Transformações Projetivas

Hughes et al. Caps. 12 e 13

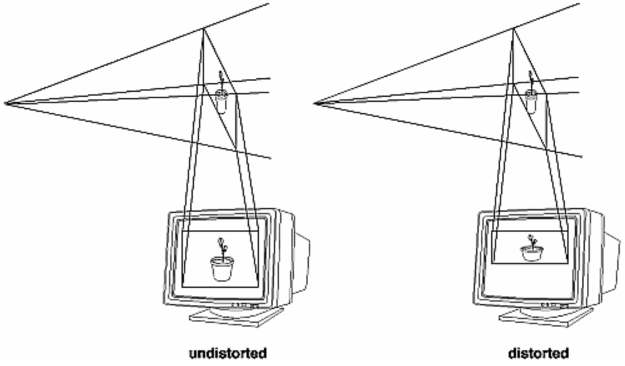
IA725 – Primeiro Semestre de 2016

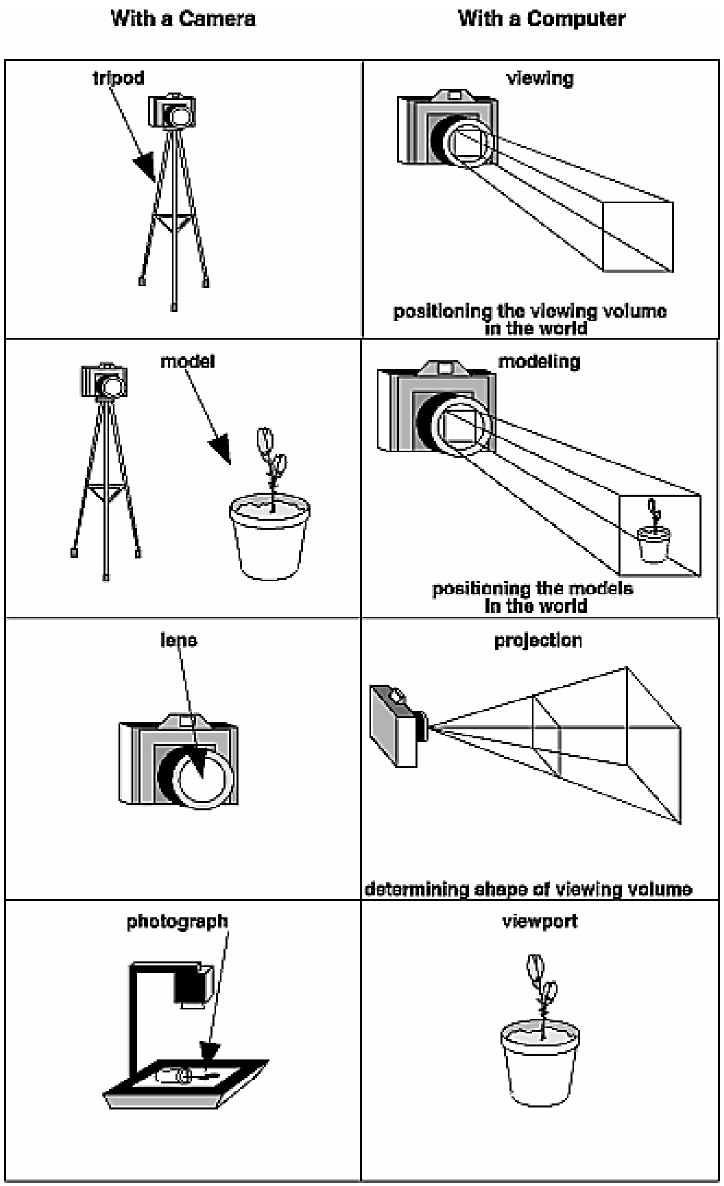
PE - 22

Profa. Ting

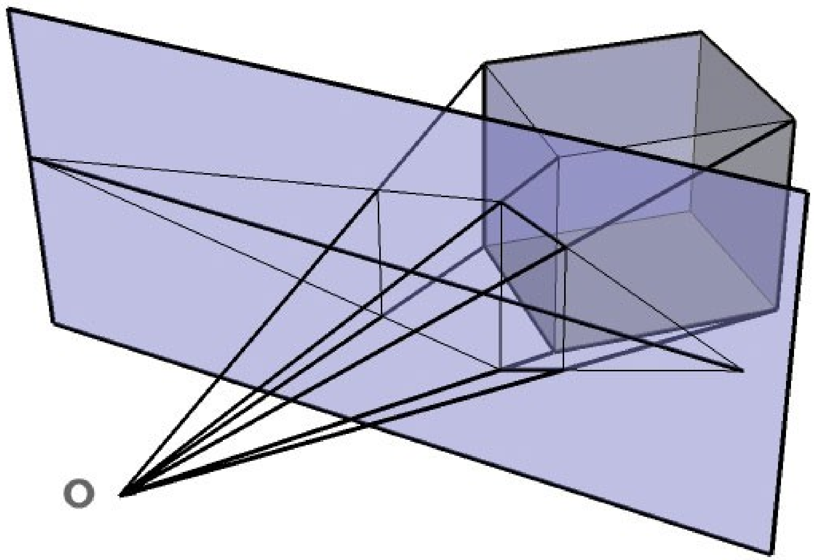
Transformações Geométricas

- Posicionar os blocos constituintes de uma cena
  - Alterar as coordenadas dos pontos
- Projetar a cena sobre o plano de imagem
  - Alterar as coordenadas dos pontos
- Enquadrar a cena na janela de exibição
  - Alterar as coordenadas dos pontos

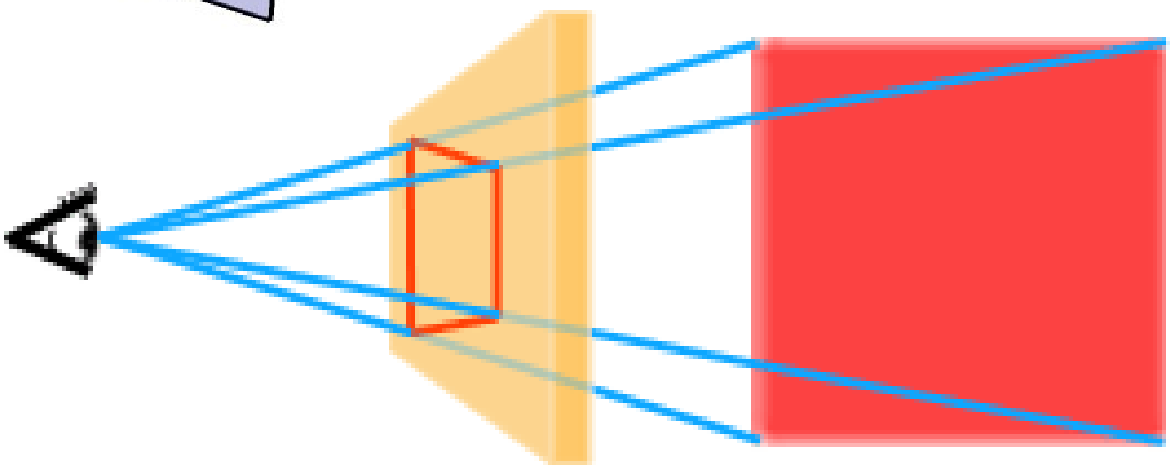




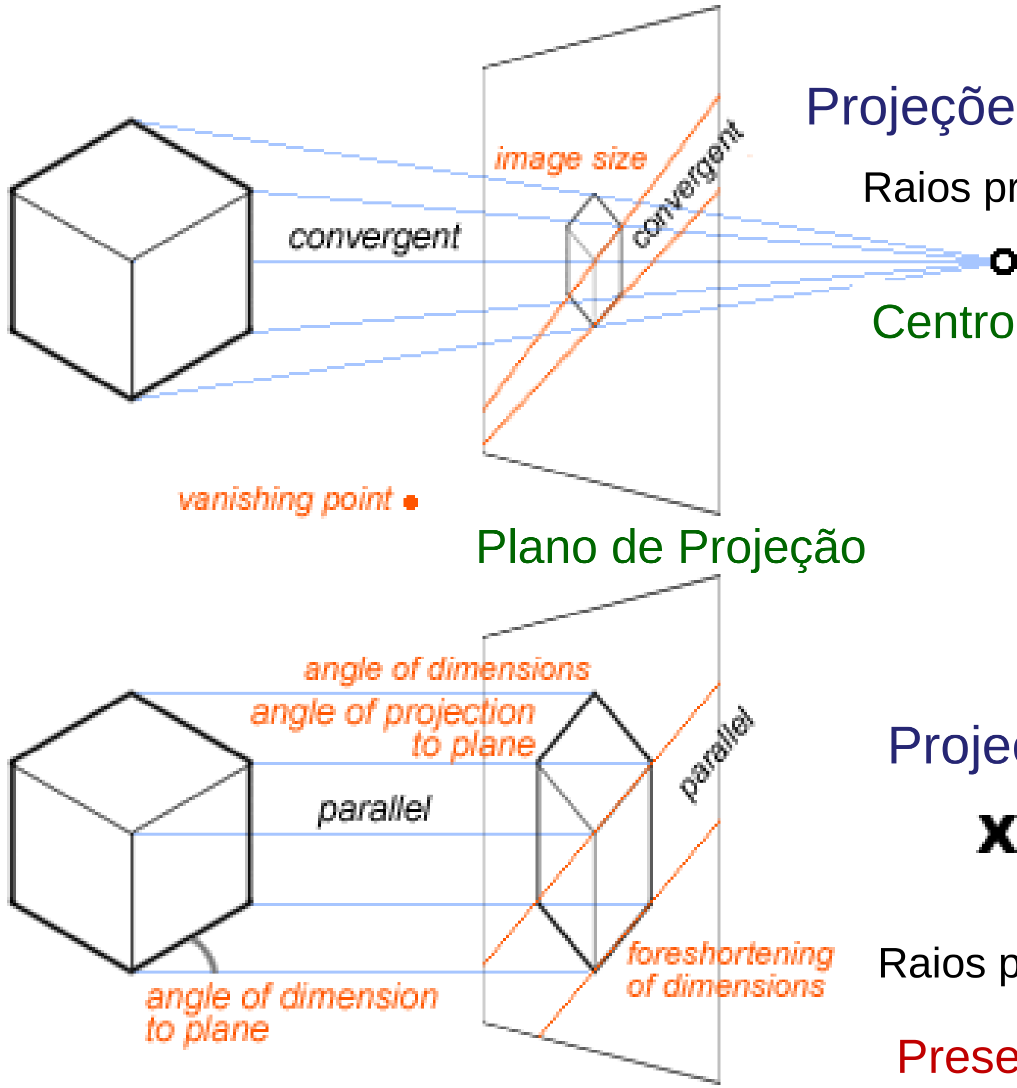
Transformações Projetivas



Projetar modelos geométricos 3D numa imagem 2D, exibível em dispositivos de saída 2D, a fim de produzir imagens sintéticas.



Uma Visão Clássica



Projeções Perspectivas

Raios projetores convergentes

Centro de Projeção

Plano de Projeção

Projeções Paralelas

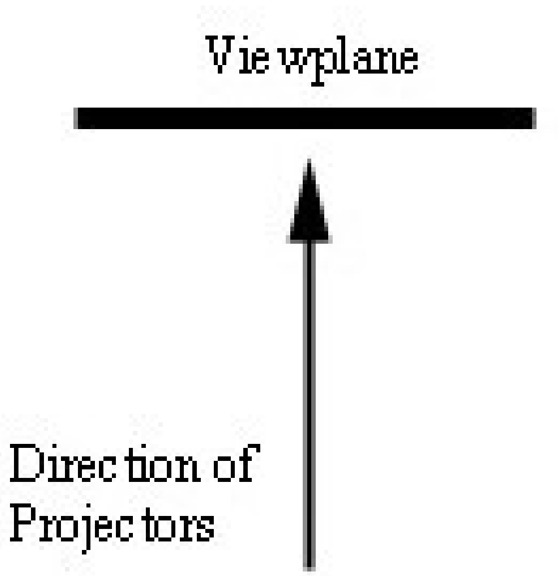
x

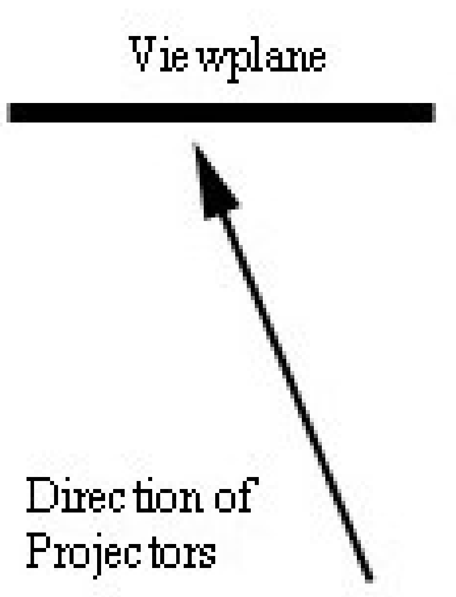
Raios projetores paralelos

Preserva paralelismo

Direção de Projeção

Projeções Paralelas



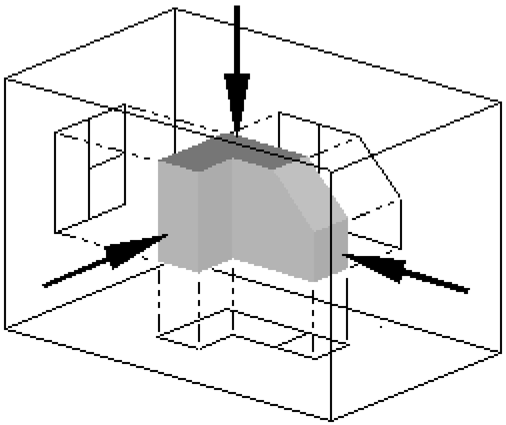


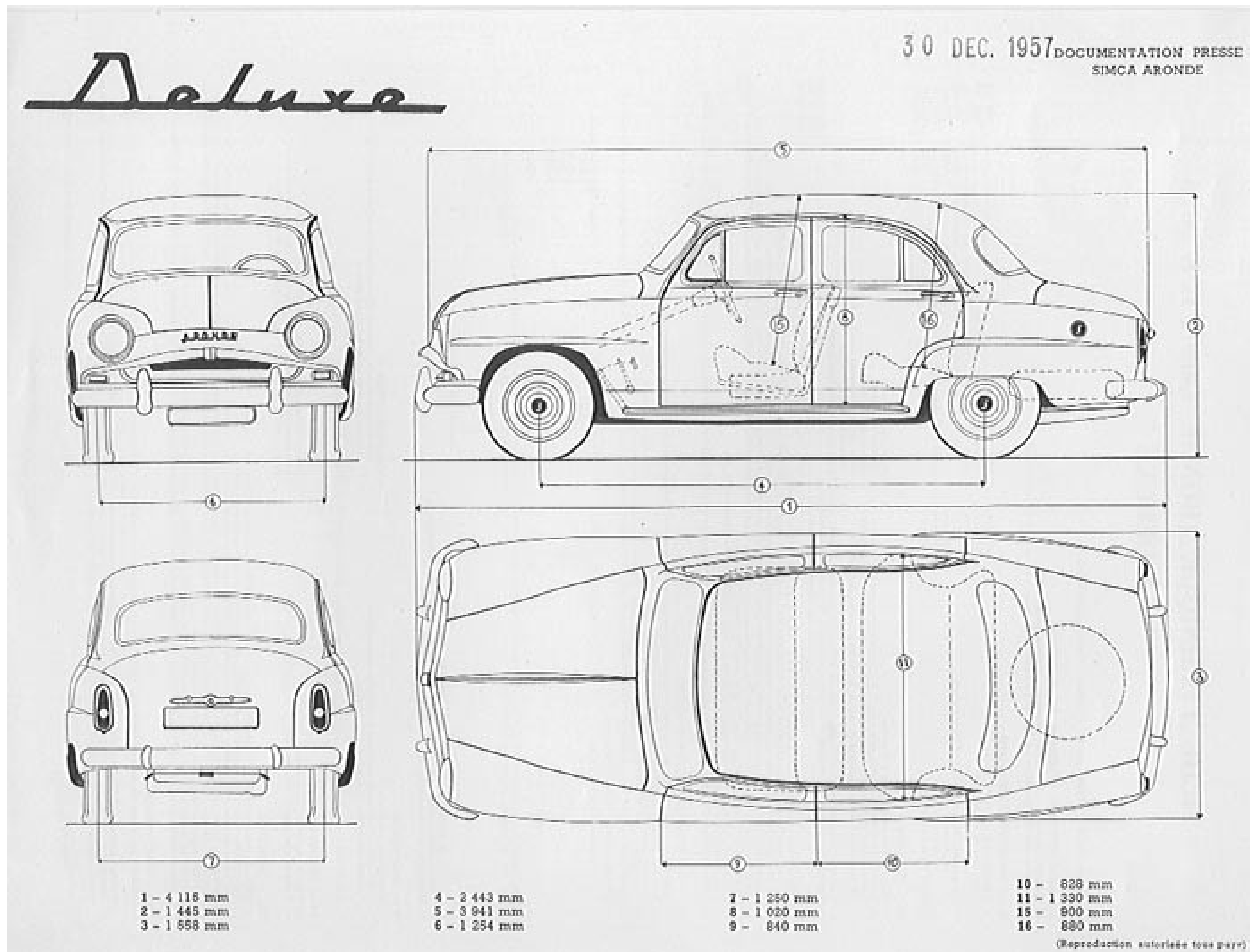
Ortográficas/Axonométricas

Oblíquas

Projeções Ortográficas

Desenhos técnicos: preserva a relação das medidas





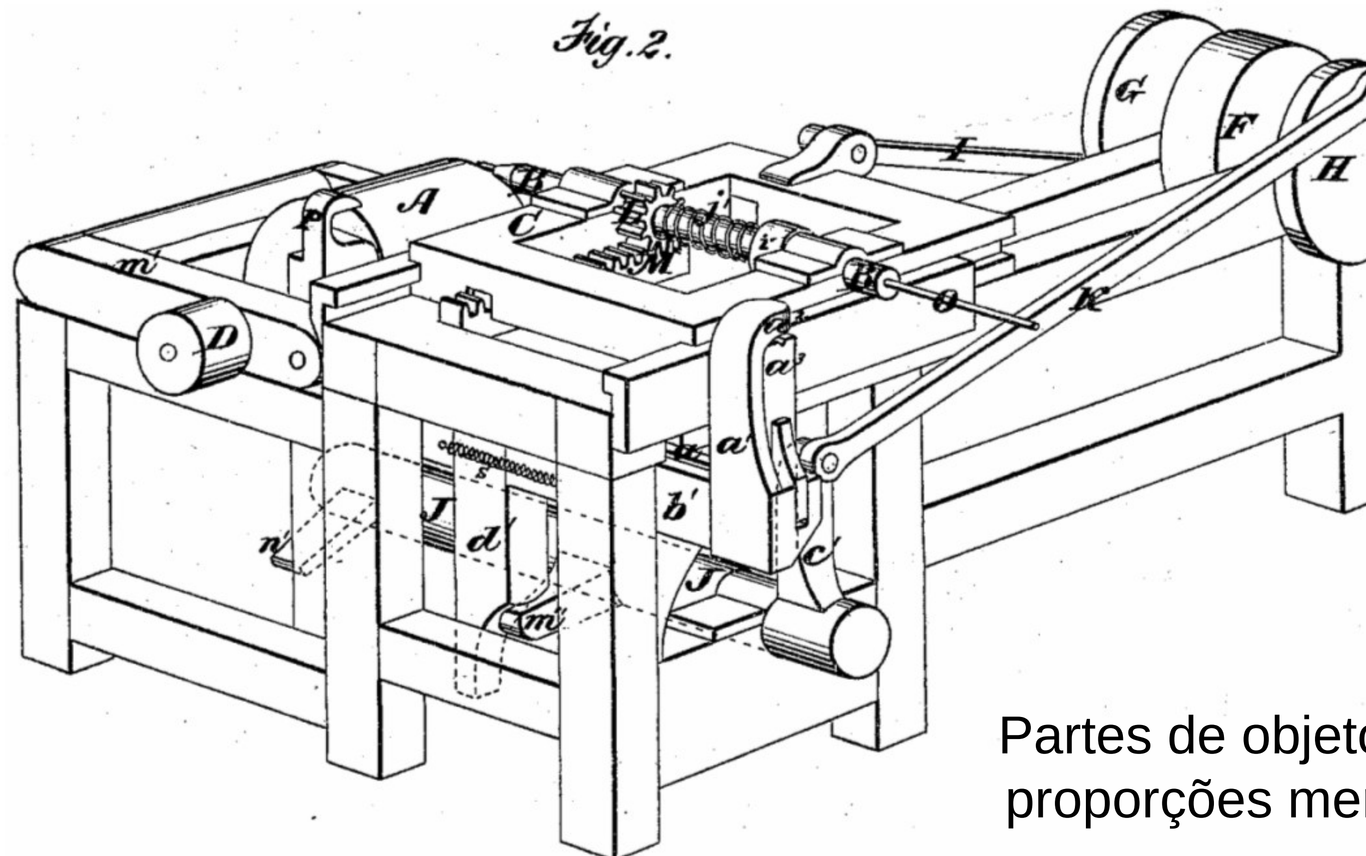
$$f_x = 1$$

$$f_y = 1$$

$$f_z = 1$$

Projeções Axonométricas

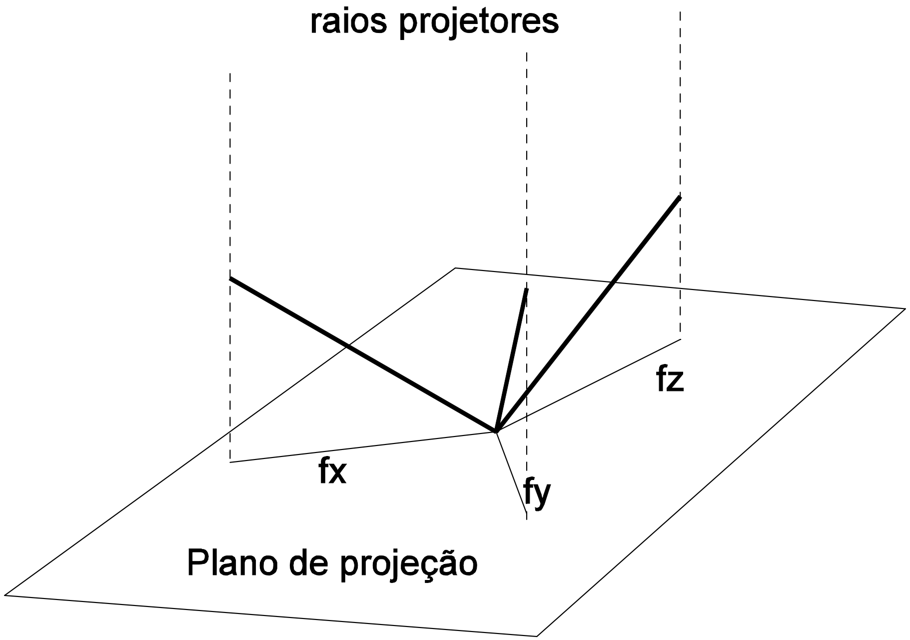
Escorços: provêem melhor percepção de profundidade



Partes de objetos em proporções menores

$$f_x, f_y, f_z \leq 1.0$$

Projeções Axonométricas
fator de redução < 1.0



Projeção no plano z=0

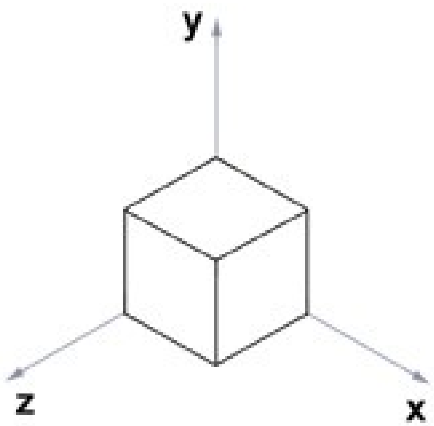
$$T\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_x & y_x & z_x \\ x_x & y_x & z_x \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

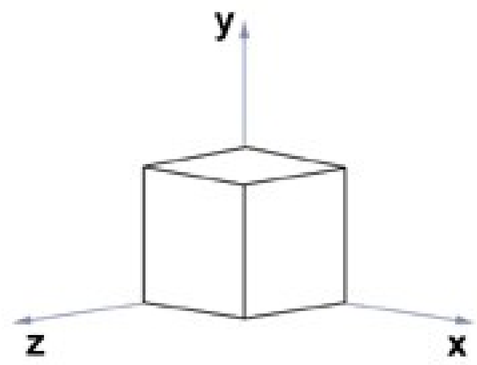
$$f_x = \sqrt{x_x^2 + y_x^2}$$

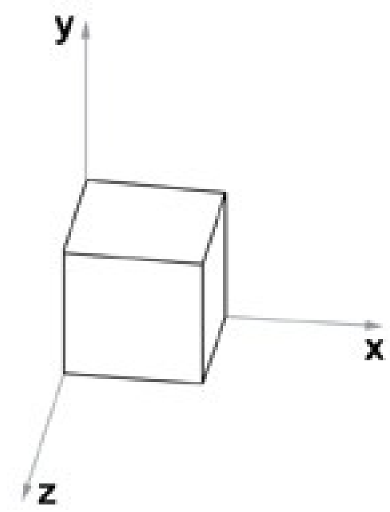
$$f_y = \sqrt{x_y^2 + y_y^2}$$

$$f_z = \sqrt{x_z^2 + y_z^2}$$

Projeções Axonométricas







Isométricas

$$f_x = f_y = f_z$$

Dimétricas

$$f_x = f_y$$

$$f_x = f_z$$

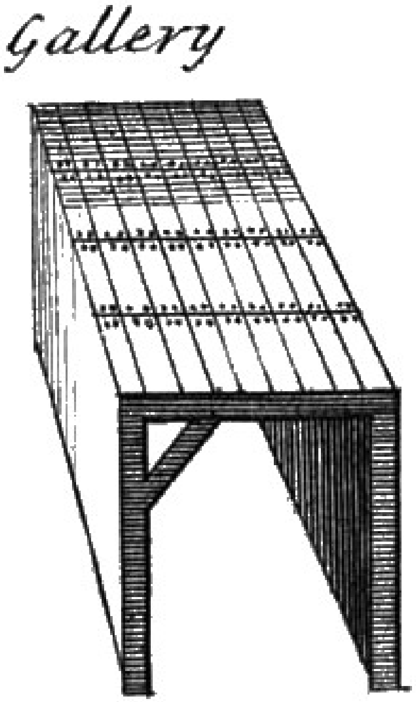
$$f_z = f_y$$

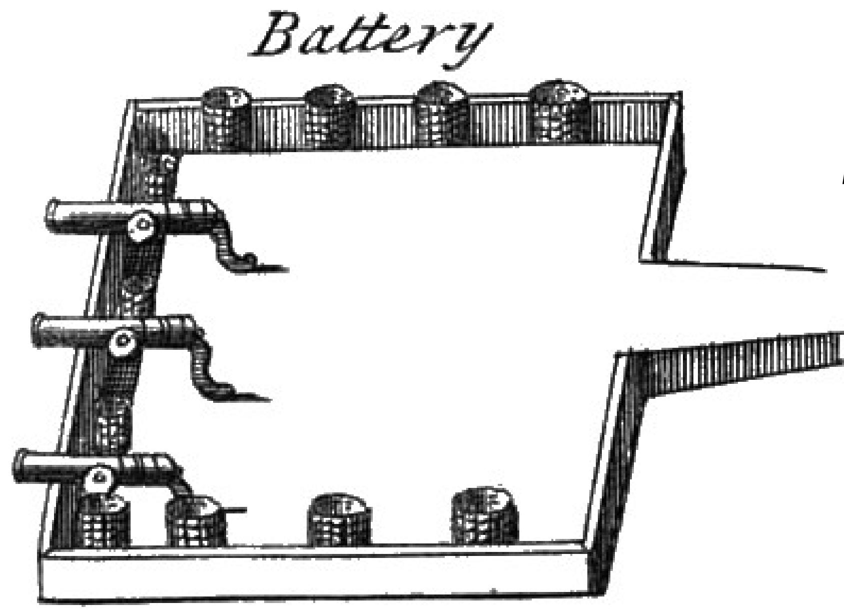
Trimétricas

$$f_x \neq f_y \neq f_z$$

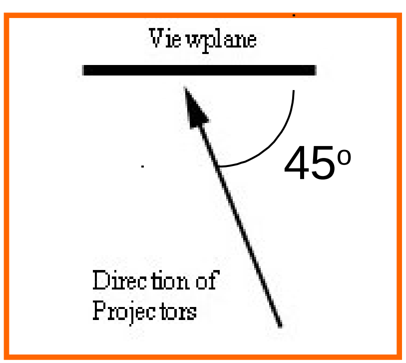
Projeções Oblíquas Cavalier

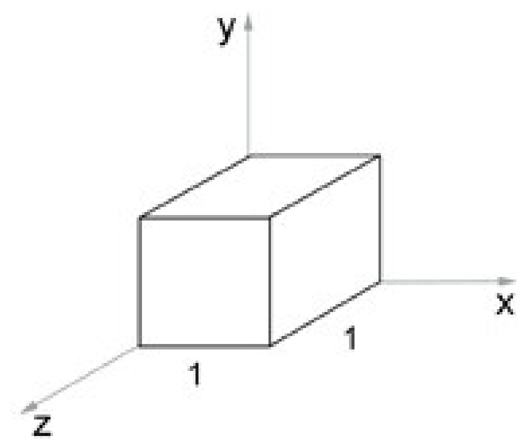
"Vista Aérea": ângulo 45^o





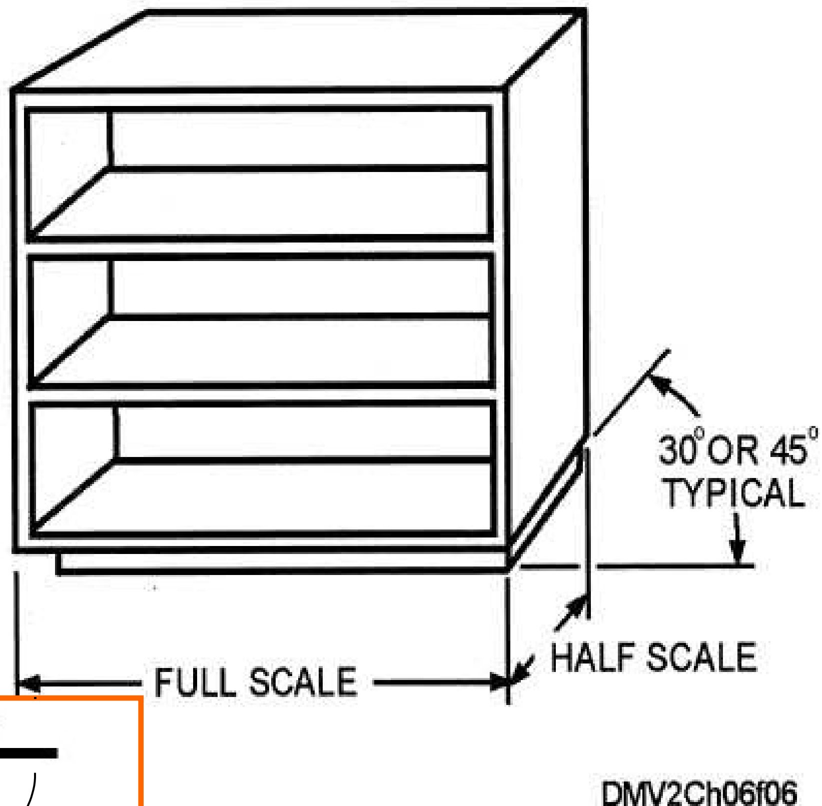
$$f_z = 1$$



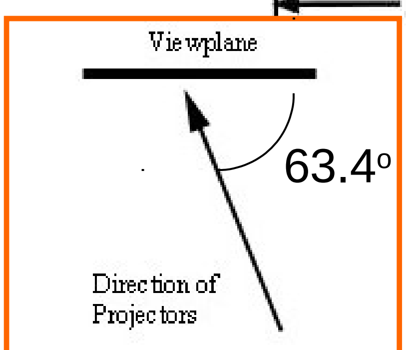


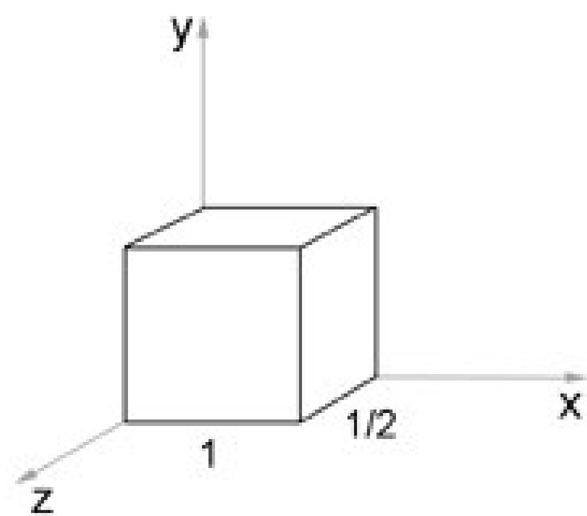
Projeções Oblíquas Cabinet

Vista “oblíqua” de estantes: ângulo 63.4º



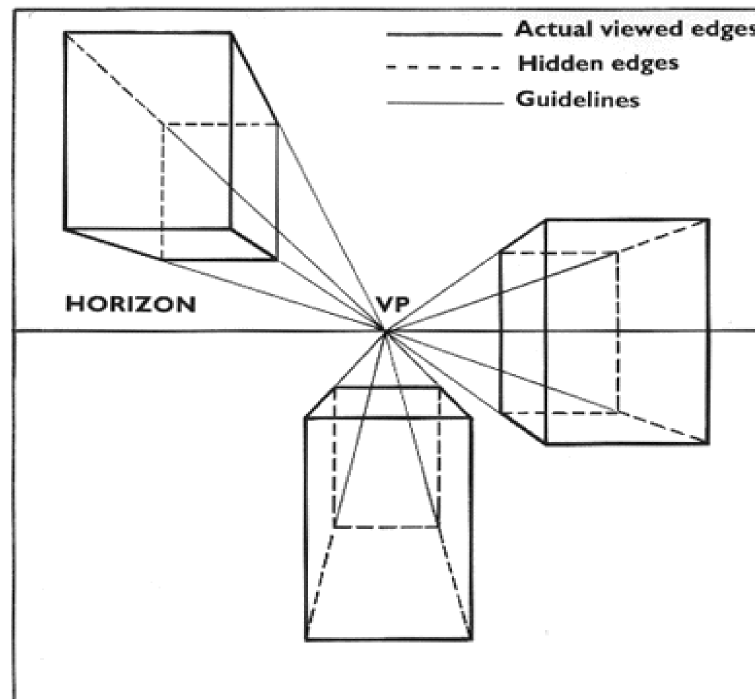
$$f_z = \frac{1}{2}$$





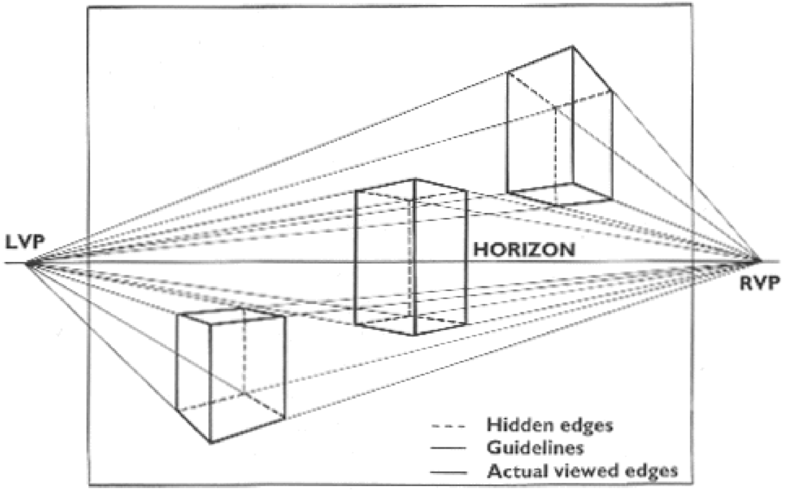
Projeções Perspectivas

Um ponto de fuga



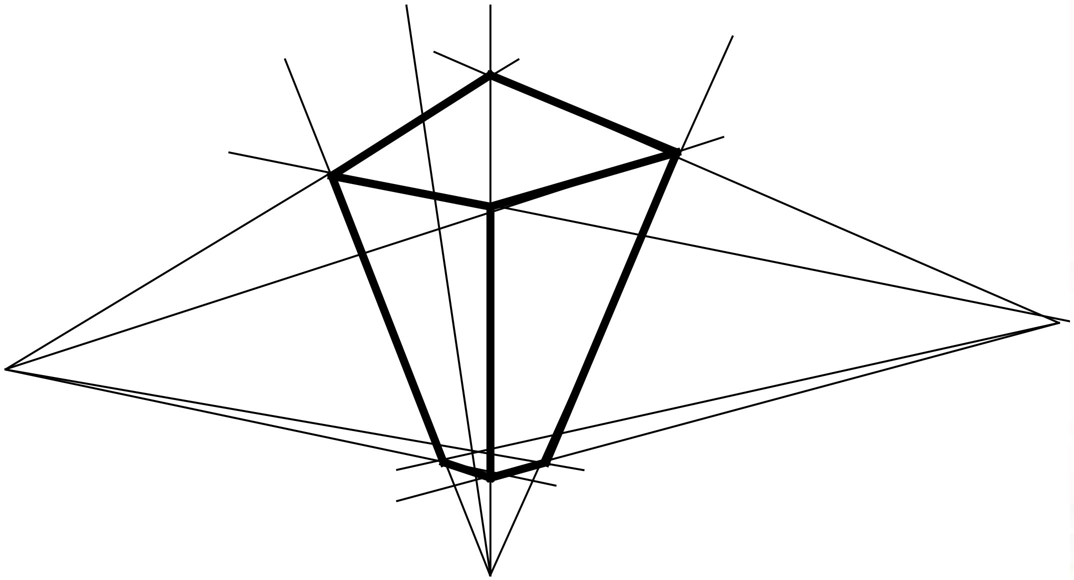
Projeções Perspectivas

Dois pontos de fuga

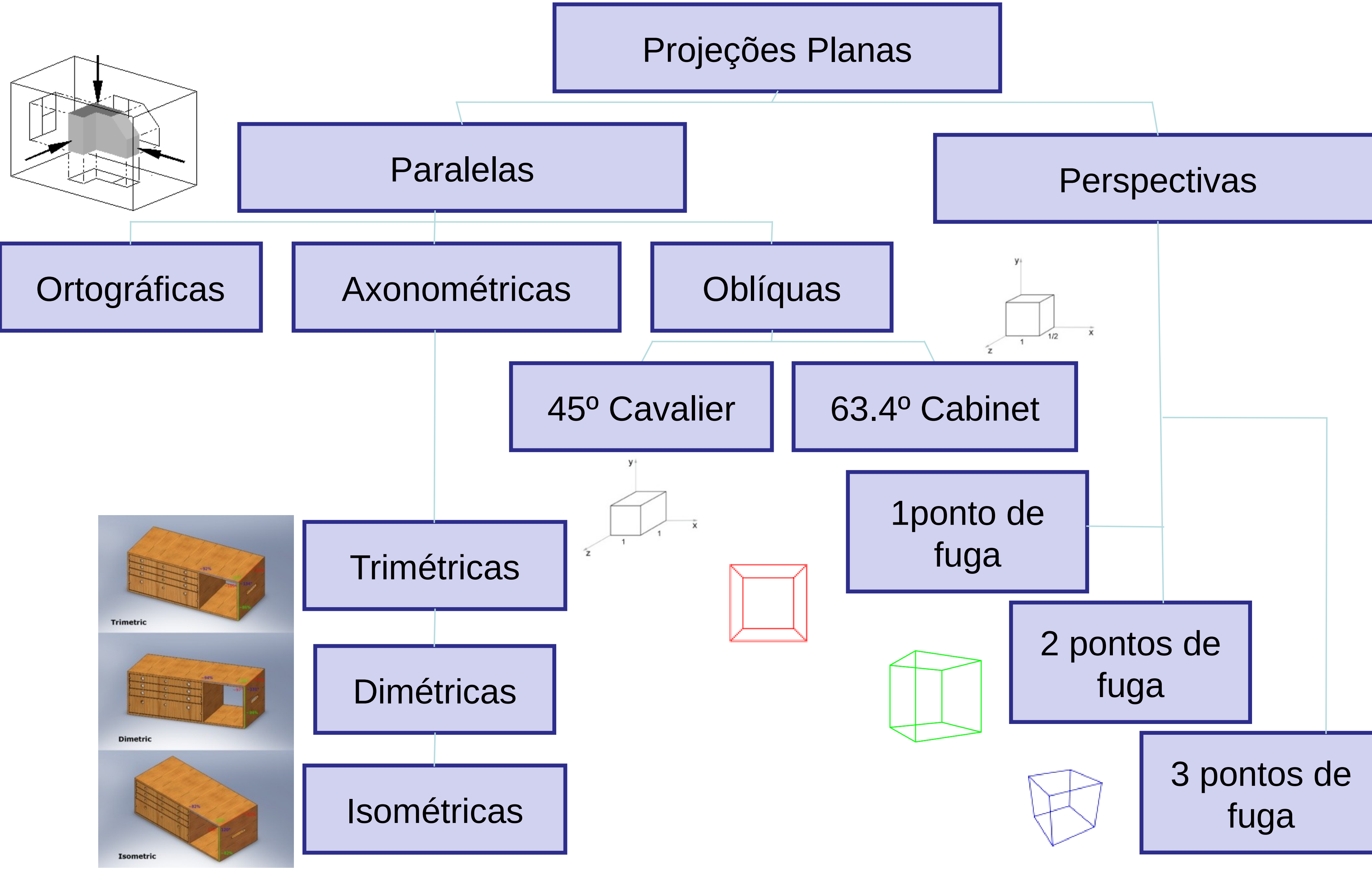


Projeções Perspectivas

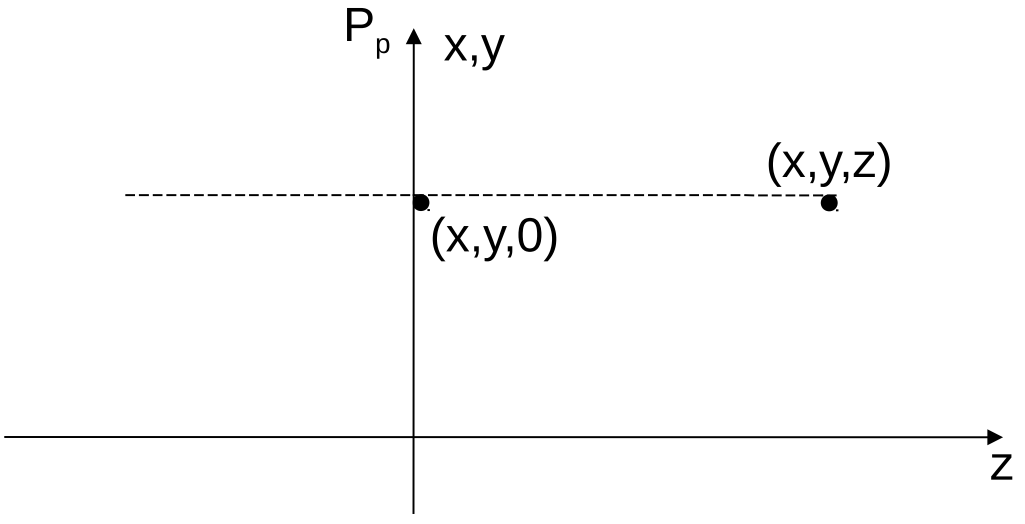
Três pontos de fuga



Uma Visão Clássica

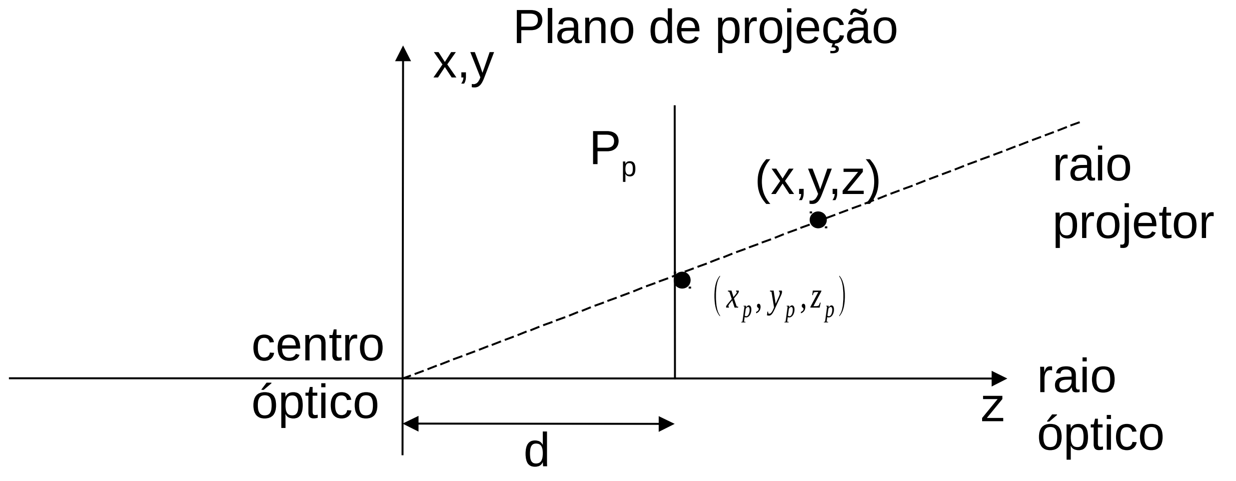


“Algebrização”



$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

"Algebrização"



$$x_p = \frac{xd}{z}$$

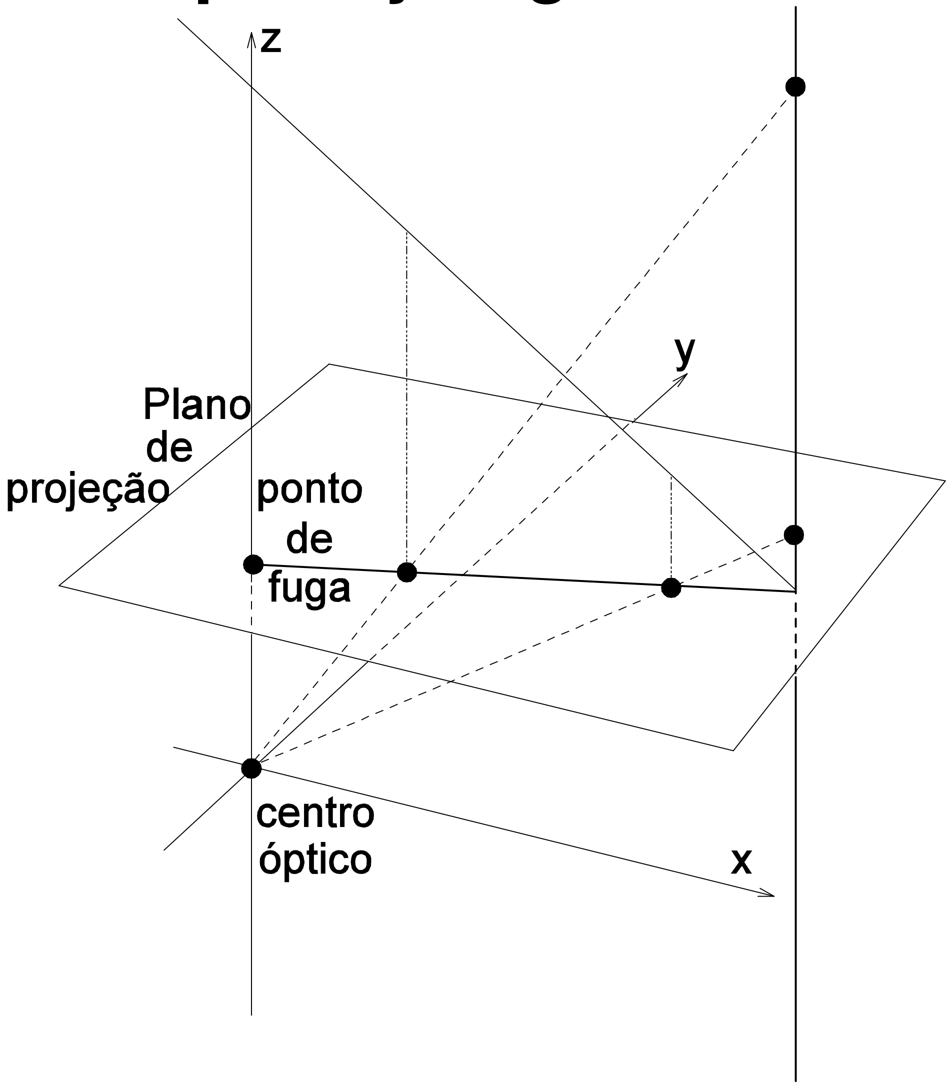
$$y_p = \frac{yd}{z}$$

$$z_p = \frac{zd}{z} = d$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ \frac{z}{d} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{d} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

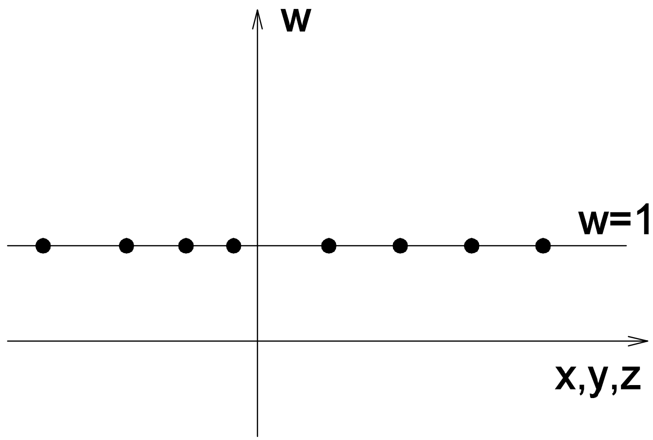
Projeções Perspectivas

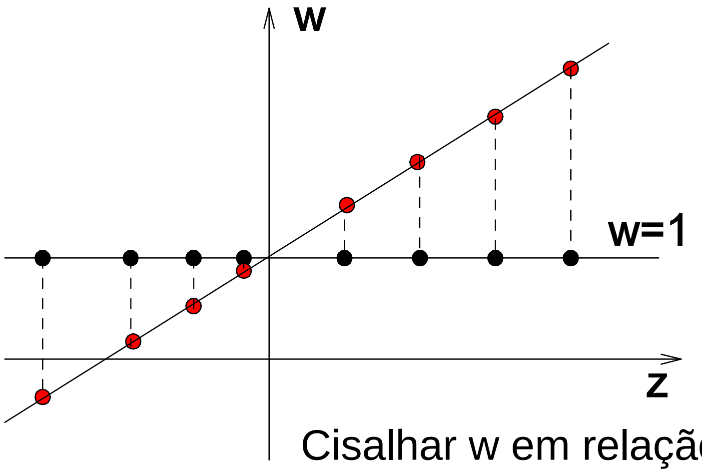
Interpretação geométrica



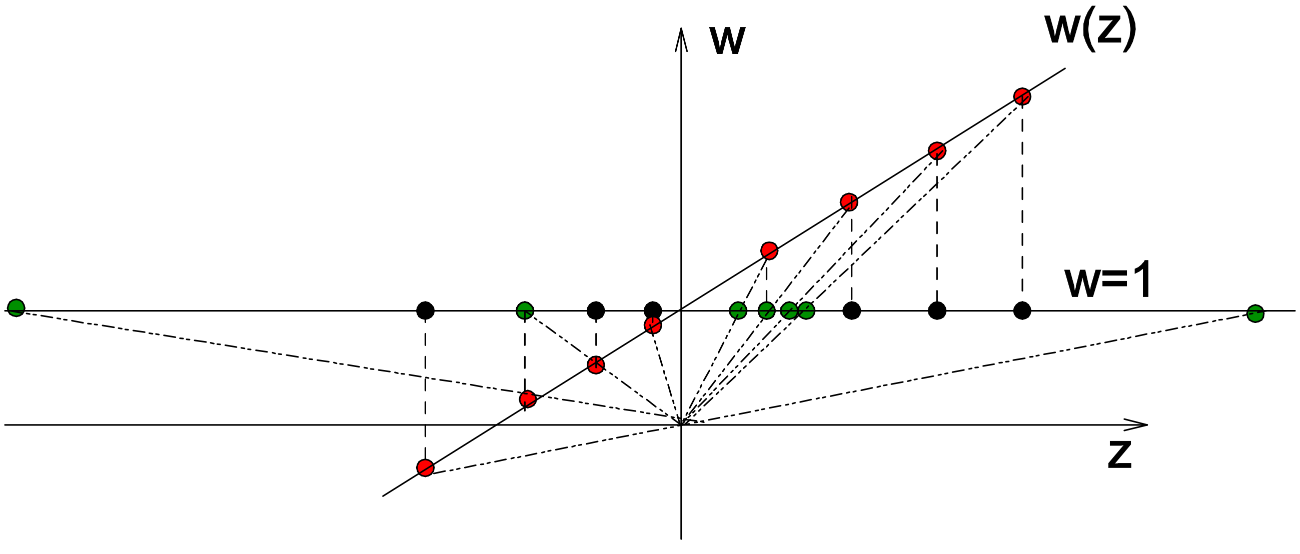
www.math.utah.edu/~treiberg/Perspect/Perspect.htm

Projeções Perspectivas
Interpretação geométrica



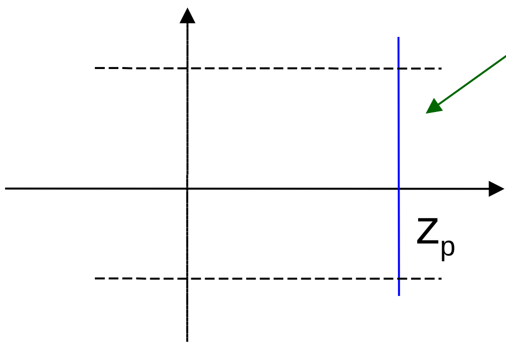


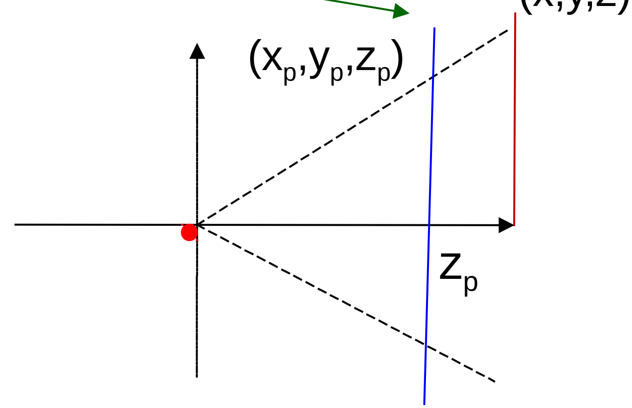
Cisalhar w em relação a z



Projeções
Casos Triviais

Plano de Projeção





Paralela

Perspectiva

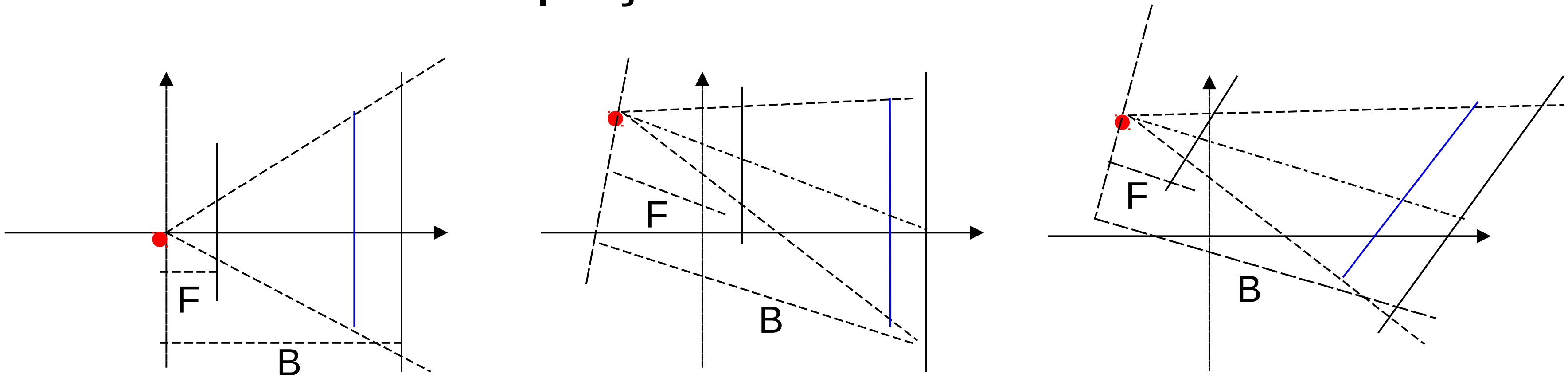
Basta substituir a coordenada z de cada ponto por z_p

Coordenadas x, x_p, y e y_p coincidem com as “alturas” dos triângulos e as coordenadas z com as “bases” dos triângulos. Problema se reduz a obter relação entre estas coordenadas pela semelhança de triângulos

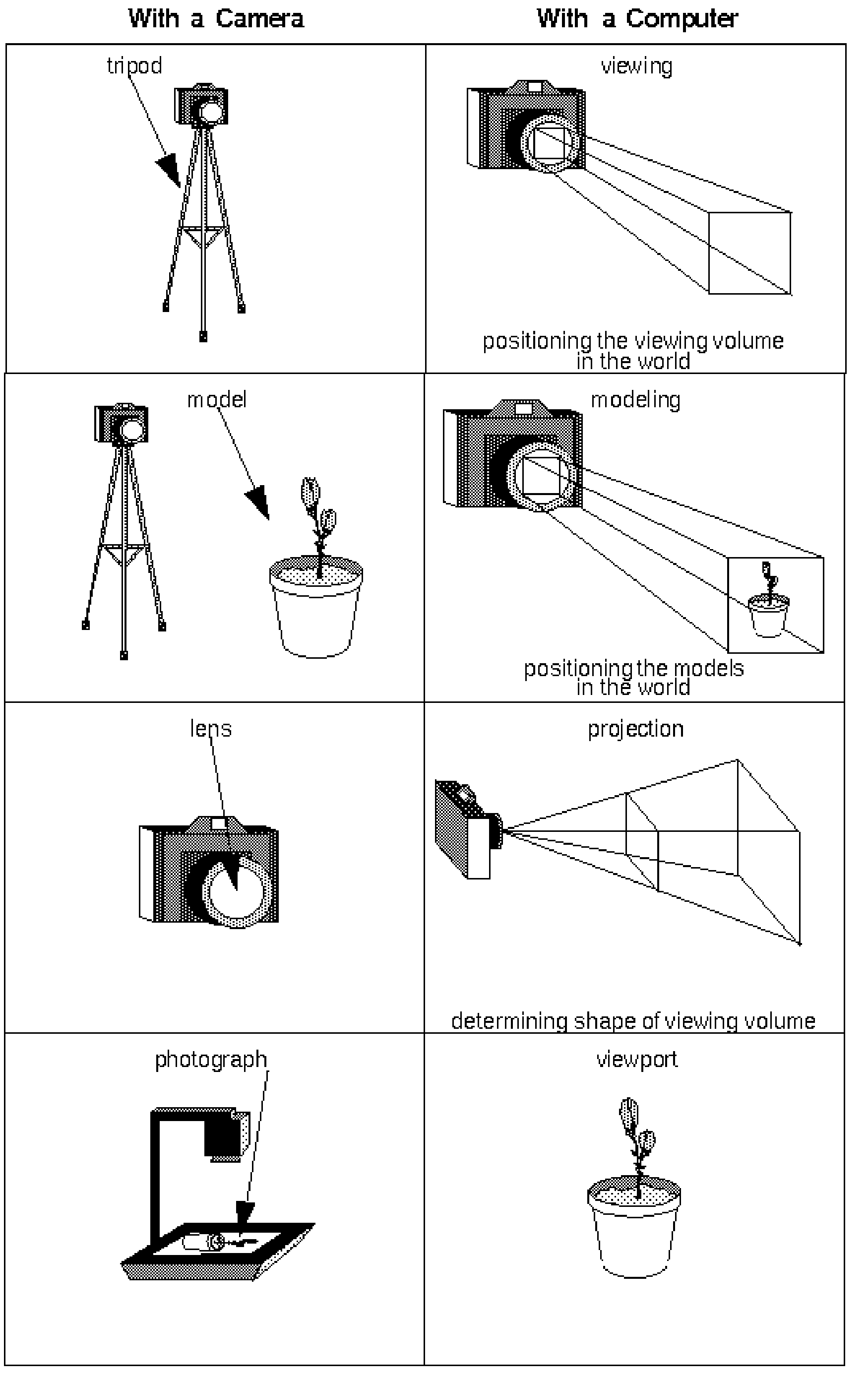
Projeções

Diversidade de Casos

- Plano de projeção tem o vetor normal na direção do eixo z e o centro de projeção sobre o eixo z.
- Plano de projeção tem o vetor normal na direção do eixo z e o centro de projeção arbitrariamente posicionado.
- Tanto o plano quanto o centro são arbitrariamente posicionados no espaço.



Paradigma: dividir para conquistar

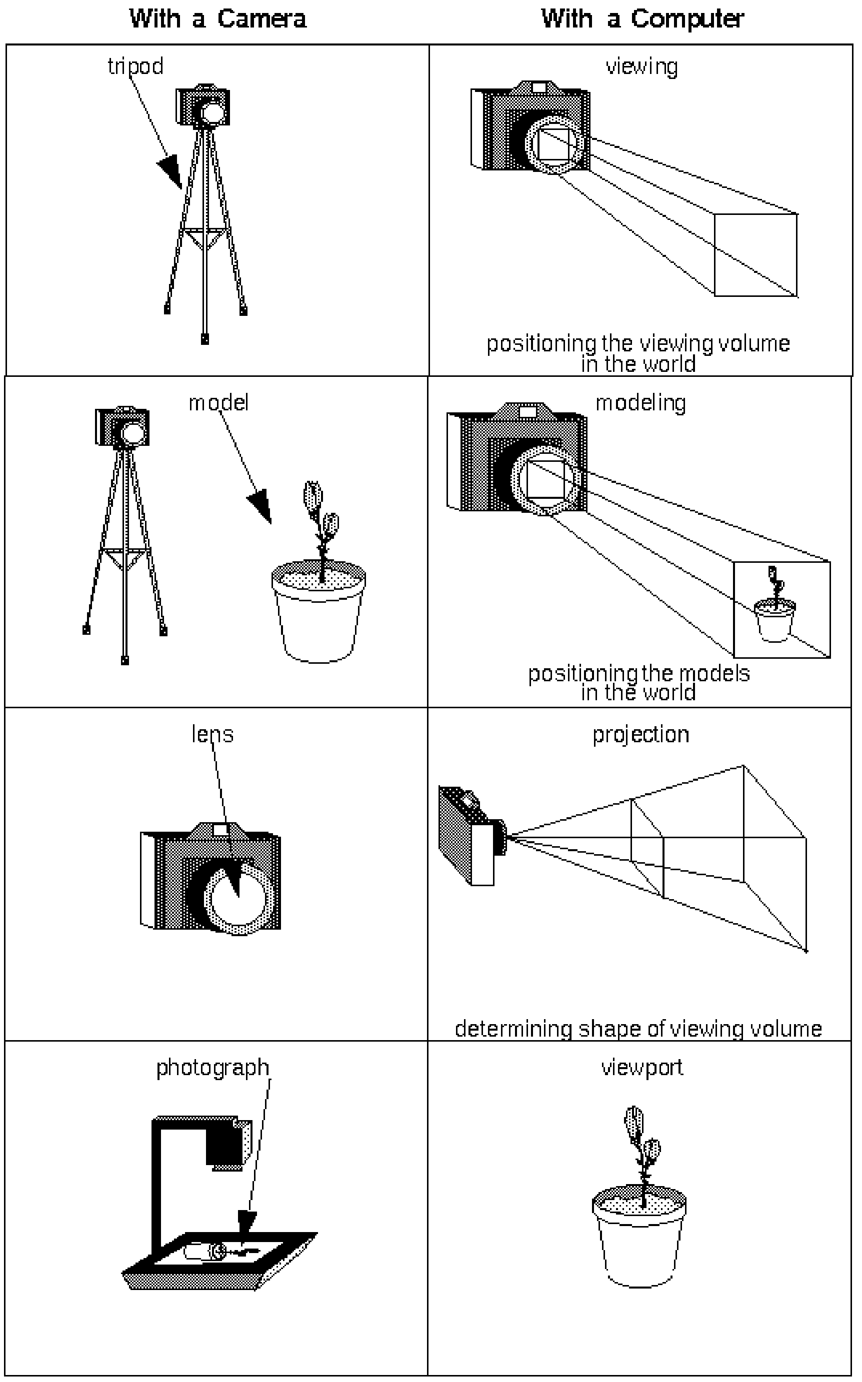


Distintos Espaços

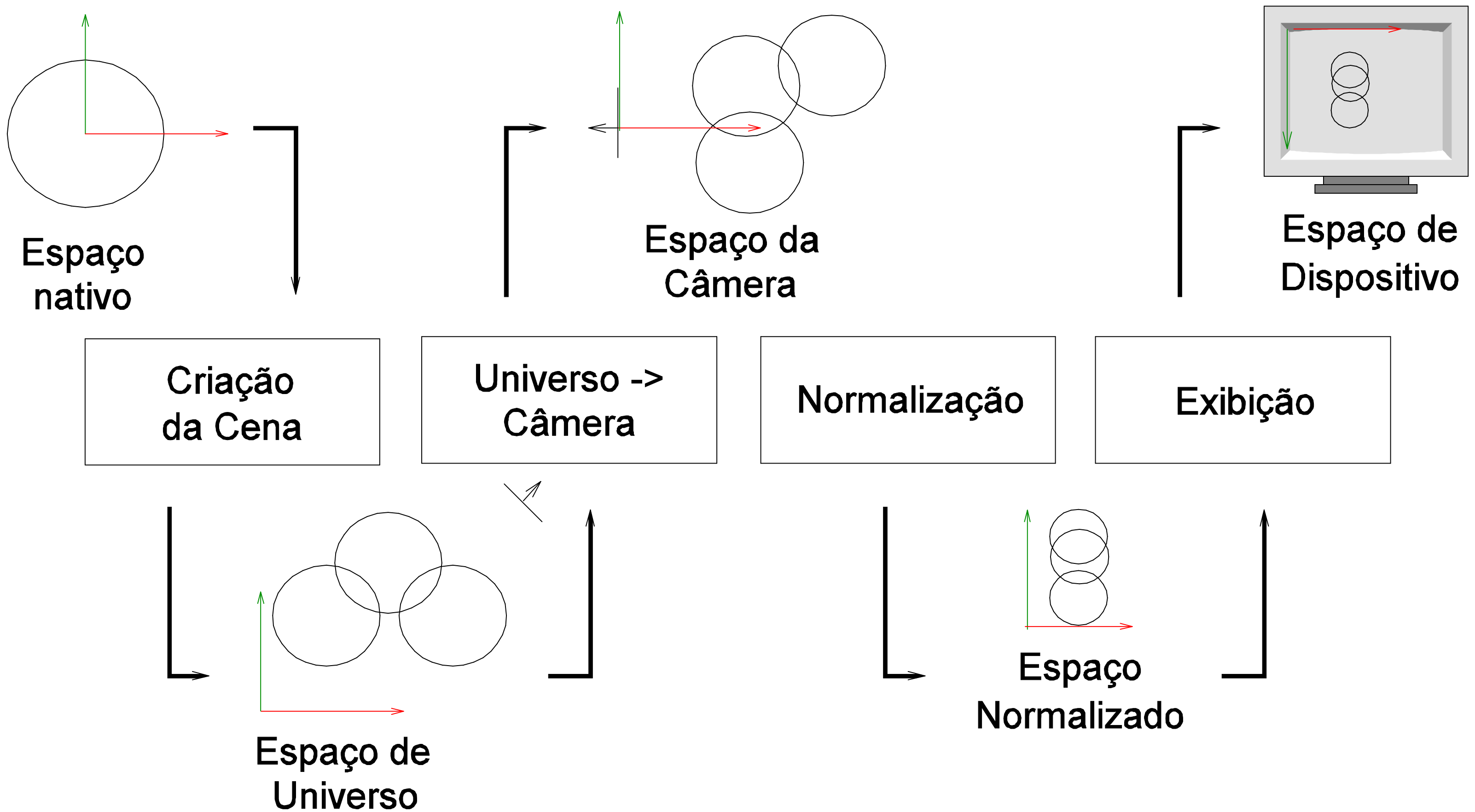
Referencial da Câmera
VRC

Referencial Normalizado
NDC

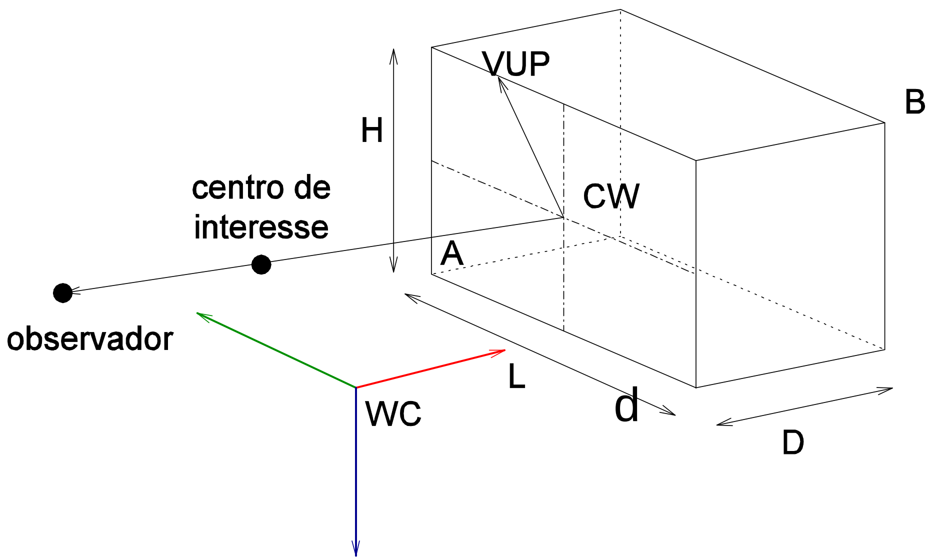
Referencial da Janela
DC



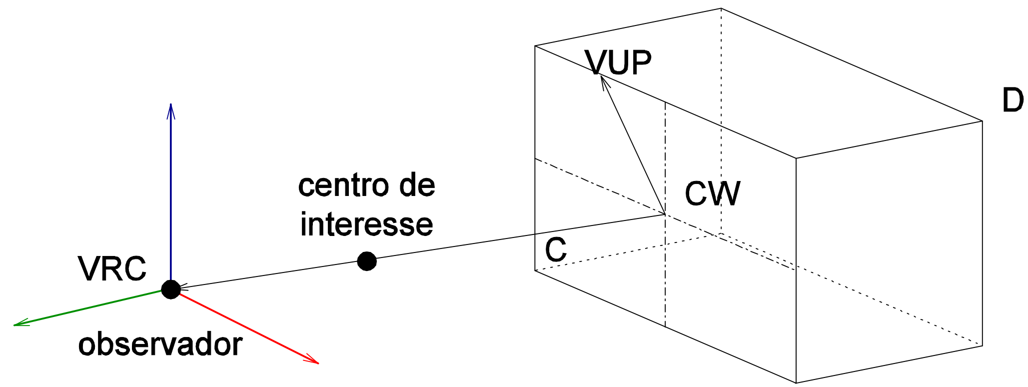
Fluxo de Projeção



Modelo de Câmera 1

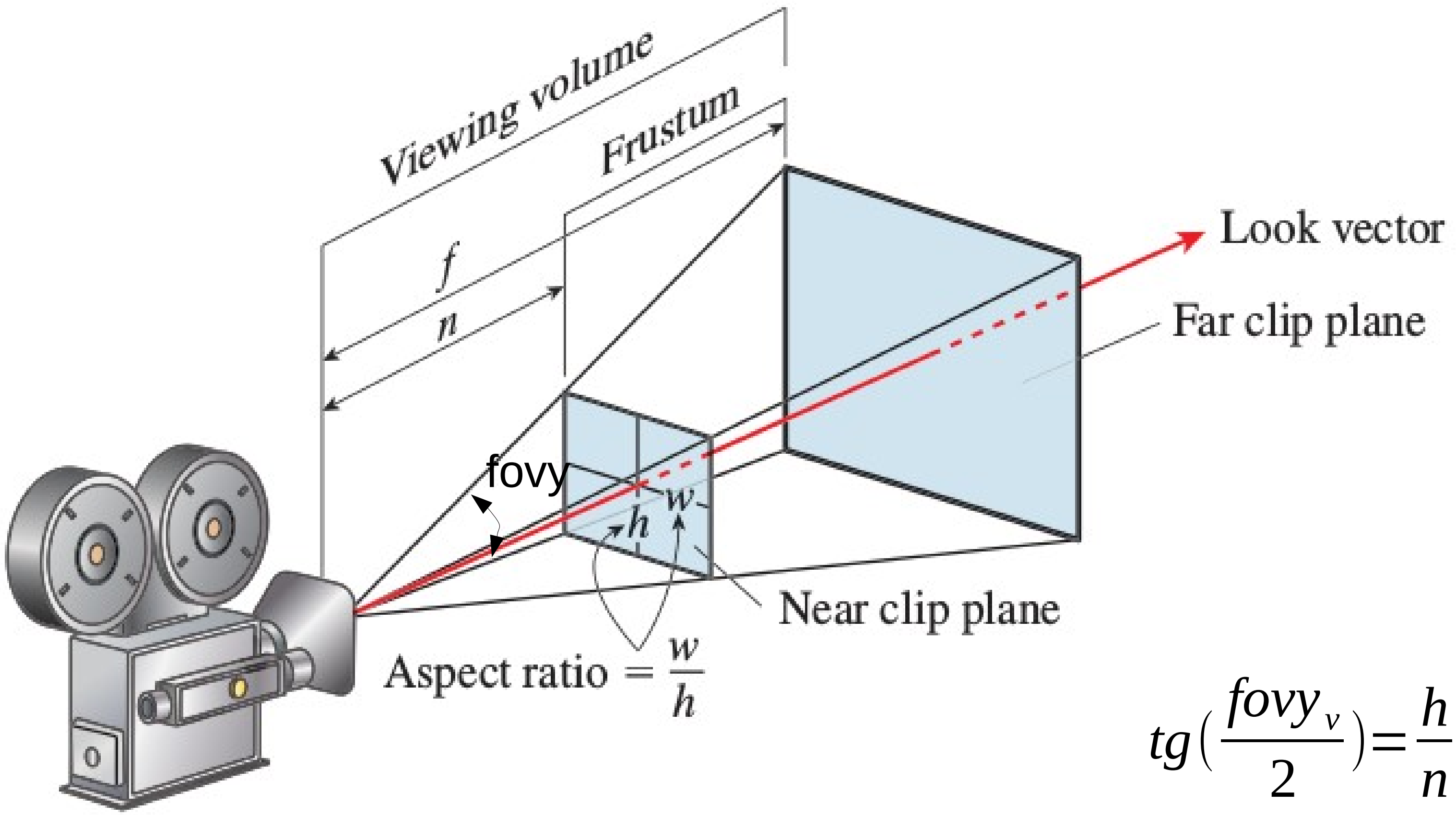


Centrado no observador



Eixo óptico coincidente com o vetor normal do plano de projeção

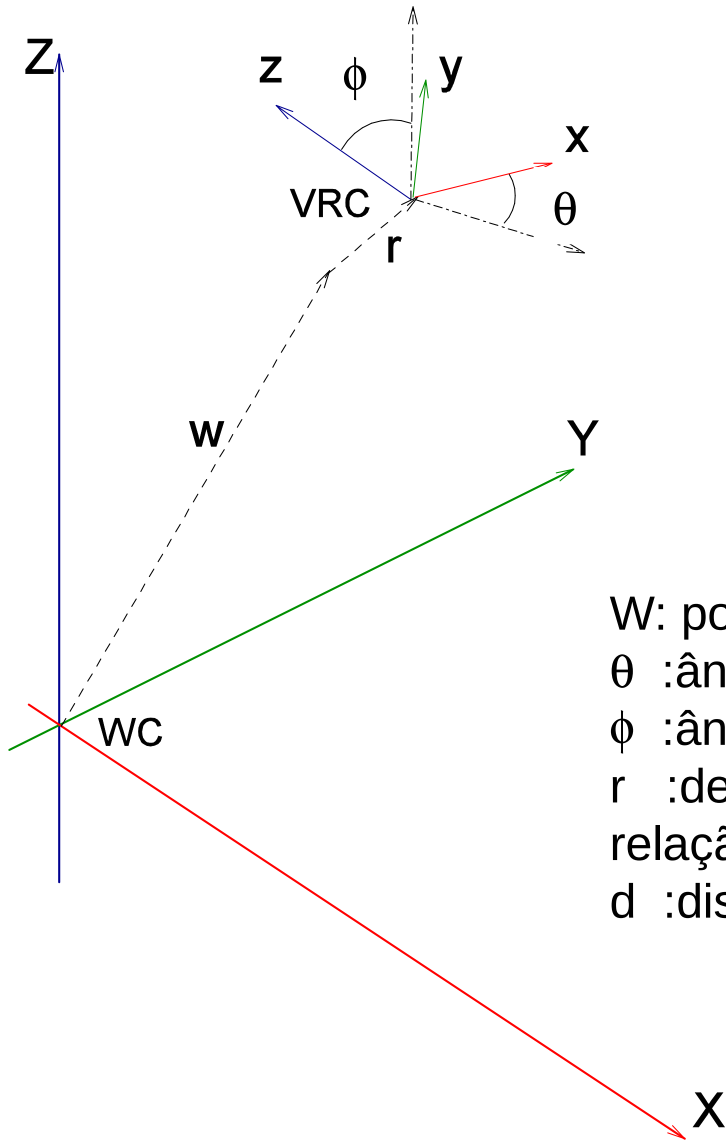
Modelo de Câmera 1



$$tg\left(\frac{fovy_v}{2}\right)=\frac{h}{n}$$

$$tg\left(\frac{fovy_h}{2}\right)=\frac{w}{n}$$

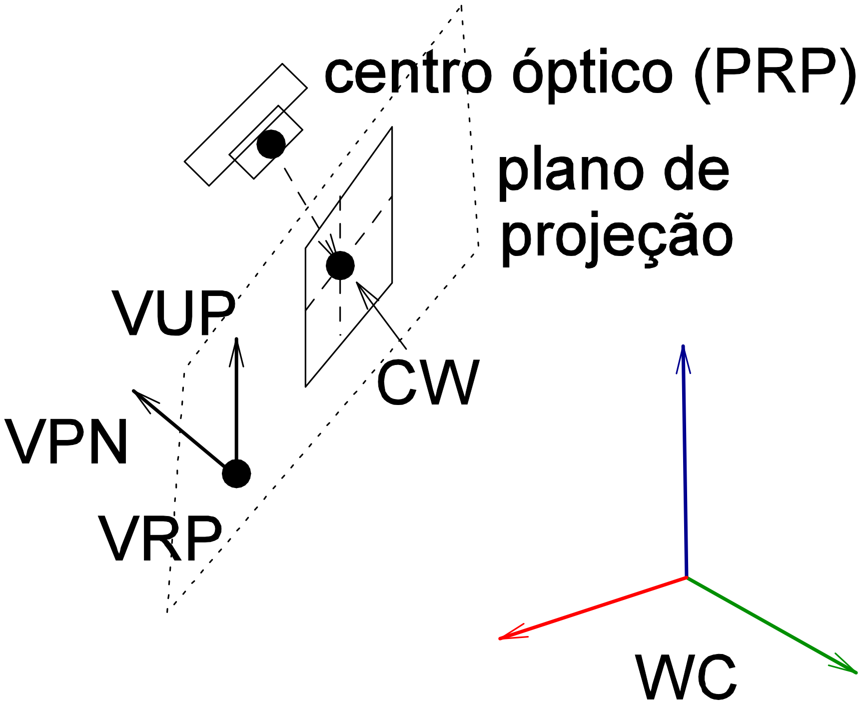
Modelo de Câmera 2

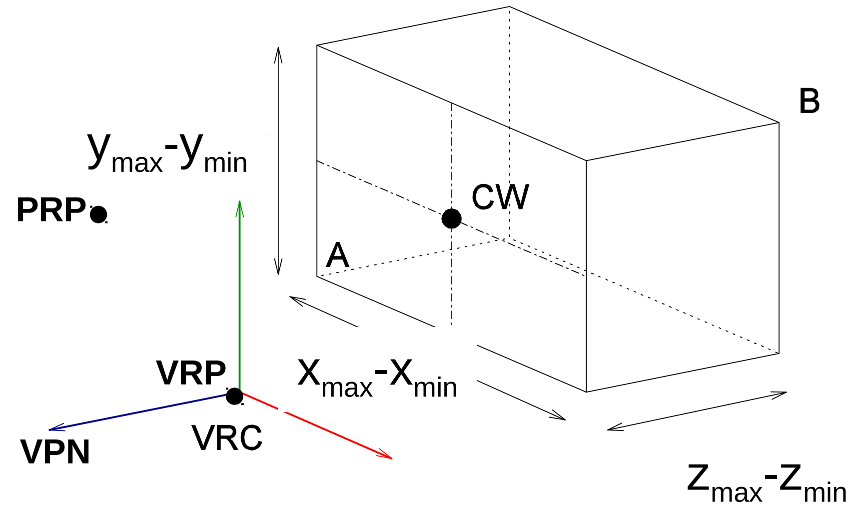


W: posição da câmera
θ :ângulo em relação a (1,0,0,0)
ϕ :ângulo em relação a (0,0,1,0)
r :deslocamento do plano em relação à base da câmera
d :distância focal da lente

Centrado na câmera

Modelo de Câmera 3



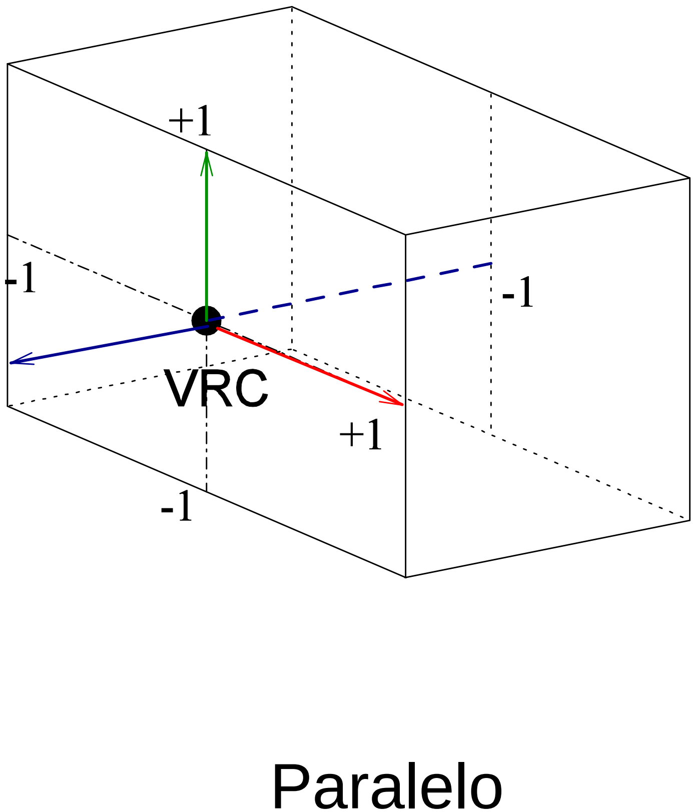


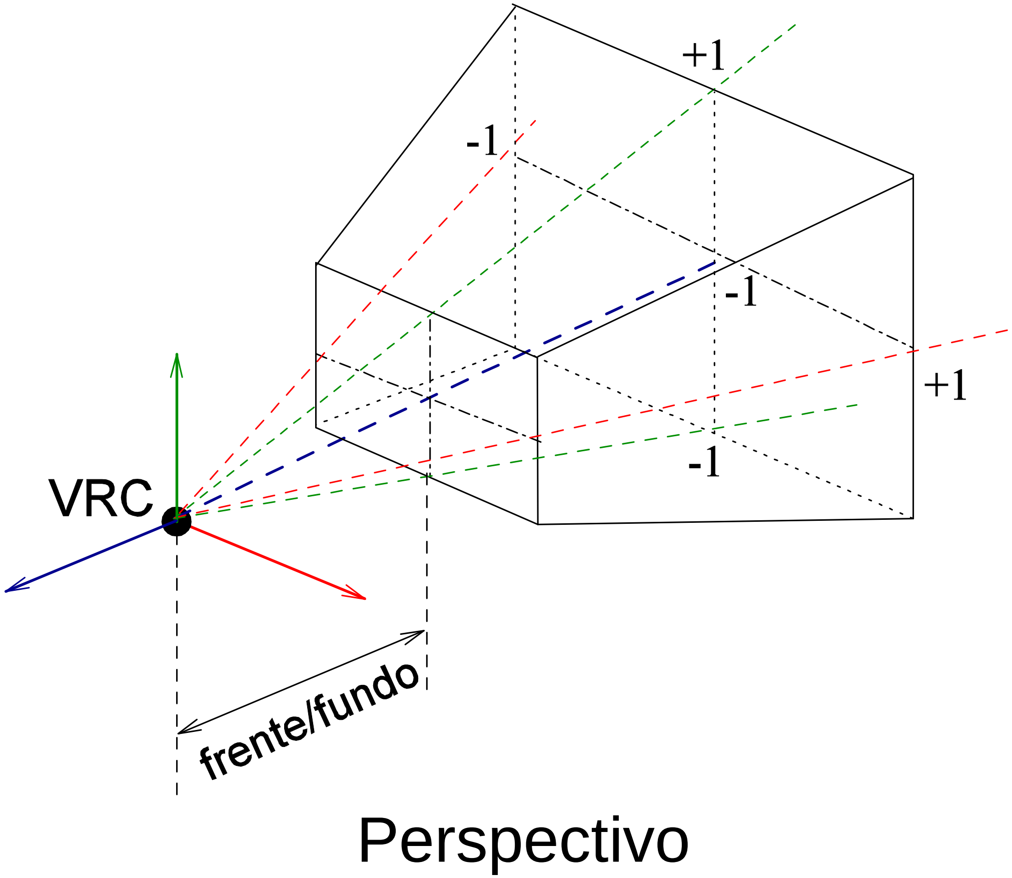
Centrado no plano de projeção

$A = (x_{min},y_{min},z_{min})$

$B=(x_{max},y_{max},z_{max})$

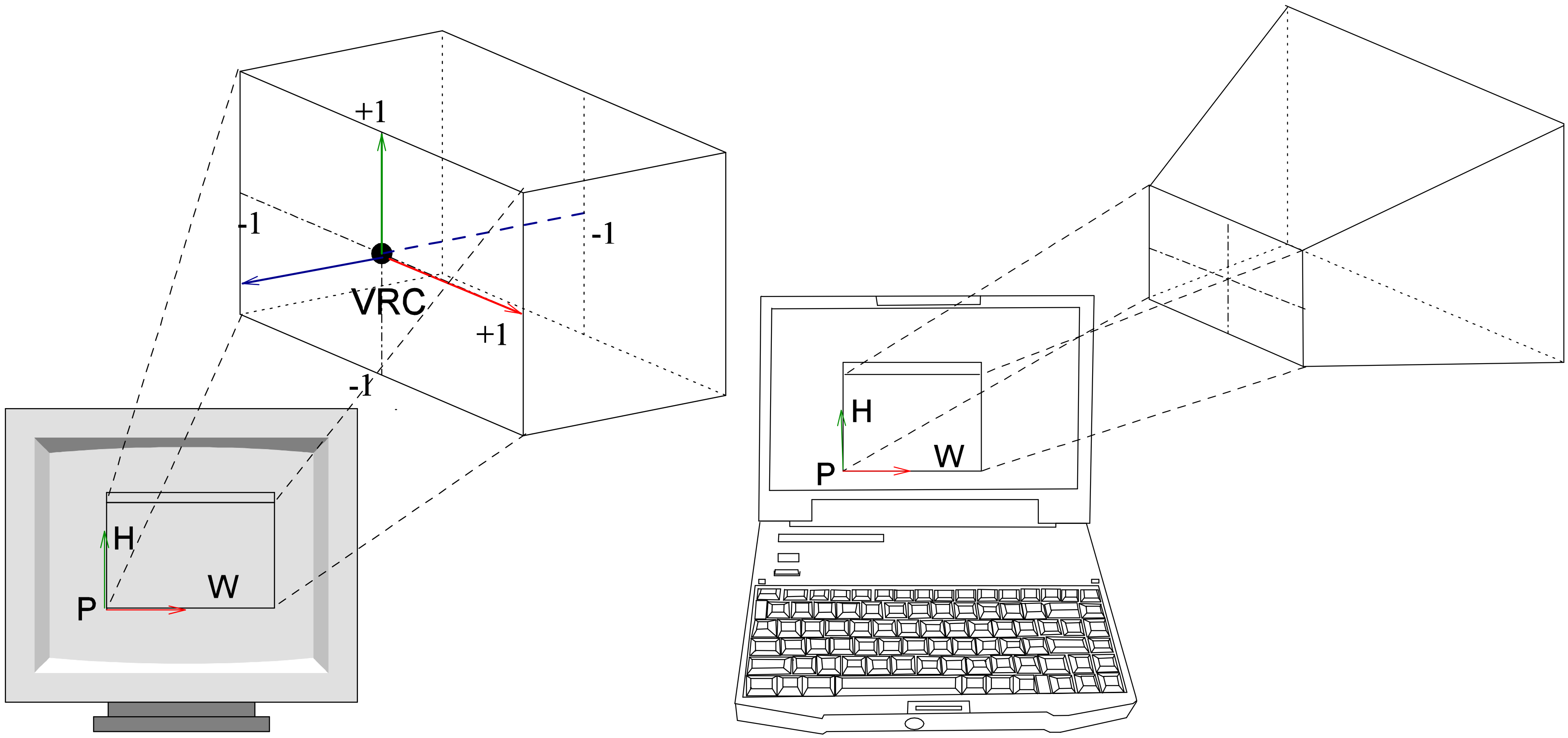
Modelo de Espaço Normalizado





Modelo de Dispositivo

Viewport

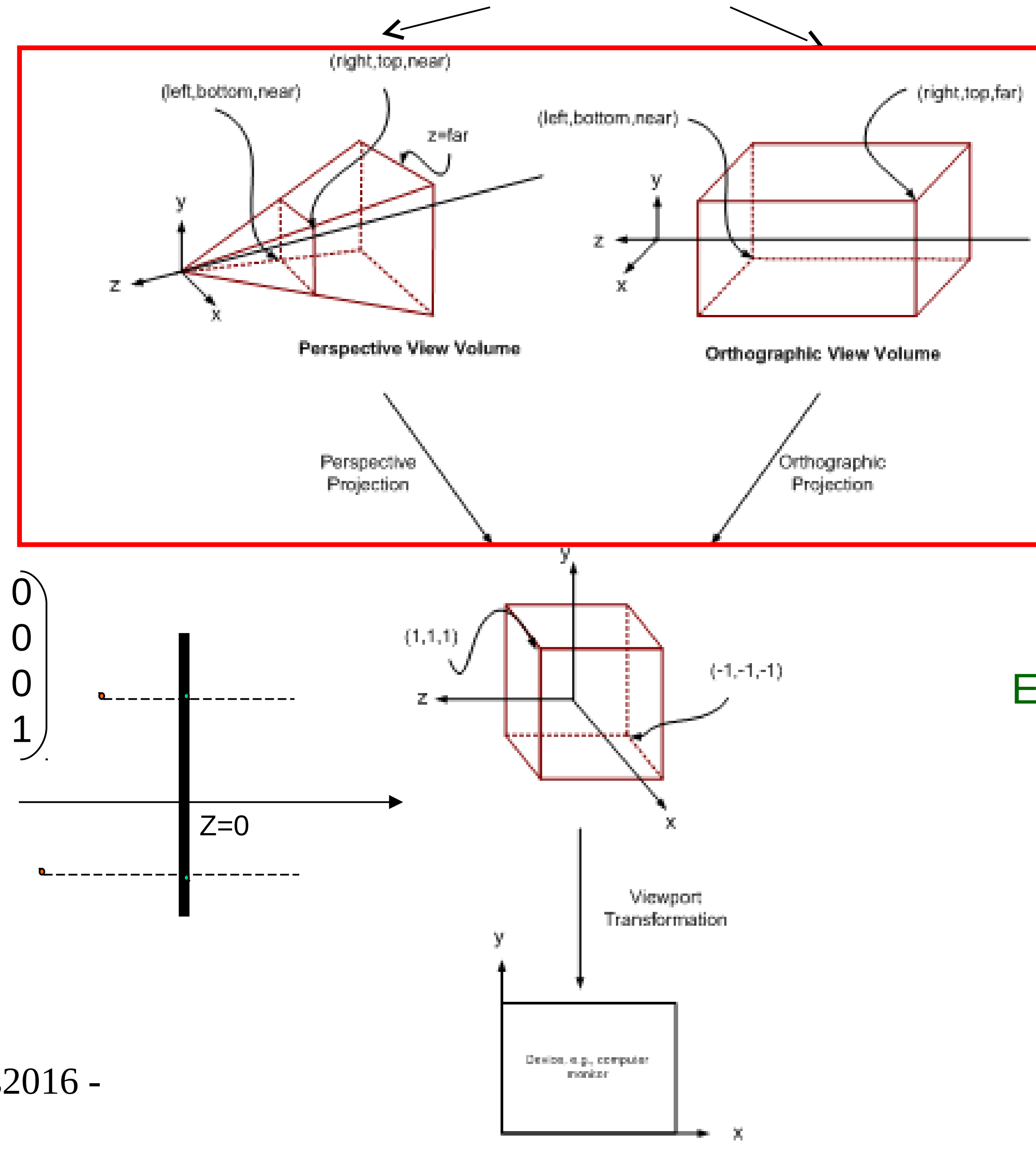


Universo (WC)

Espaço é deformado para ficar "reto"

Câmera → Normalizado

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



Espaço da Câmera "Reto" (VRC)

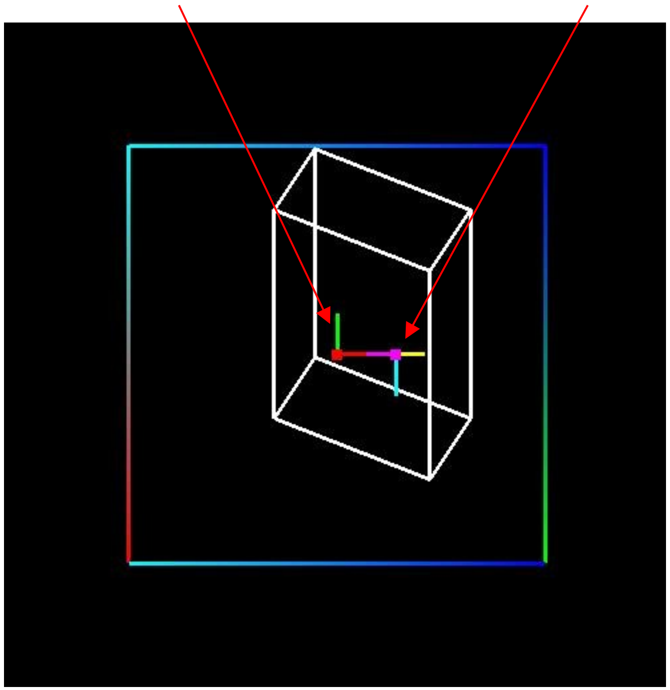
Espaço Normalizado

Espaço da Janela (*Viewport*)

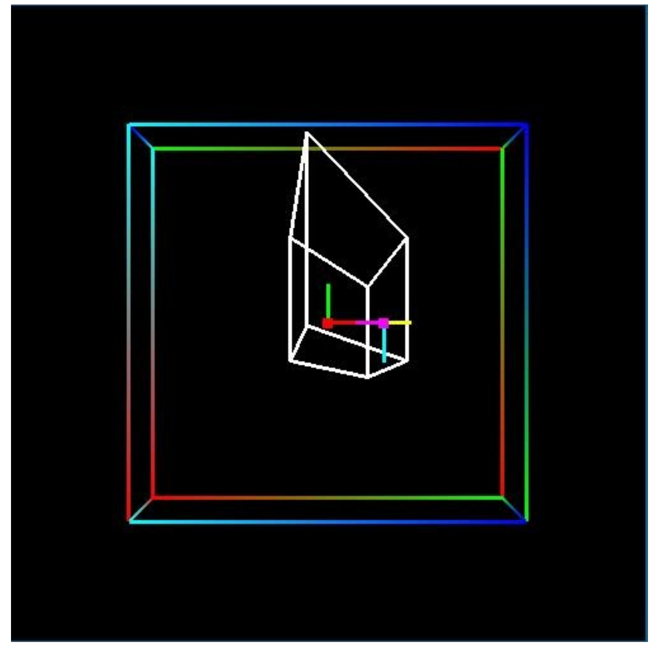
Projeção Passo a Passo

A partir de um cubo, como chegar à sua projeção

Referencial VRC   Referencial WC



Paralela

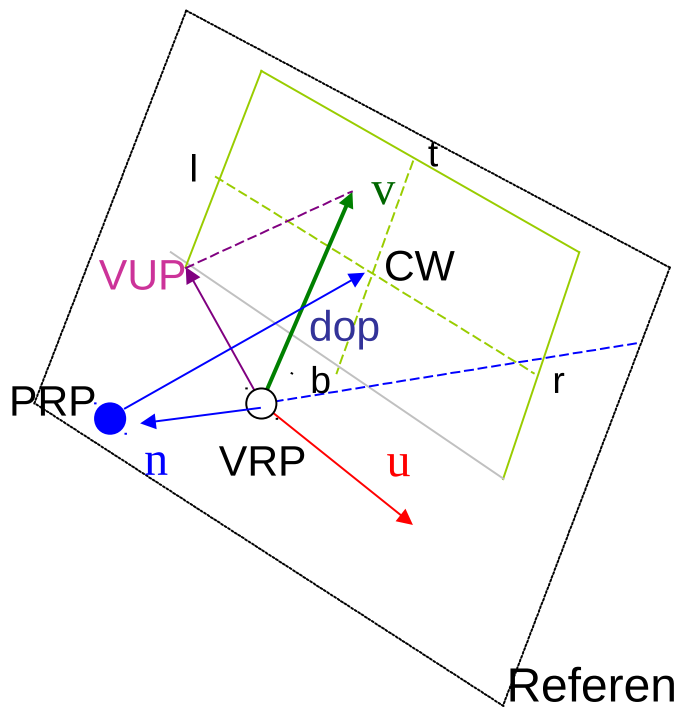


Perspectiva

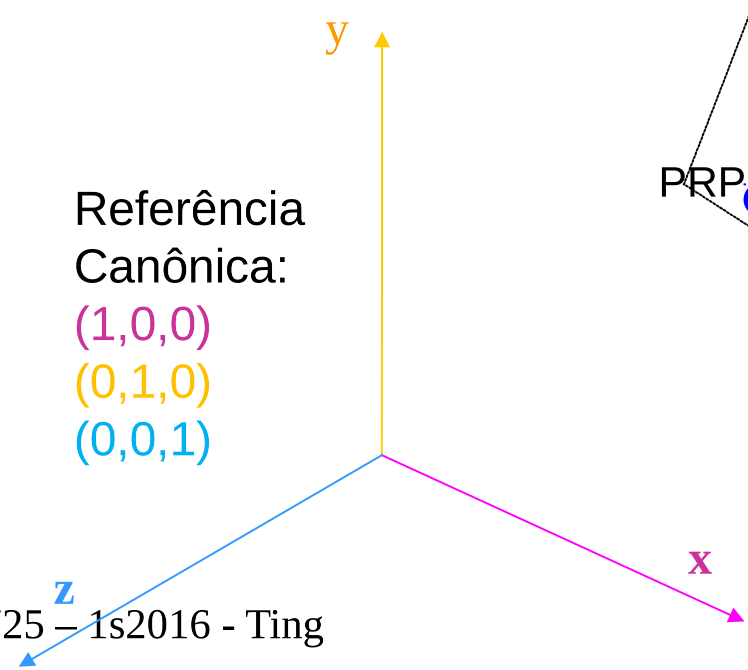
WC → VRC
Especificação de VRC

VUP (up): view up vector
VRP: view reference point
VPN (n): view plane normal
PRP: eye
CW (r,l,t,b): centro da janela
dop: CW-PRP (direção de projeção)
profundidade do volume: (F,B) em relação à câmera

$$P' = B_{WC}\, B_{VRC}^{-1} P$$



Referencial da Câmera:
u =VUP x n/|VUP x n|
n x u
n = VPN/|VPN|

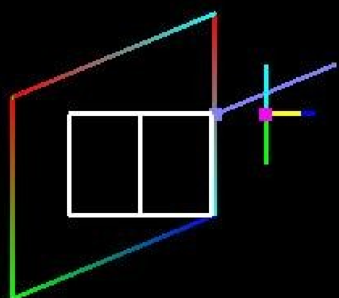


Referência Canônica:
(1,0,0)
(0,1,0)
(0,0,1)

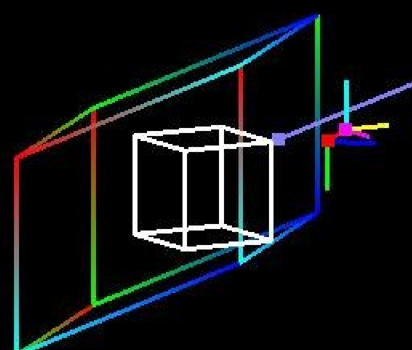
Referencial VRC em WC

Projeção Paralela
(Várias Vistas)

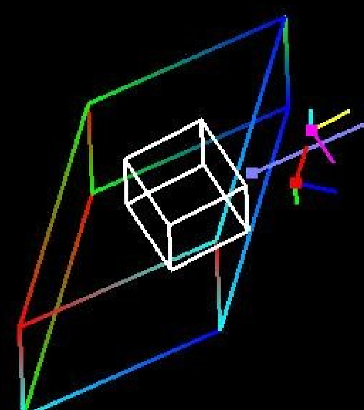
Observe que o referencial WC é a base canônica



Observe que o volume de visão é um paralelepípedo inclinado



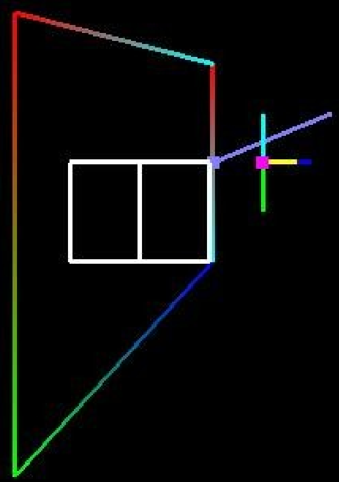
Observe que os referenciais WC e VRC são distintos



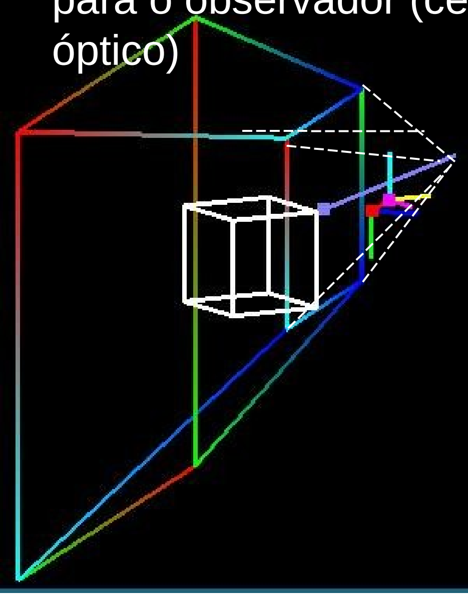
Referencial VRC em WC

Projeção Perspectiva
(Várias Vistas)

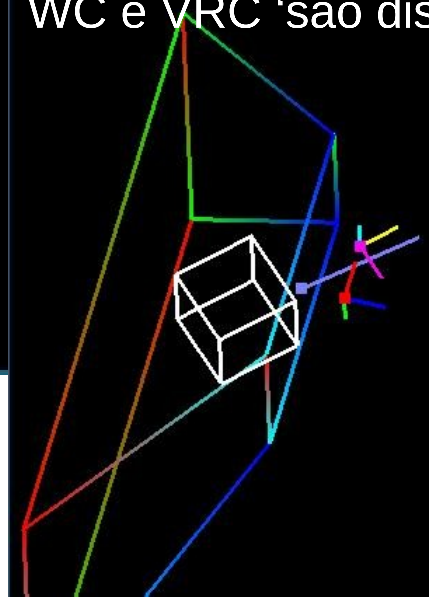
Observe que o referencial WC é a base canônica



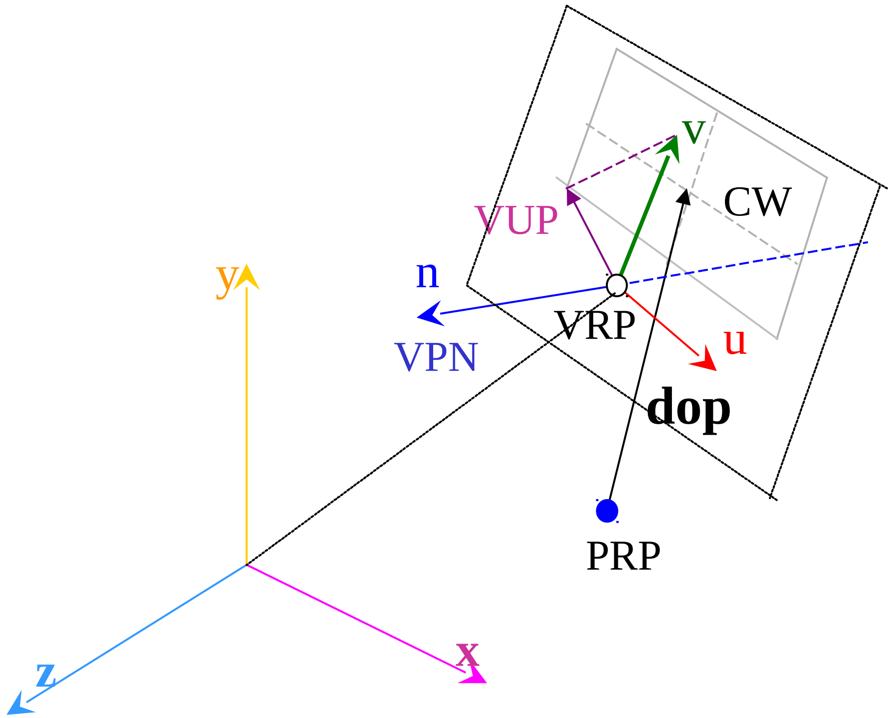
Observe que o volume de visão é agora um trapezóide com as arestas convergindo para o observador (centro óptico)



Observe que os referenciais WC e VRC ‘são distintos



WC → VRC



(1) VRP na origem

$$Tr = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -VRP_x \\ 0 & 1 & 0 & -VRP_y \\ 0 & 0 & 1 & -VRP_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(2) $(\vec{u},\vec{v},\vec{n})$ em vetores base ortonormais

$$\vec{n} = \frac{\overrightarrow{VPN}}{\left|\overrightarrow{VPN}\right|}$$

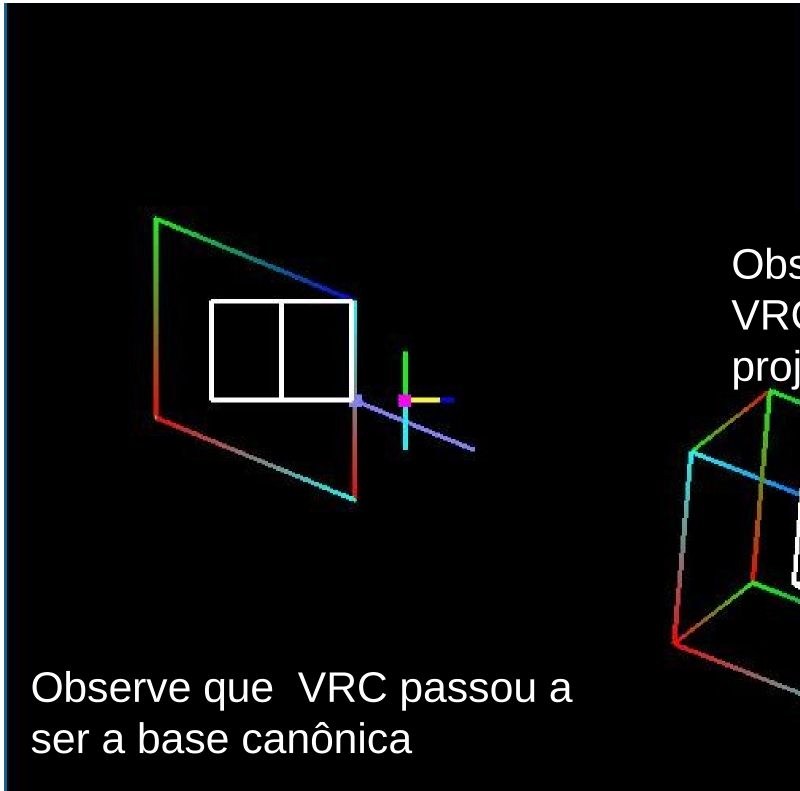
$$\vec{u} = \frac{\overrightarrow{VUP} \times \vec{n}}{\left|\overrightarrow{VUP} \times \vec{n}\right|}$$

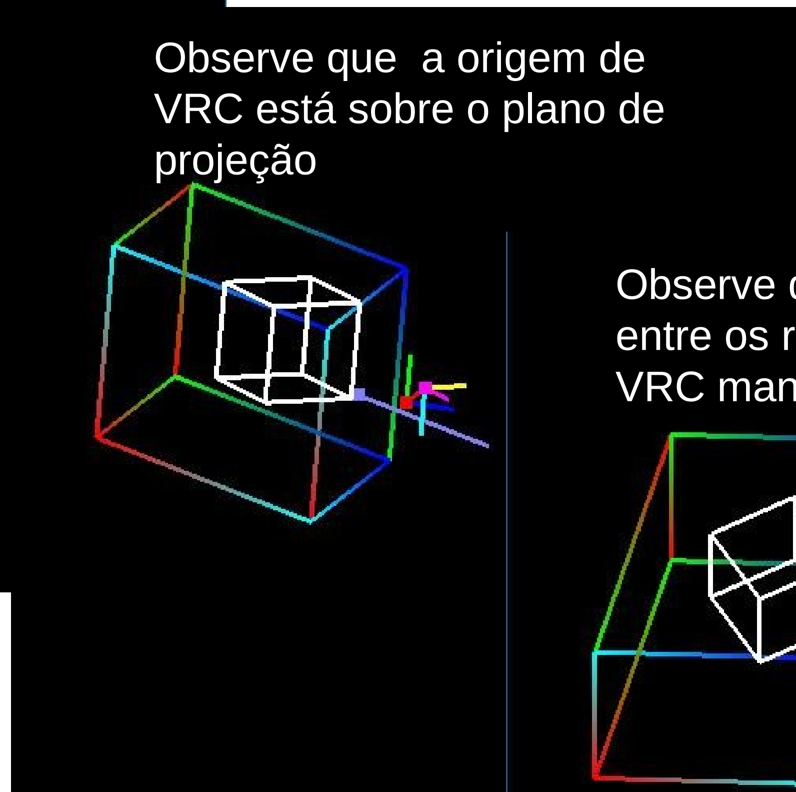
$$\vec{v} = \vec{n} \times \vec{u}$$

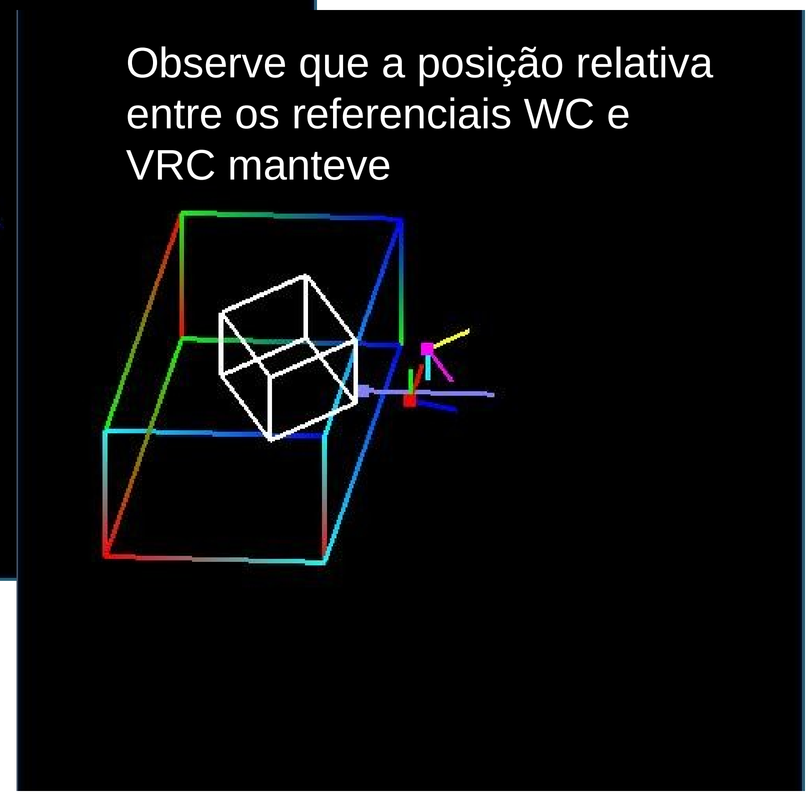
$$R = \begin{bmatrix} u_x & u_y & u_z & 0 \\ v_x & v_y & v_z & 0 \\ n_x & n_y & n_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

VRC

Projeção Paralela
(Várias Vistas)

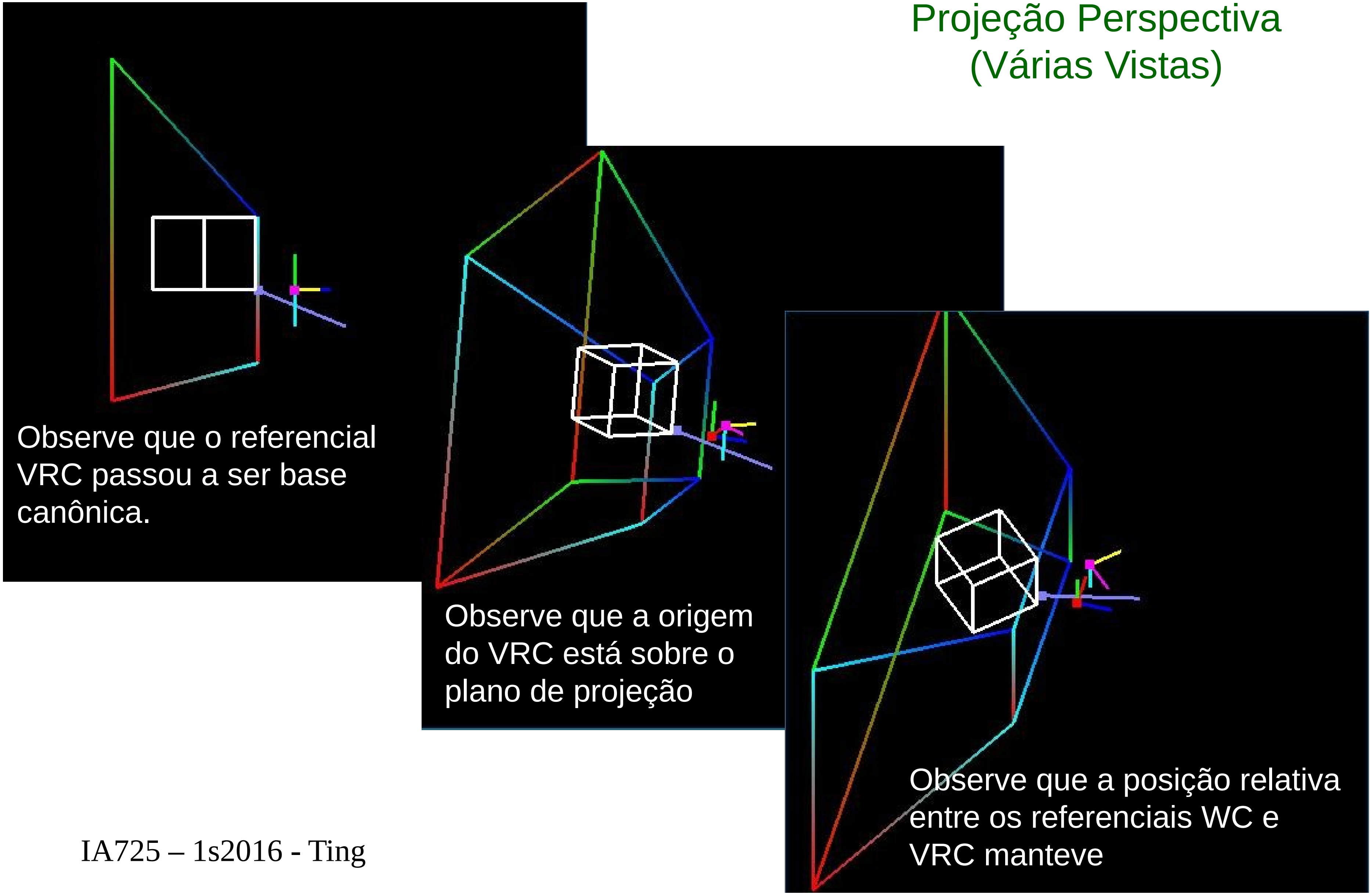






VRC

Projeção Perspectiva
(Várias Vistas)



Observe que o referencial VRC passou a ser base canônica.

Observe que a origem do VRC está sobre o plano de projeção

Observe que a posição relativa entre os referenciais WC e VRC manteve

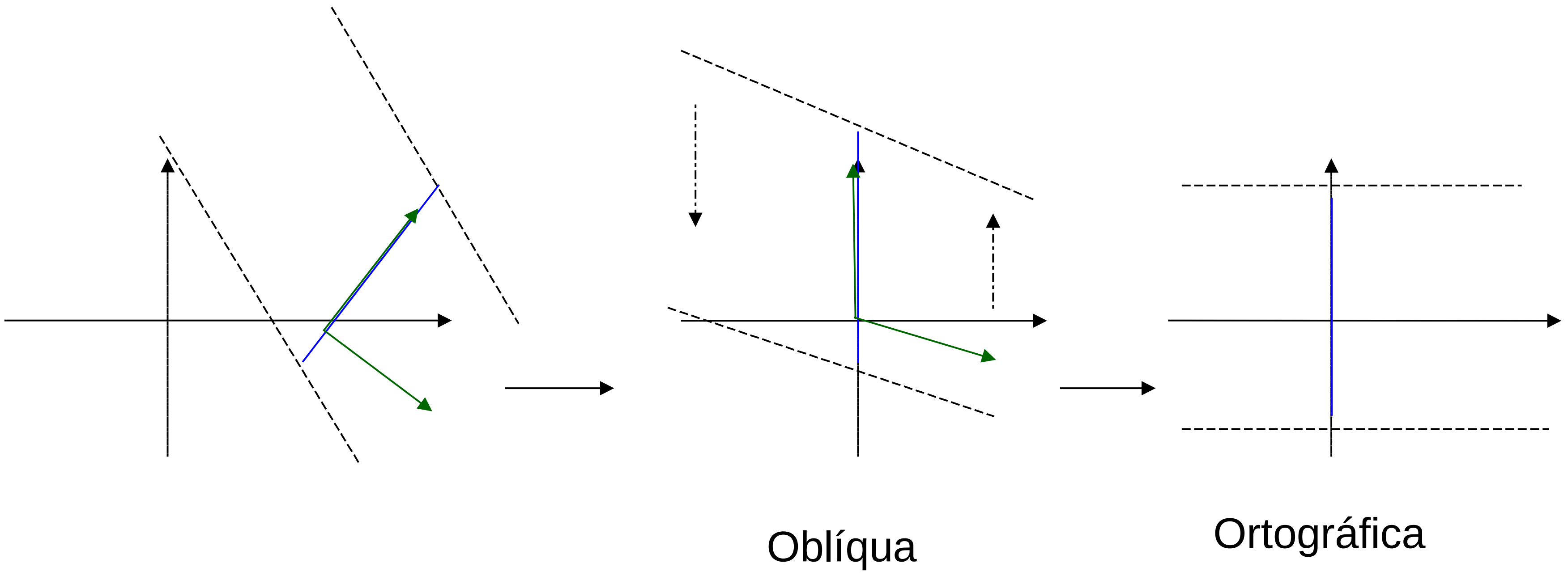
PRP na origem de VRC

Na projeção paralela o observador está no infinito (raios projetores paralelos), mas na projeção perspectiva, o observador/centro óptico (PRP) está localizado em um ponto finito do espaço. Este ponto deve coincidir com a origem para reduzirmos o nosso problema ao do caso trivial.

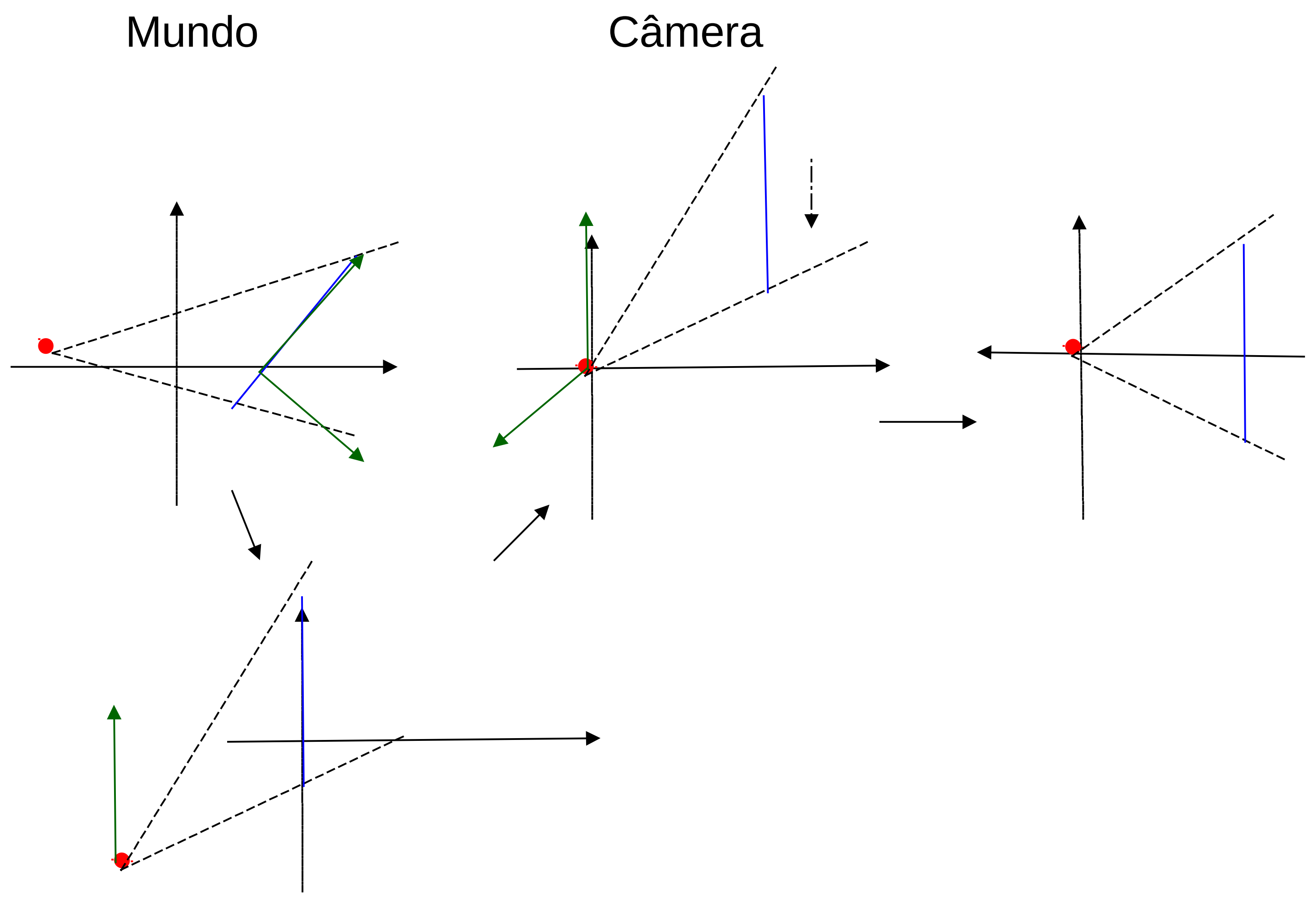
$$PRP' = R \ \ Tr\ PRP$$

$$Tr_{PRP'} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -PRP'_x \\ 0 & 1 & 0 & -PRP'_y \\ 0 & 0 & 1 & -PRP'_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Deformação do Volume Paralelo
Cisalhamento

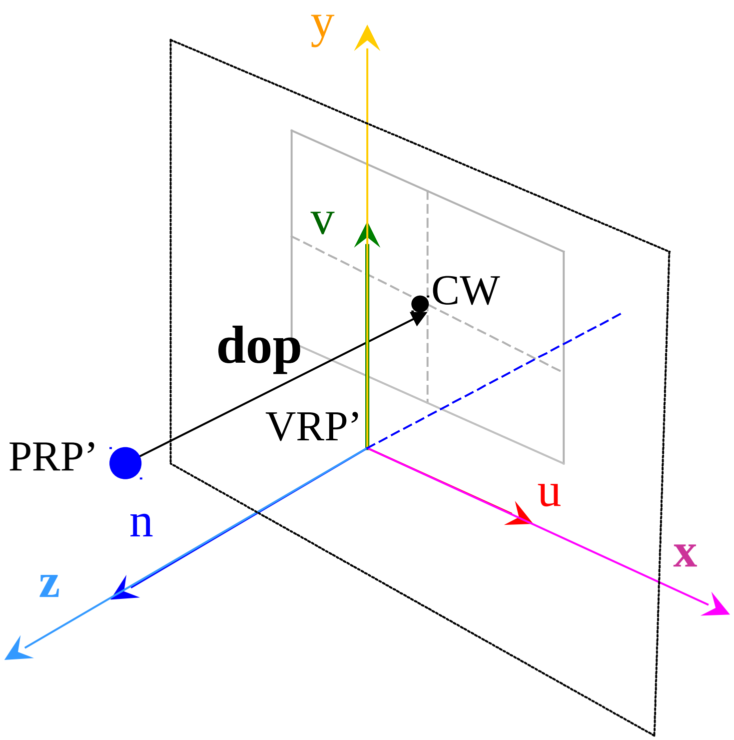


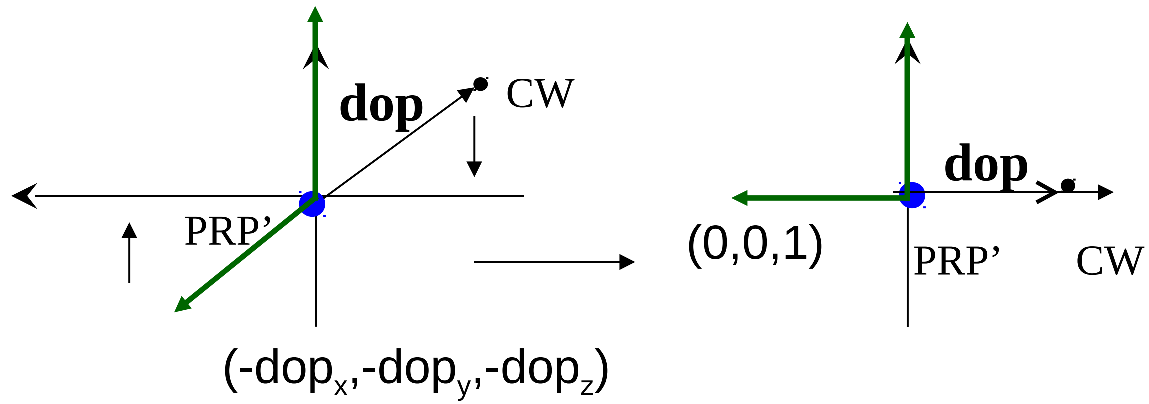
Deformação do Volume Perspectivo



Deformação do Volume

Cisalhamento





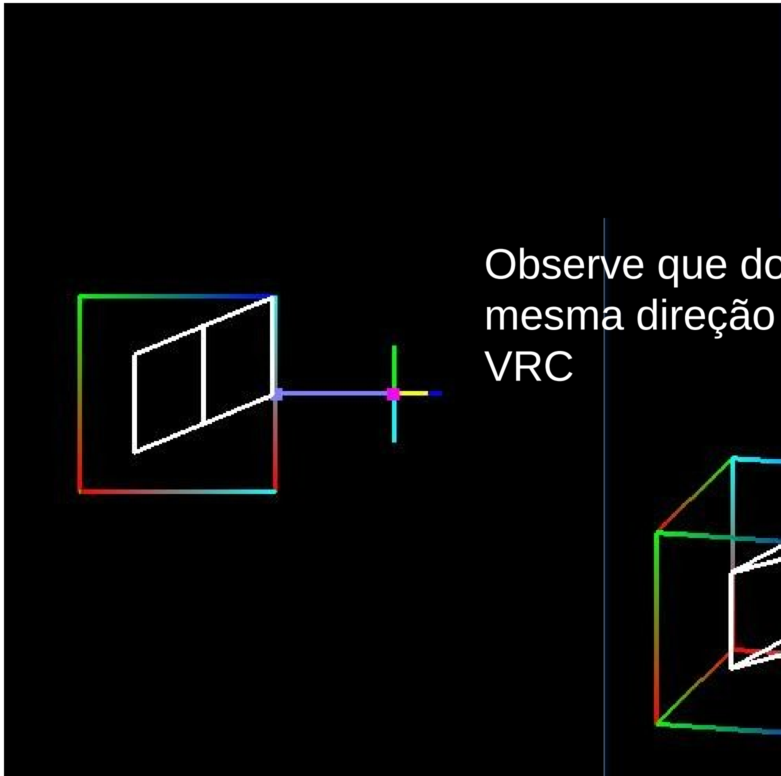
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -dop_x & 0 \\ 0 & 1 & -dop_y & 0 \\ 0 & 0 & -dop_z & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -dop_z & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

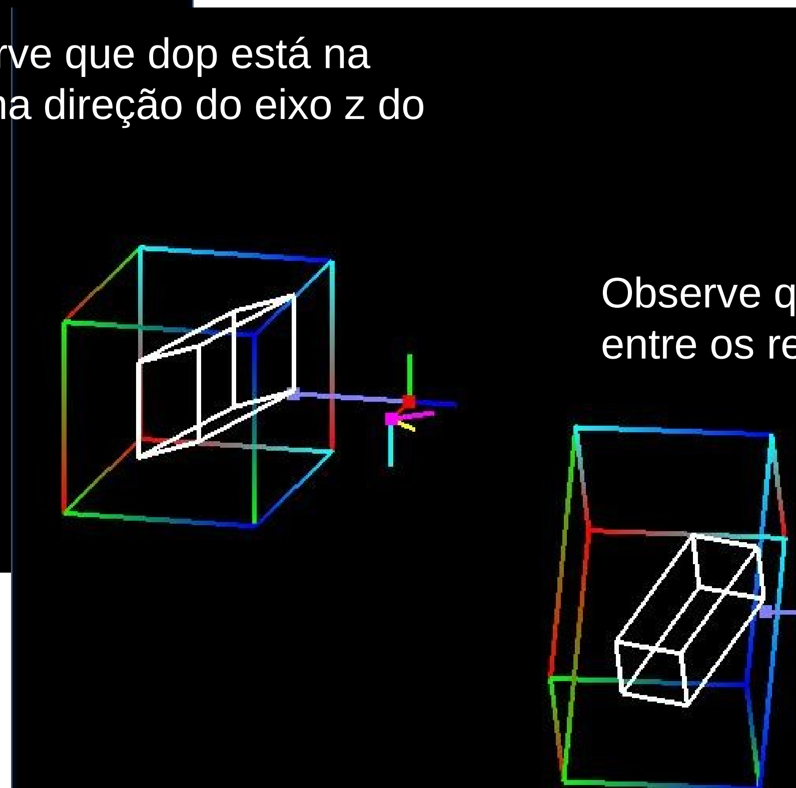
VRP': view reference point in VRC
PRP': projection reference point in VRC
dop: direction of projection
CW: center of window

$$SH = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -(dop_x/dop_z) & 0 \\ 0 & 1 & -(dop_y/dop_z) & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

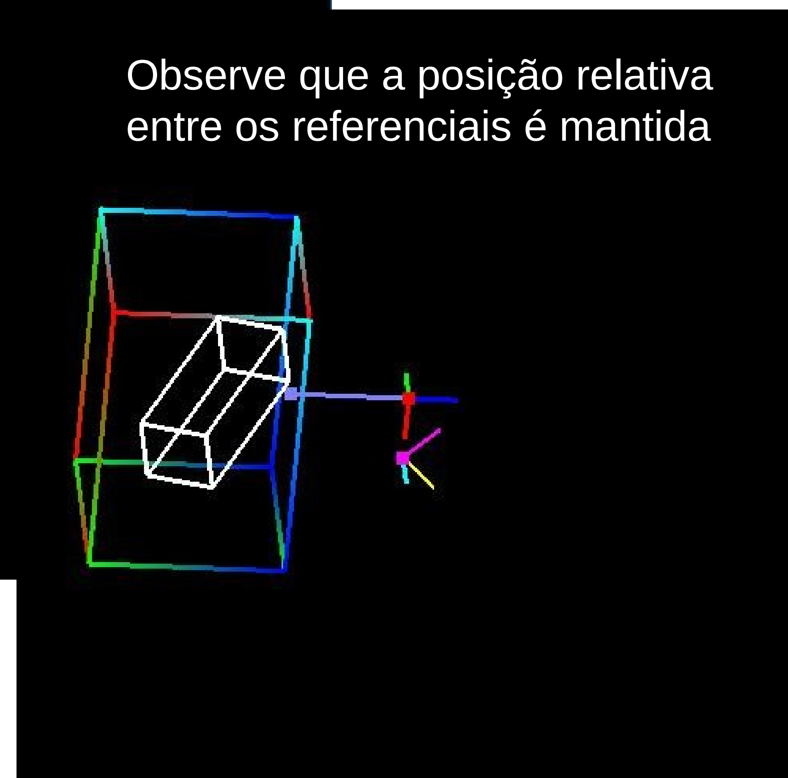
VRC Cisalhado

Projeção Paralela
(Várias Vistas)





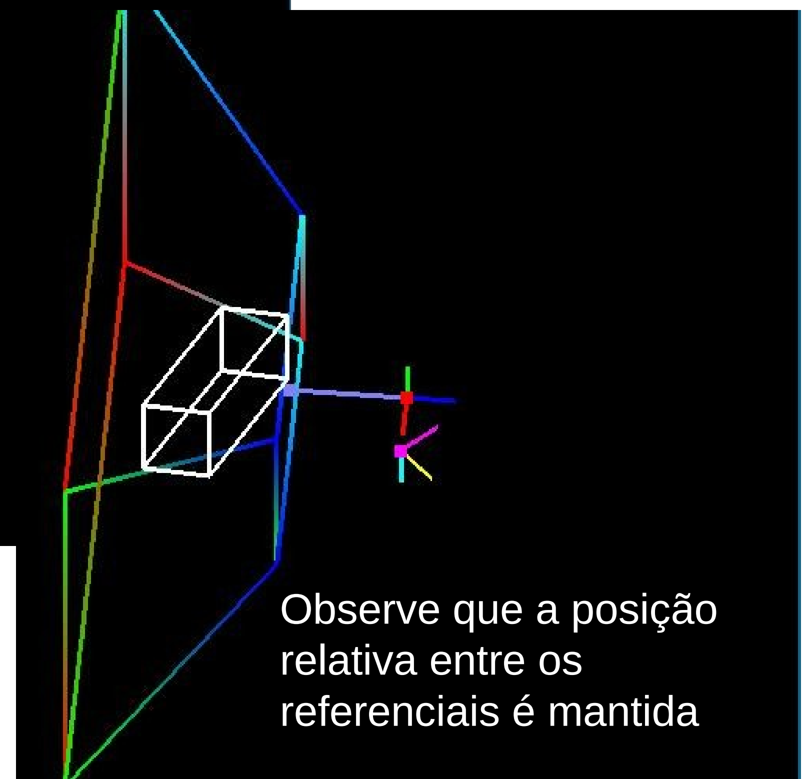
Observe que dop está na mesma direção do eixo z do VRC



Observe que a posição relativa entre os referenciais é mantida

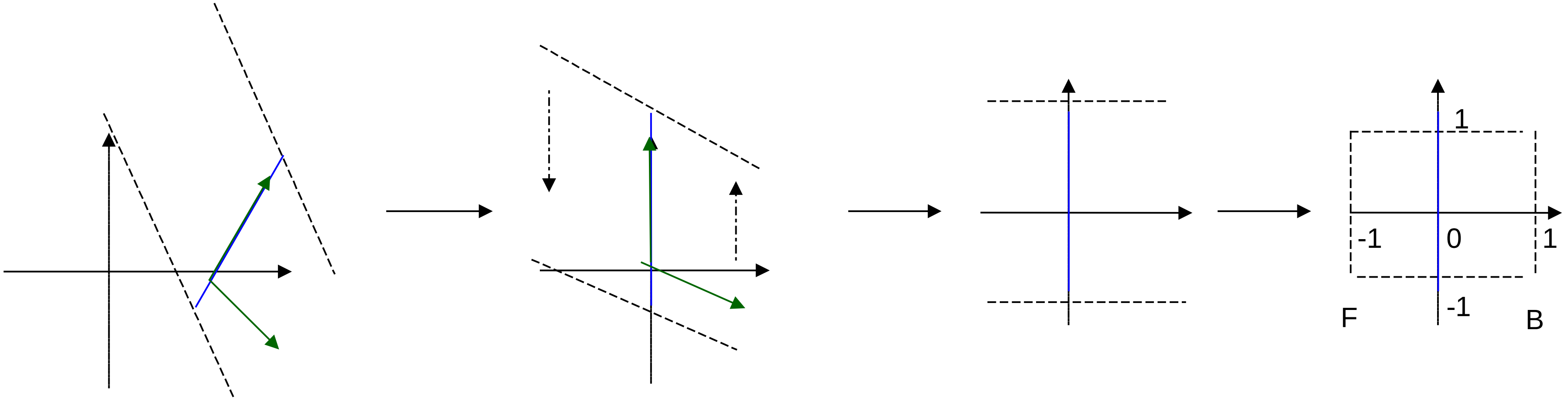
VRC Cisalhado

Projeção Perspectiva
(Várias Vistas)



VRC → NDC

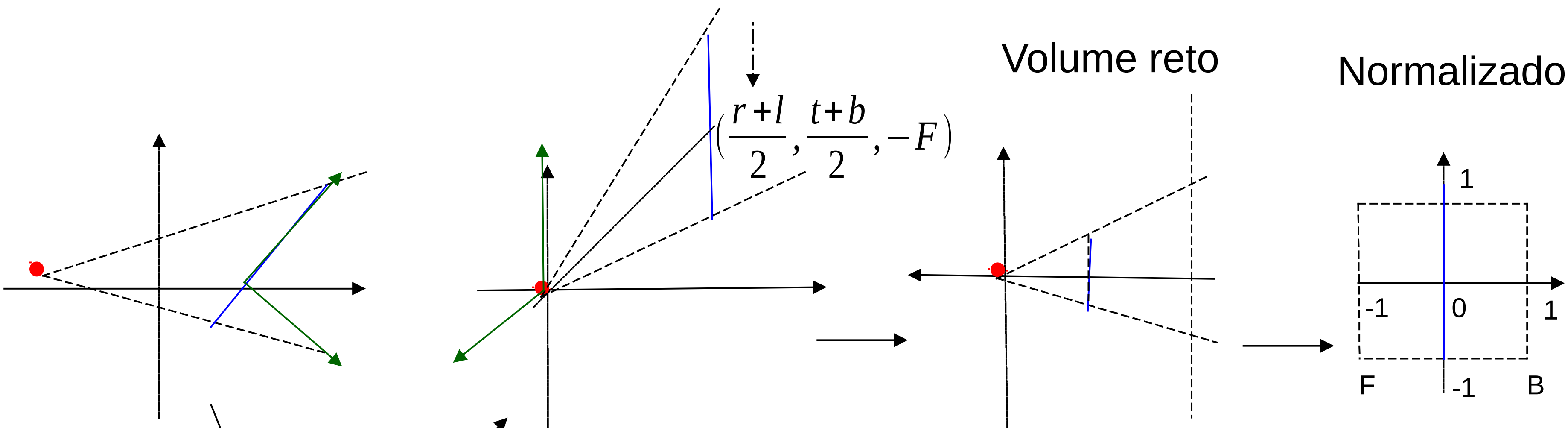
Projeção Paralela

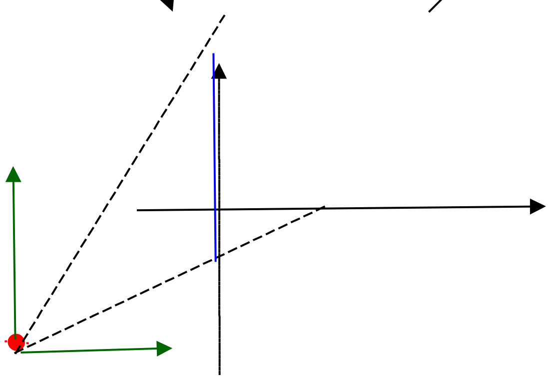


Oblíqua Ortográfica Normalizado

VRC → NDC

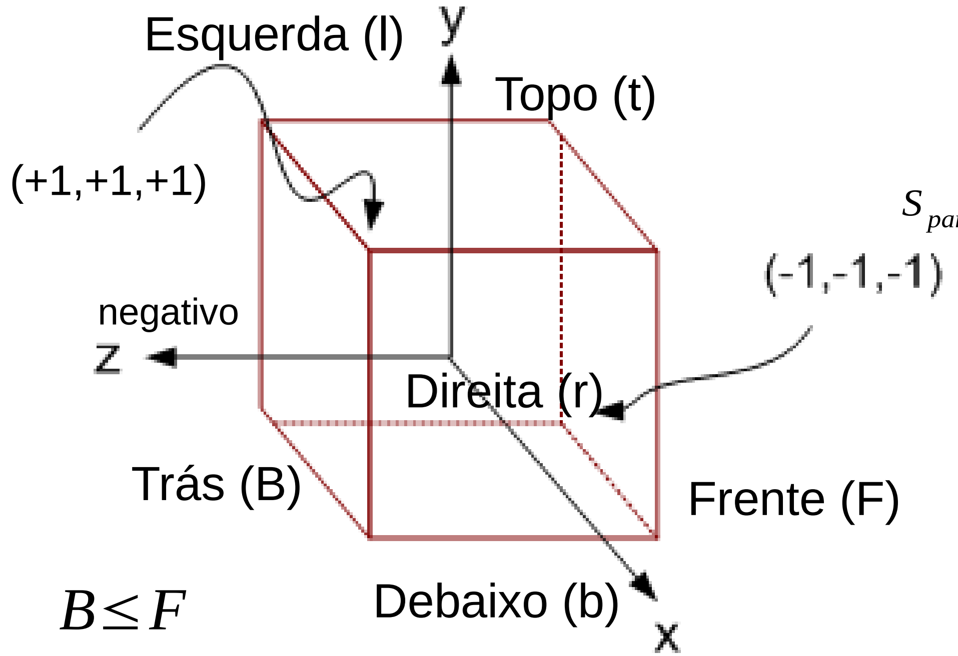
Projeção Perspectiva





$$SH = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{r+l}{2F} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{t+b}{2F} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

VRC → NDC (Paralelo)



$$B \le F$$

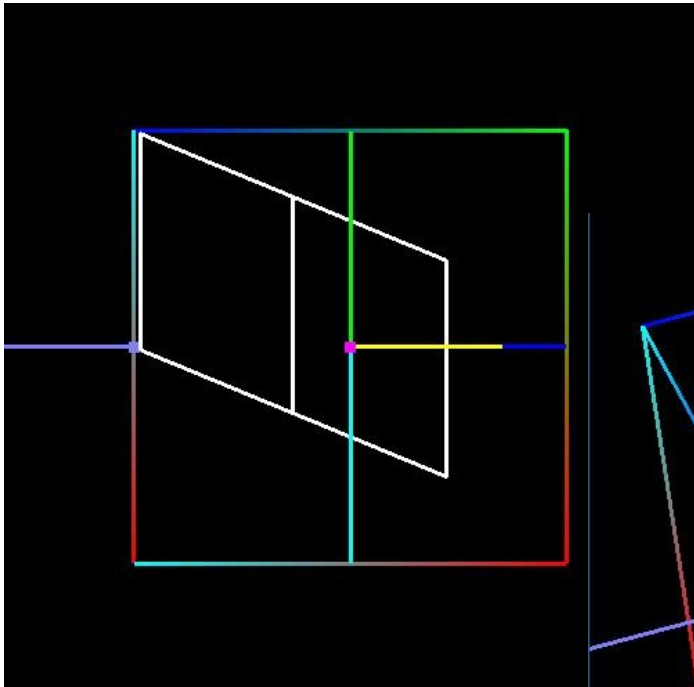
$$S_{par} = \begin{bmatrix} \frac{2}{r-l} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{t-b} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{B-F} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{(r+l)}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{(t+b)}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{(B+F)}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{r-l} & 0 & 0 & -\frac{r+l}{r-l} \\ 0 & \frac{2}{t-b} & 0 & -\frac{t+b}{t-b} \\ 0 & 0 & -\frac{2}{B-F} & -\frac{B+F}{B-F} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

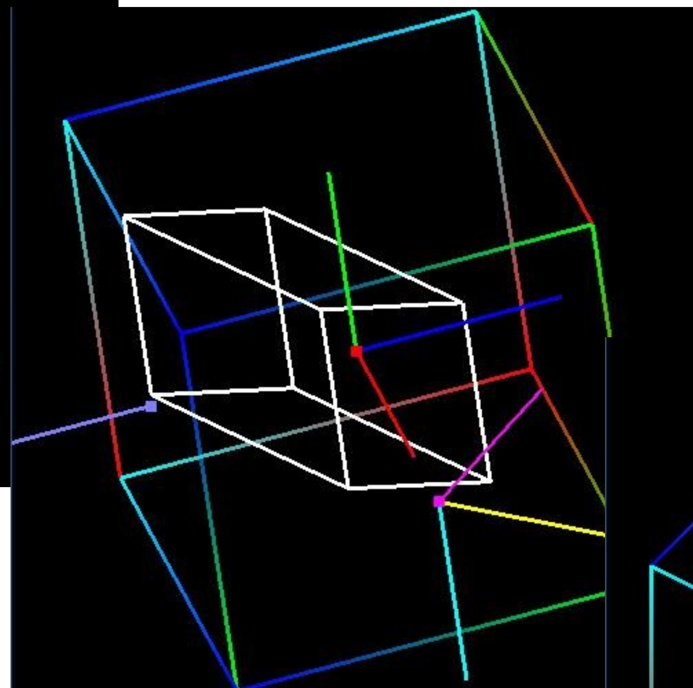
$$\begin{bmatrix} \frac{r+l}{2} & \frac{r+l}{2} & r & r \\ \frac{t+b}{2} & \frac{t+b}{2} & t & -b \\ F & B & F & B \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

NDC

Projeção Paralela
(Várias Vistas)

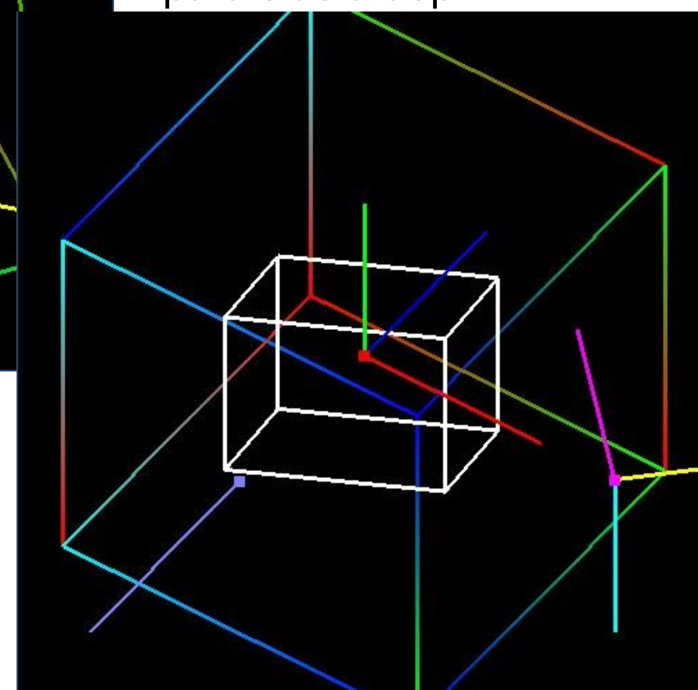


Observe que a relação do volume com o referencial

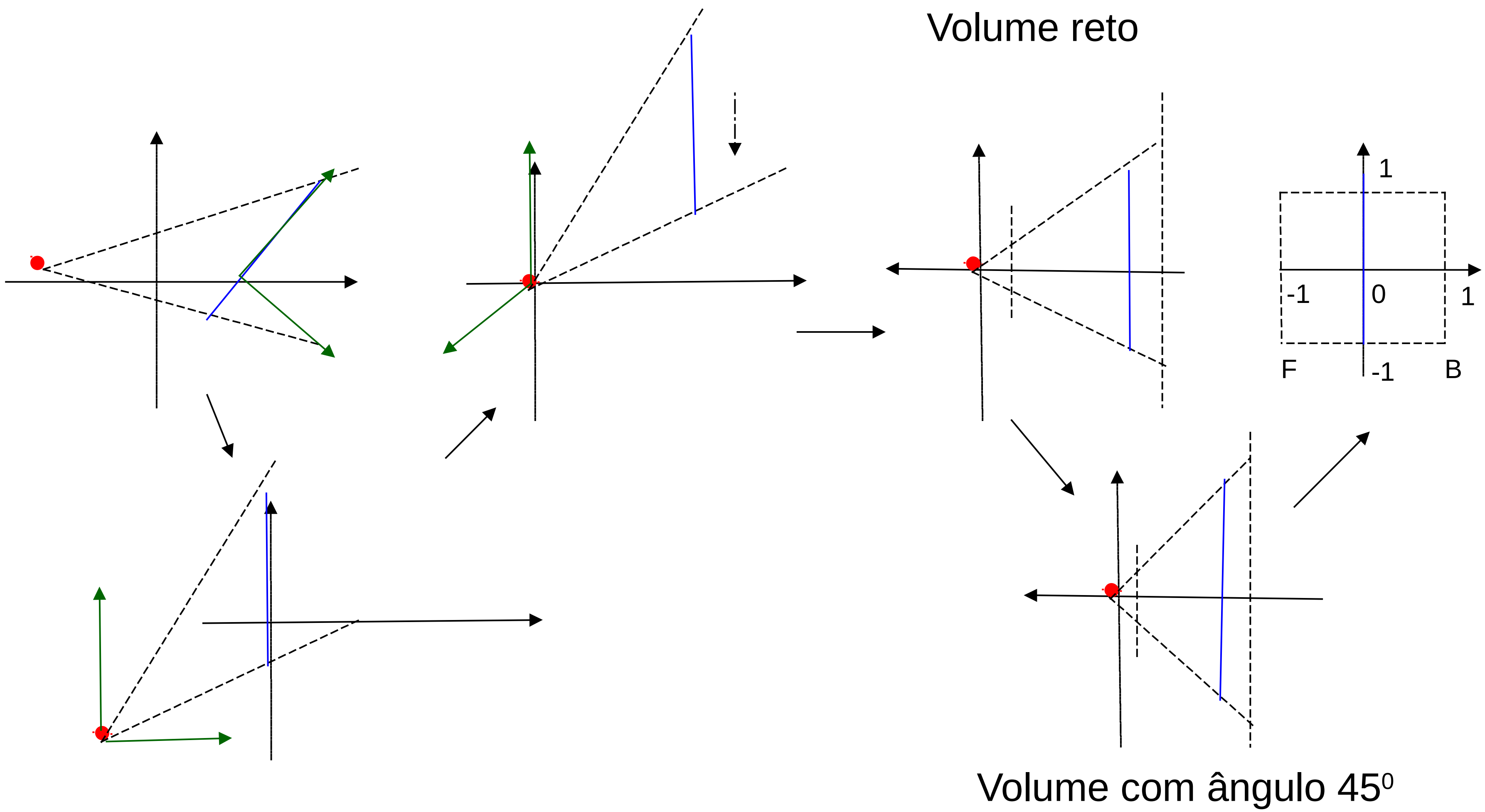


Observe que o volume de visão ficou um cubo centrado na origem do referencial VRC

Observe que o volume de visão tem as arestas paralelas à dop

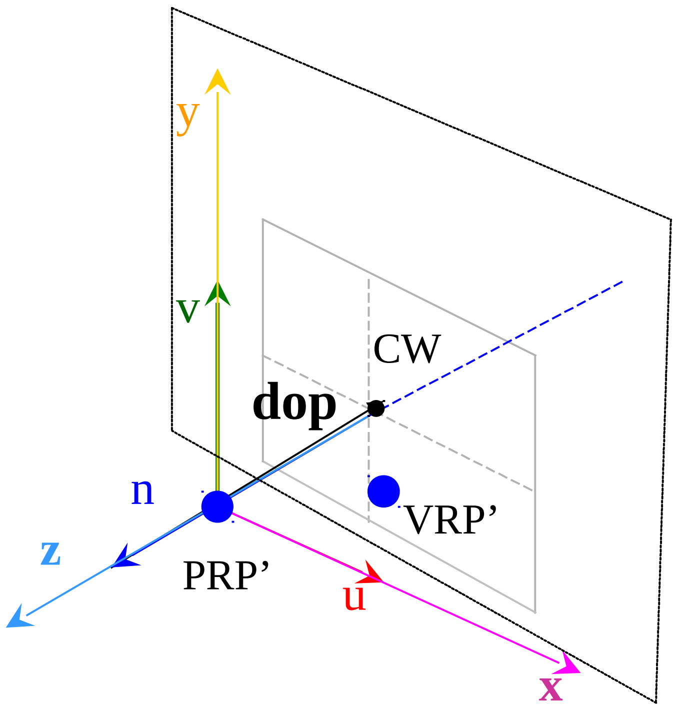


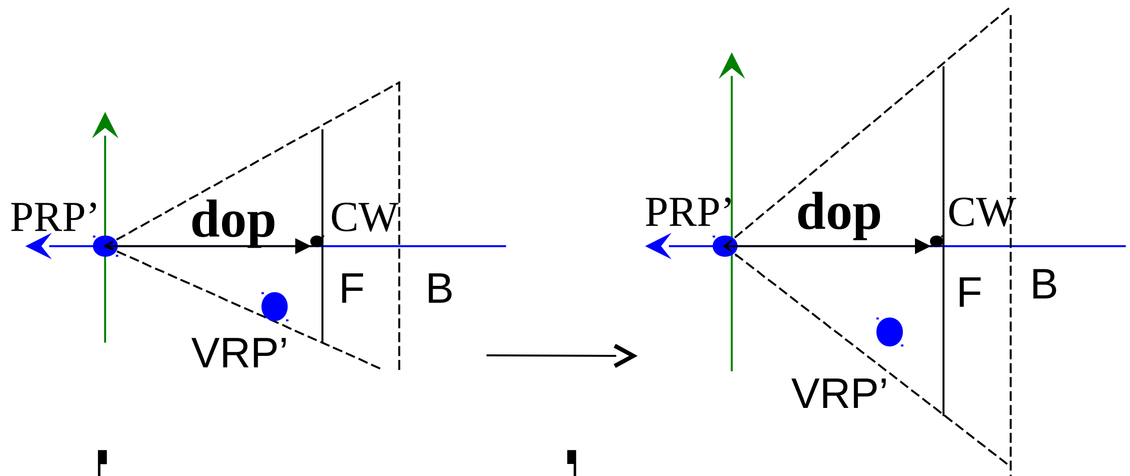
VRC → Volume em 45º → NDC (Perspectivo)



VRC → Volume em 45º

(l,r,b,t,F,B)

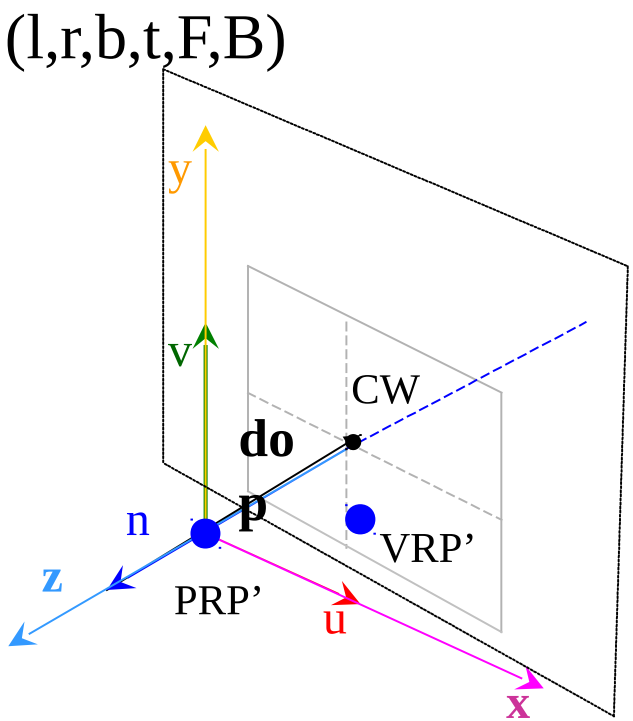


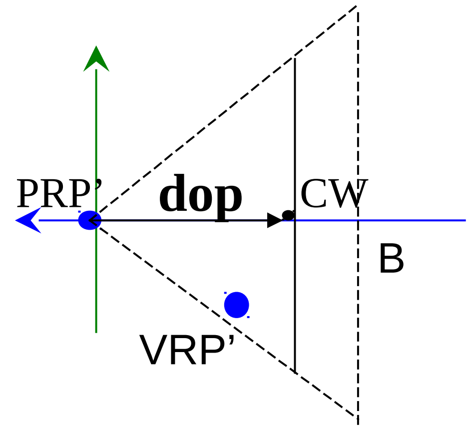


$$\begin{bmatrix} \frac{r-l}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{t-b}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -F & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} F & 0 & 0 & 0 \\ 0 & F & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -F & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

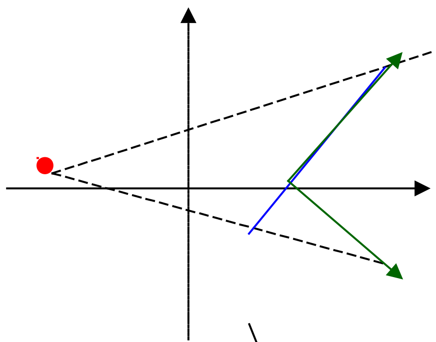
VRC → Volume em 45º

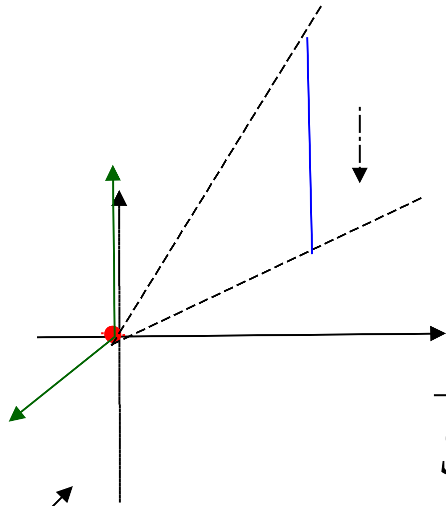




$$S_{per} = \begin{bmatrix} \frac{2F}{r-l} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2F}{t-b} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

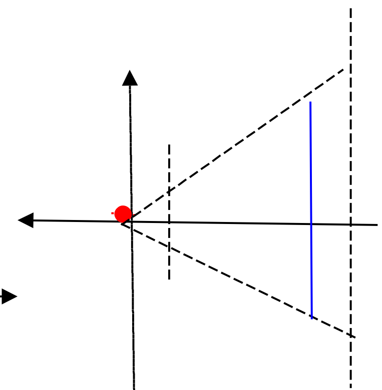
VRC → Volume em 45º → NDC (Perspectivo)

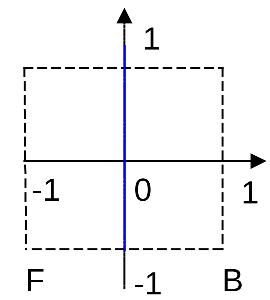




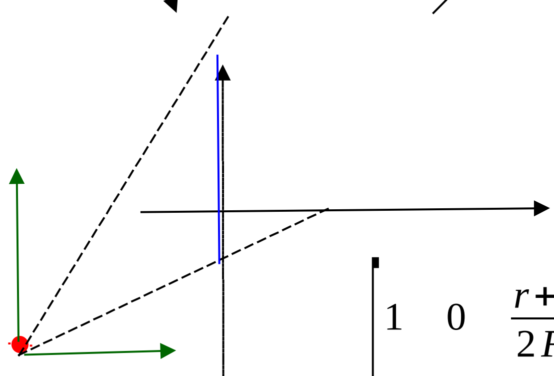
S_{sh}

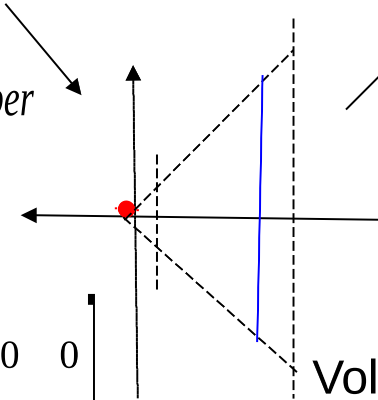
Volume reto





S_{per}





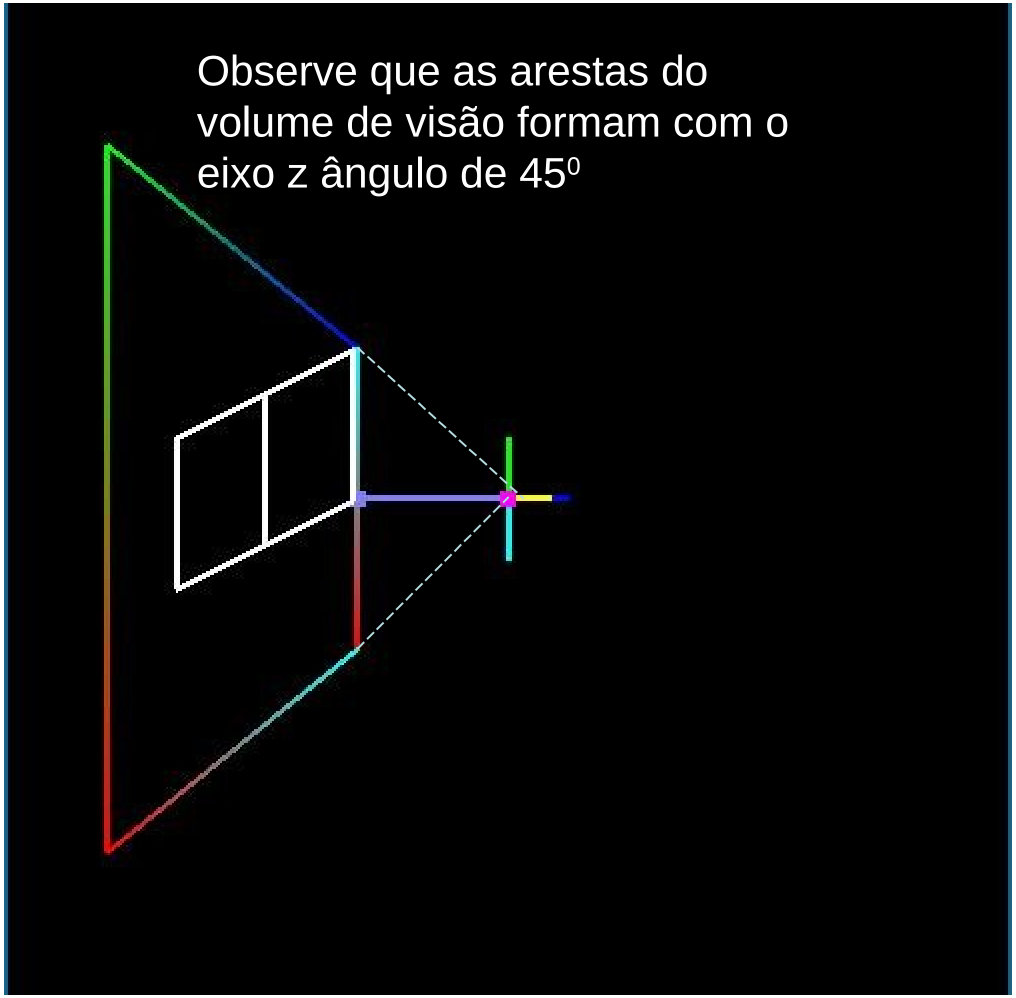
Volume com ângulo 45^0

$$SH = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{r+l}{2F} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{t+b}{2F} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

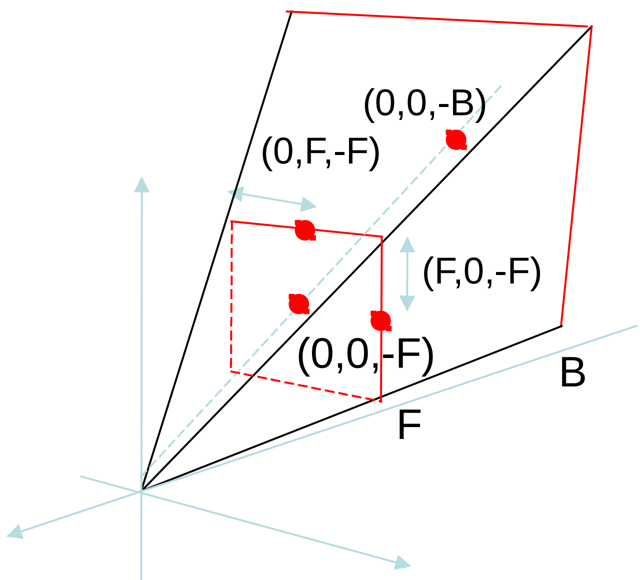
$$S_{per} = \begin{bmatrix} \frac{2F}{r-l} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2F}{t-b} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Volume em 45º

Projeção Perspectiva

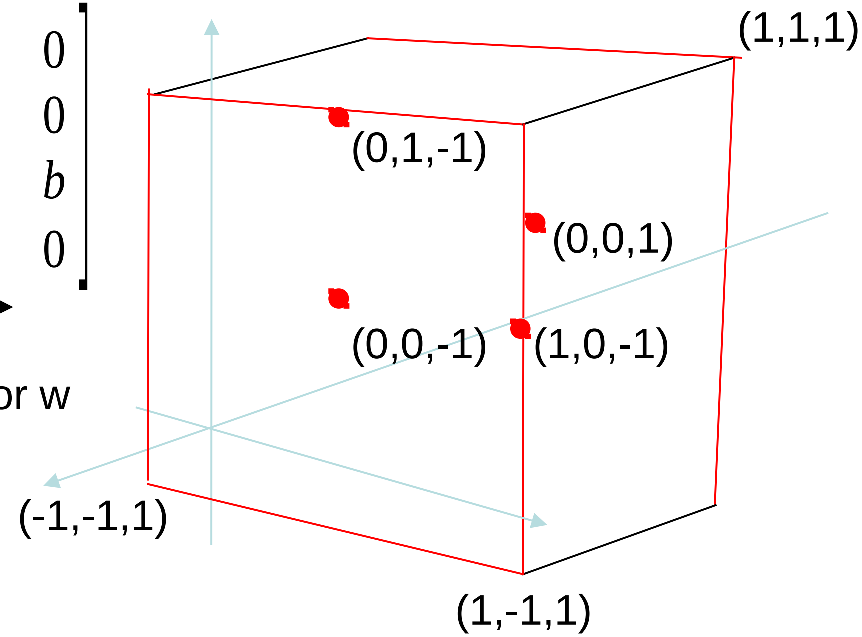


Volume em 45º → NDC



$$M=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&a&b\\0&0&c&0\end{bmatrix}$$

$\longrightarrow$ + divisão por w



$$\begin{bmatrix}0&F&0&0\\0&0&F&0\\-F&-F&-F&-B\\1&1&1&1\end{bmatrix}$$

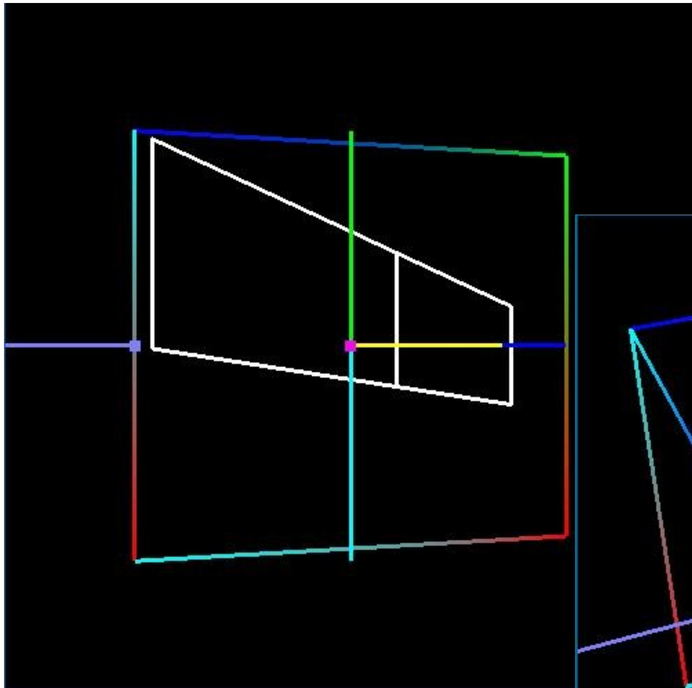
$$\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&\frac{-(B+F)}{B-F}&\frac{-2BF}{B-F}\\0&0&-1&0\end{bmatrix}$$

$\longrightarrow$ + divisão por w

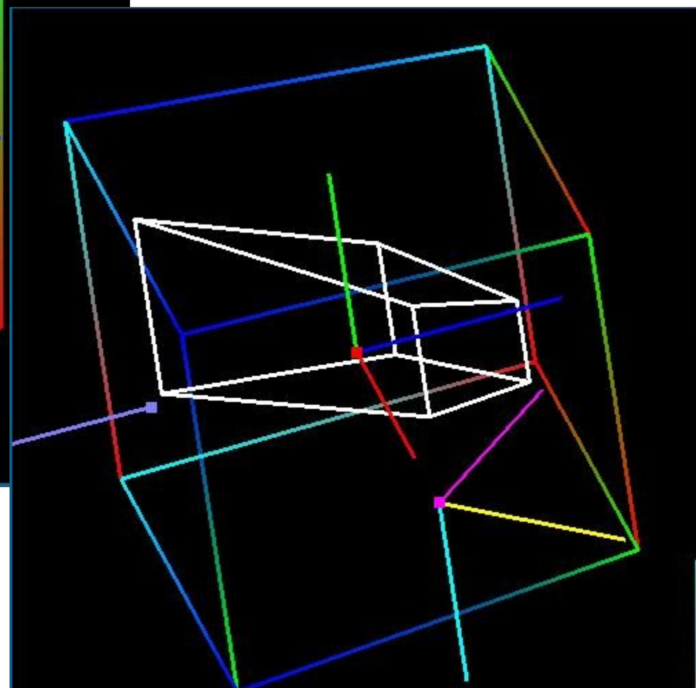
$$\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\-1&-1&-1&1\\1&1&1&1\end{bmatrix}$$

Normalizado

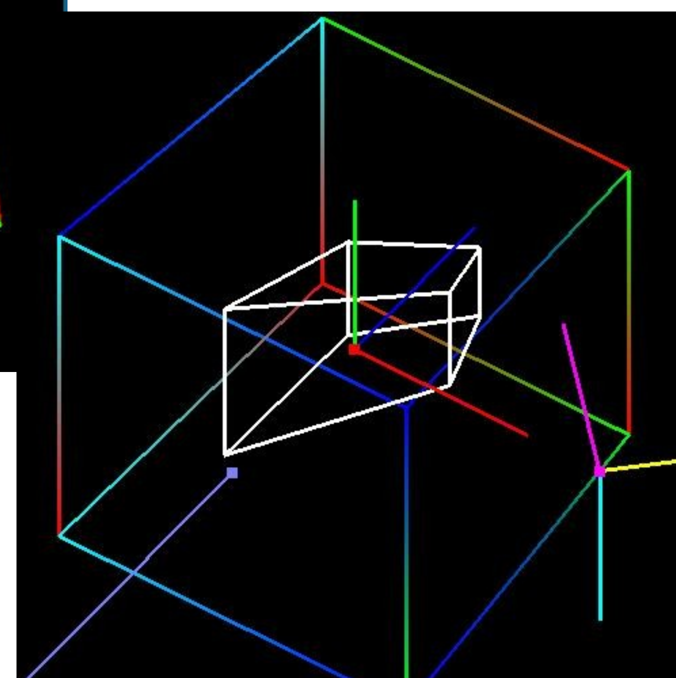
Projeção Perspectivas
(Várias Vistas)



Observe que a relação do volume com o referencial



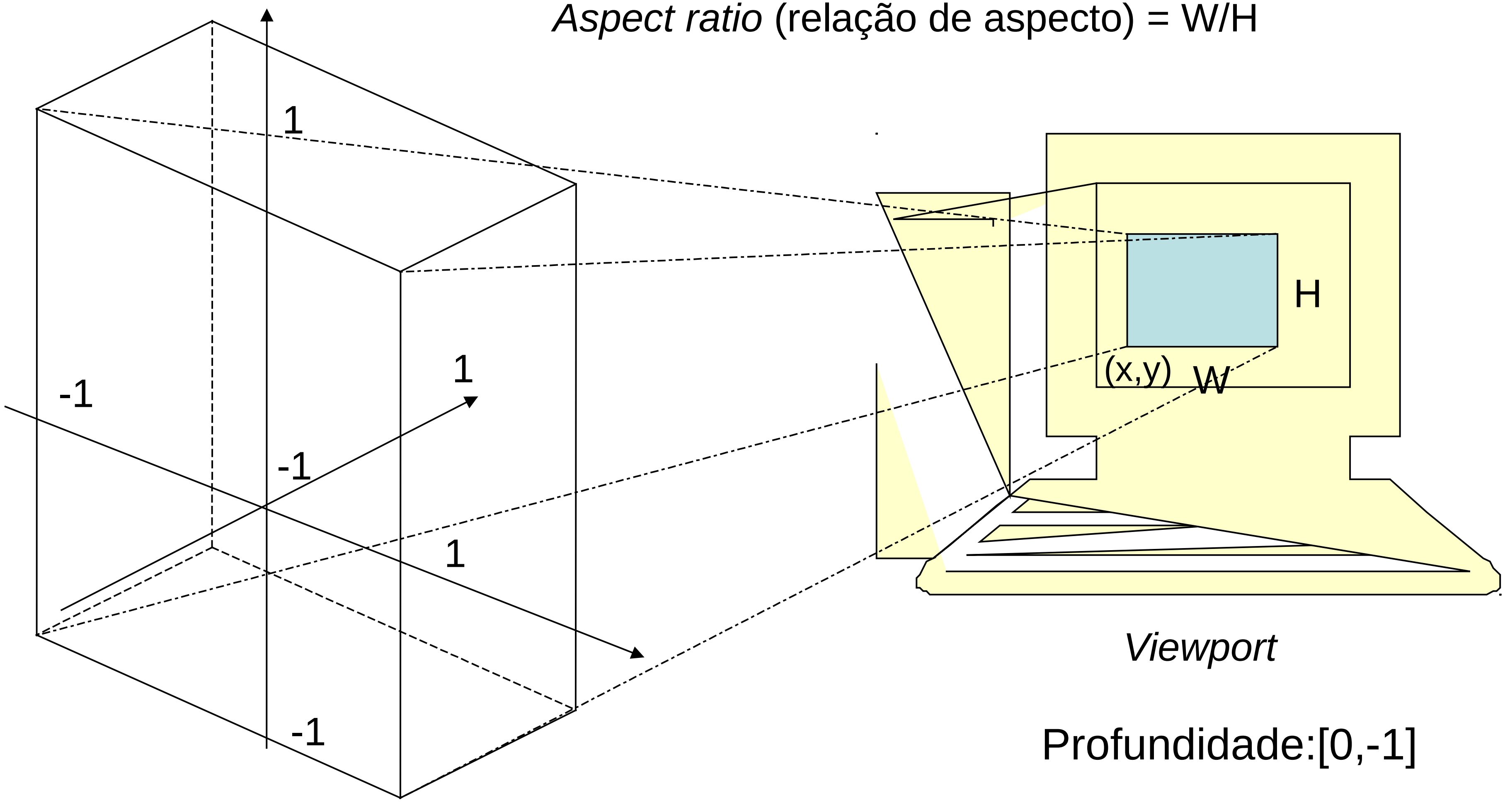
Observe que o volume de visão ficou um cubo centrado na origem do referencial VRC e o cubo dentro do volume ficou distorcido



Observe que PRP foi para “infinito”

NDC → DC

Aspect ratio (relação de aspecto) = W/H

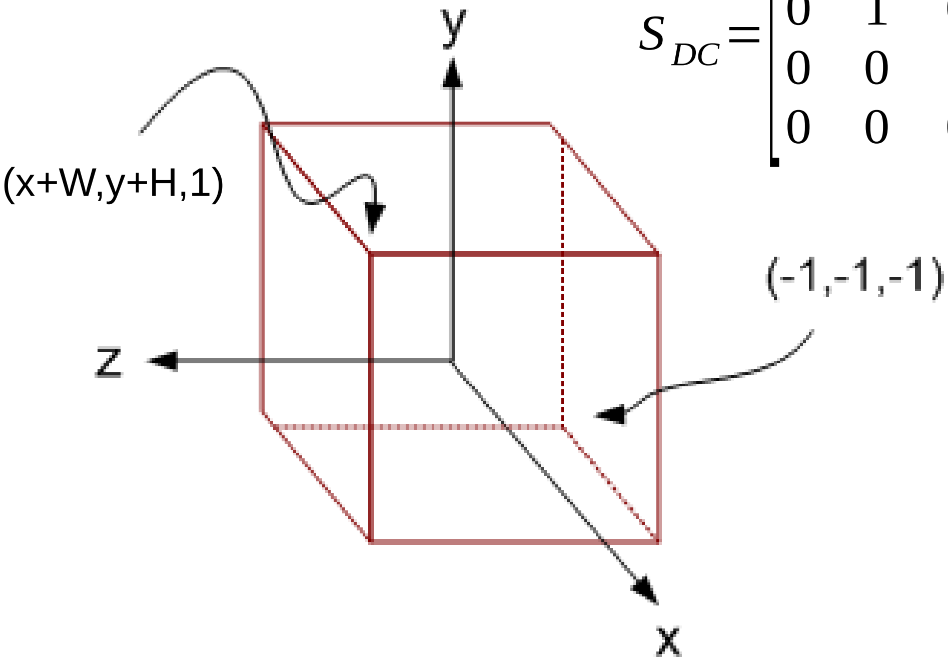


Viewport

Profundidade:[0,-1]

DC

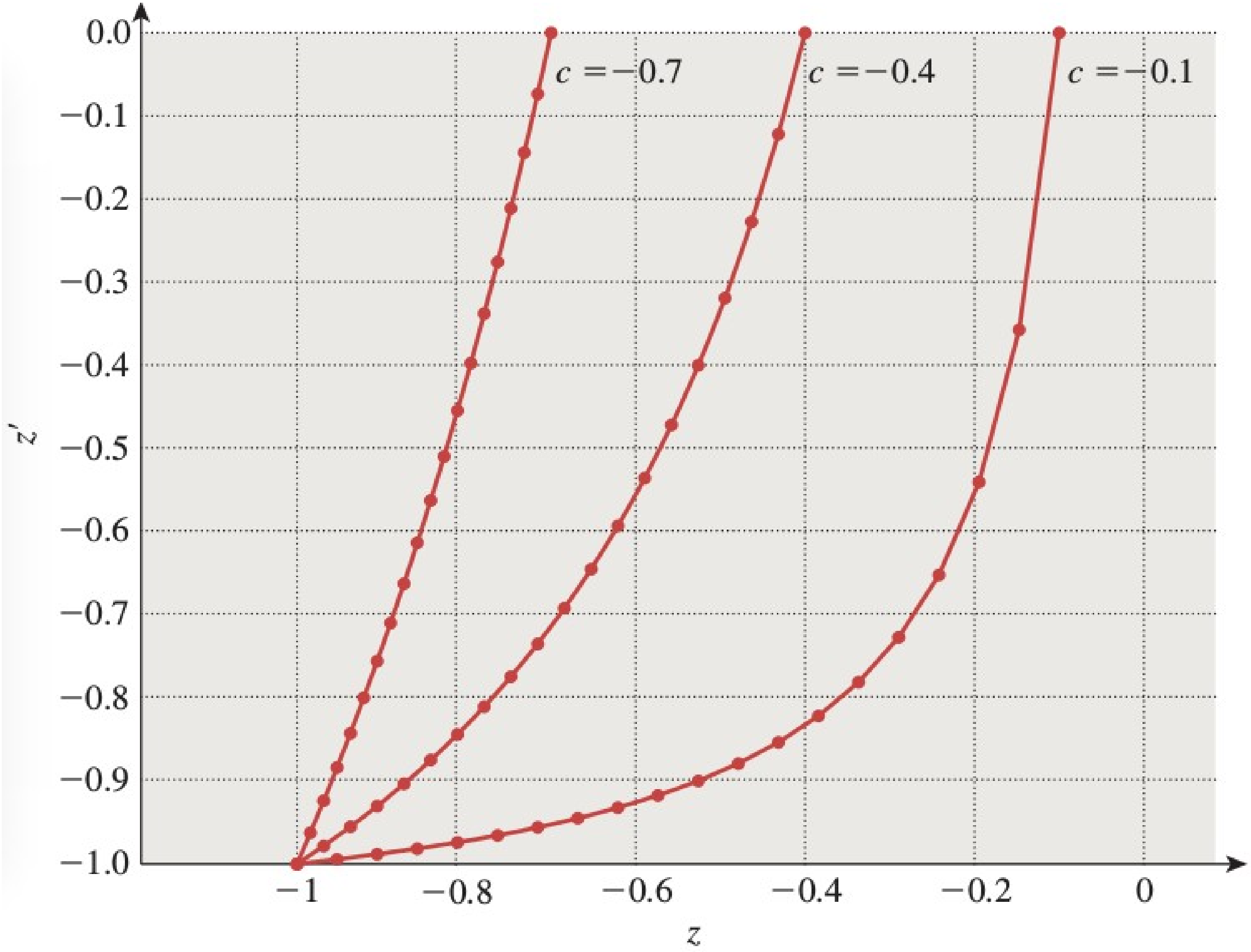
$$S_{DC} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{W}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{H}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$



$$\begin{bmatrix} \frac{W}{2} & 0 & 0 & x+\frac{W}{2} \\ 0 & \frac{H}{2} & 0 & y+\frac{H}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x & x+W & x+\frac{W}{2} & x \\ y & y+H & y & y \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

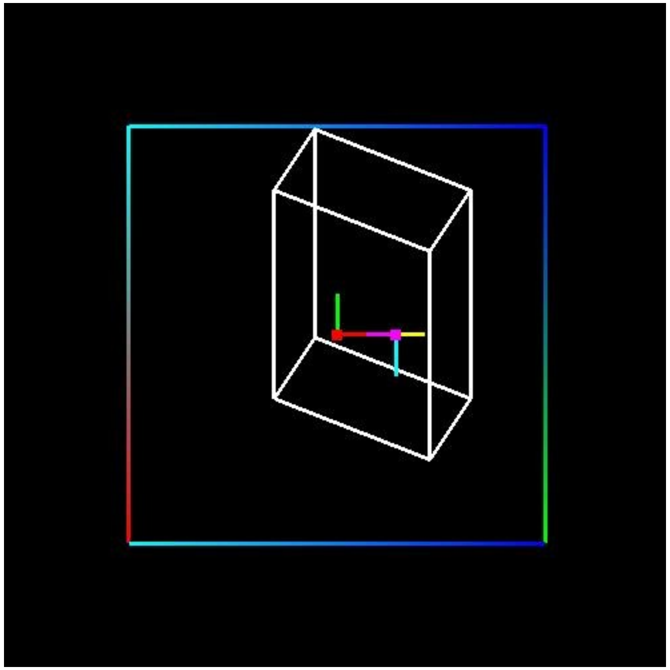
Projeção Perspectiva e valores z



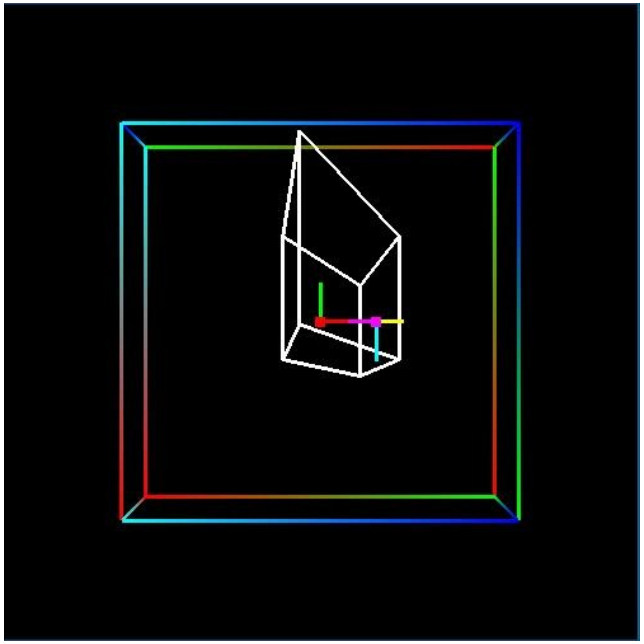
$$c = \frac{-F}{B}$$

Problema?

Projeções Paralelas em DC



Paralela



Perspectiva

Matriz de Transformação

- Projeção Paralela $P_{par} = S_{DC} . S_{par} . SH . R . Tr$
- Projeção Perspectiva $P_{per} = S_{DC} . M . S_{per} . SH . R . Tr$

Transformações lineares

Translação

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & t_x \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & t_y \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & t_z \\ \hline p_x & p_y & p_z & s \end{array}\right]$$

Perspectivo

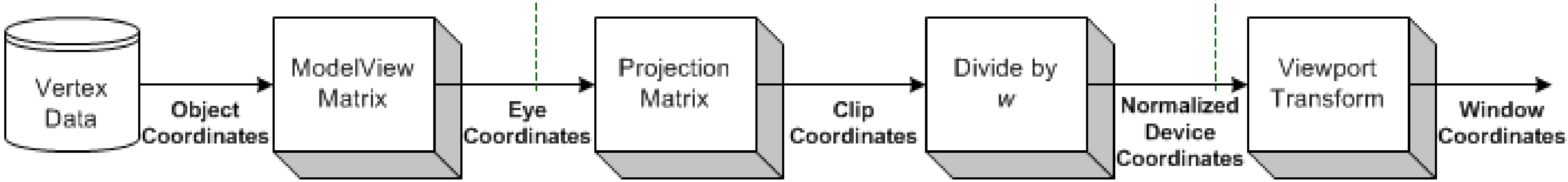
Número de pontos de fuga: número de elementos p da última linha diferentes de zero

OpenGL

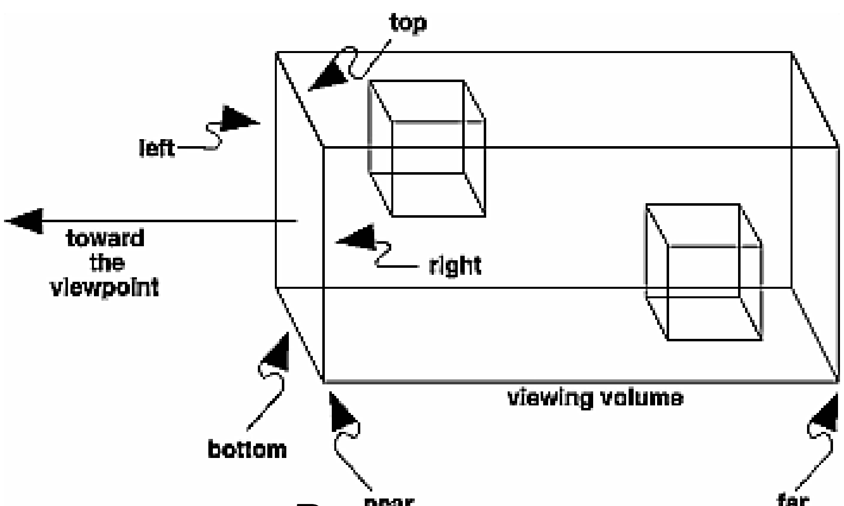
glMatrixMode

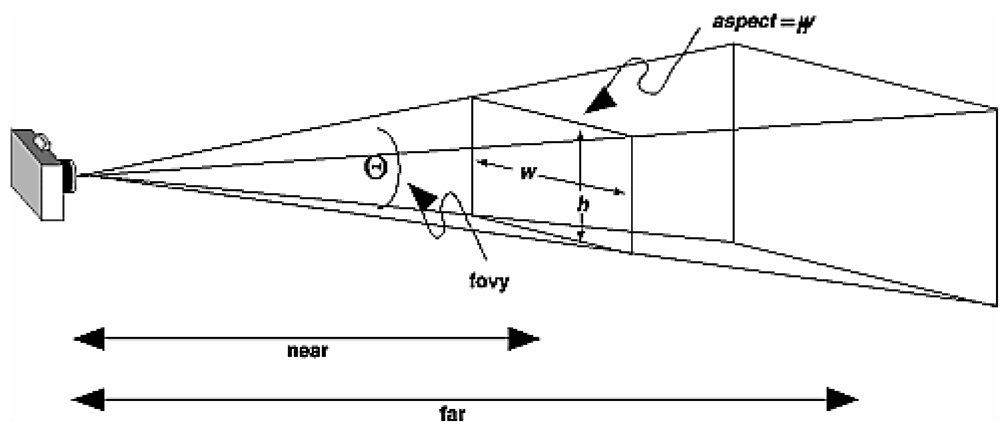
GL_MODELVIEW   GL_PROJECTION

$$\begin{cases} P_{par,opengl} = S_{par} \\ P_{per,opengl} = M.S_{per}.SH \end{cases}$$



$R.Tr$ gluLookAt   glViewport





$P_{par,opengl}$ glOrtho

$P_{per,opengl}$ glFrustum

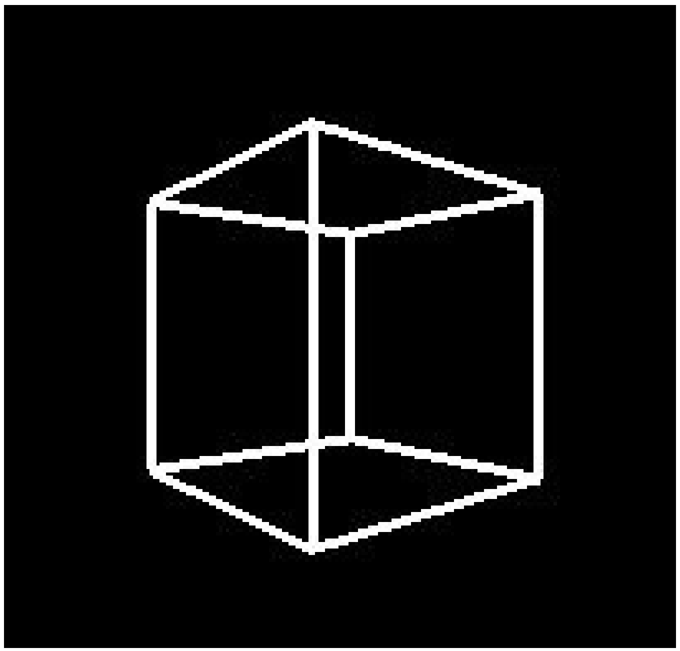
OpenGL

$$P_{par,opengl} = S_{par} = \begin{bmatrix} \frac{2}{r-l} & 0 & 0 & -\frac{r+l}{r-l} \\ 0 & \frac{2}{t-b} & 0 & -\frac{t+b}{t-b} \\ 0 & 0 & -\frac{2}{B-F} & -\frac{B+F}{B-F} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P_{per,opengl} = M.S_{per}.SH = \begin{bmatrix} \frac{2F}{r-l} & 0 & \frac{r+l}{r-l} & 0 \\ 0 & \frac{2F}{t-b} & \frac{t+b}{t-b} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{B+F}{B-F} & -\frac{2FB}{B-F} \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

http://www.songho.ca/opengl/gl_projectionmatrix.html

OpenGL: 2 Pontos de Fuga



glGetDoublev(GL_PROJECTION_MATRIX, projection);

```
0.667  0.000  0.000  0.000
0.000  0.667  0.000  0.000
0.000  0.000 -1.500 -2.500
0.000  0.000 -1.000  0.000
```

glGetDoublev(GL_MODELVIEW_MATRIX, modelview);

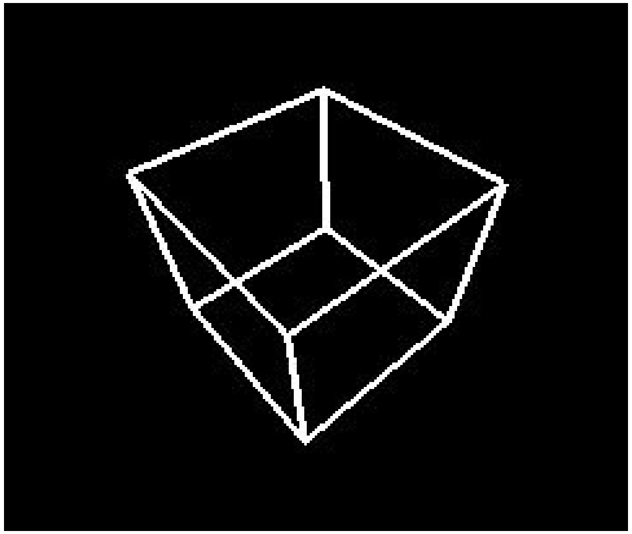
```
-0.643  0.000 -0.766  0.000
 0.000  1.000  0.000  0.000
 0.766  0.000 -0.643 -2.000
 0.000  0.000  0.000  1.000
```

projection* modelview =

```
-0.429  0.000 -0.511  0.000
 0.000  0.667  0.000  0.000
-1.149  0.000  0.964  0.500
-0.766  0.000  0.643  2.000
```

2 pontos de fuga

OpenGL: 3 Pontos de Fuga



glGetDoublev(GL_PROJECTION_MATRIX, projection);

```
0.667  0.000  0.000  0.000
0.000  0.667  0.000  0.000
0.000  0.000 -1.500 -2.500
0.000  0.000 -1.000  0.000
```

glGetDoublev(GL_MODELVIEW_MATRIX, modelview);

```
0.762 -0.030  0.647  0.000
0.510  0.643 -0.571  0.000
-0.399  0.765  0.506 -2.000
0.000  0.000  0.000  1.000
```

projection* modelview =

```
0.508 -0.020  0.431  0.000
0.340  0.429 -0.381  0.000
0.598 -1.147 -0.759  0.500
0.399 -0.765 -0.506  2.000
```

3 pontos de fuga