{sen}\,\theta\end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \begin{pmatrix}a_{00}x+a_{01}y\\ a_{10}x+a_{11}y\end{pmatrix}=???$$

Funções Analíticas

Equação de um segmento

$P(t) = (1-t)P_1 + t\ P_2$

Transformação linear:

$(1-t)\ T_L P_1 + t T_L P_2 = T_L[(1-t)P_1 + tP_2] = T_L P(t)$

Translação:

$(1-t)\ (P_1+d) + t(P_2+d) = (1-t)P_1 + tP_2 + (1+t-t)d = P(t)+d$

Equação de uma curva de Bézier

$P(t) = \Sigma\ B_{n,i}(t)\ P_i$

Transformação linear:

$\Sigma\ B_{n,i}(t)\ (T_L\ P_i) = T_L(\Sigma\ B_{n,i}(t)\ P_i) = T_L P(t)$

Translação:

$\Sigma\ B_{n,i}(t)\ (P_i + d) = \Sigma\ B_{n,i}(t)\ P_i + \Sigma\ B_{n,i}(t)\ d = P(t) + d$