

IA725 – Computação Gráfica I

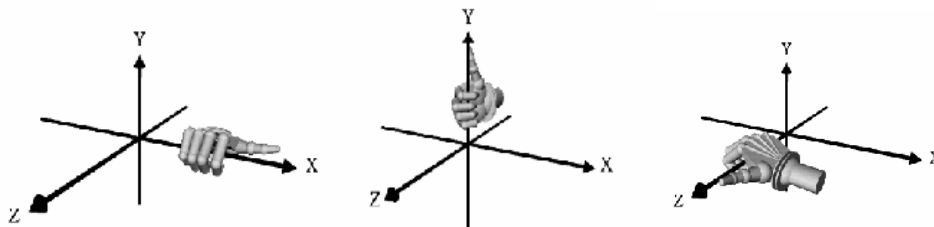
Fundamento Matemático

Watt: Capítulo 1

IA725 – 1s2009 - Ting

Sistema de Referência

Regra de mão-direita

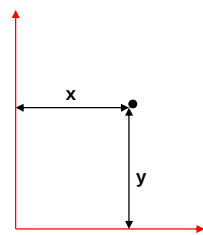


IA725 – 1s2009 - Ting

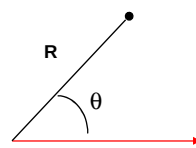
Pontos

n valores escalares no espaço R^n

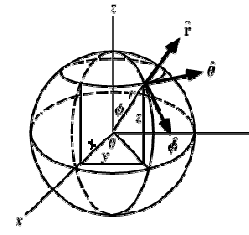
- Coordenadas cartesianas
- Coordenadas polares
- Coordenadas cilíndricas
- Coordenadas esféricas



Cartesianas



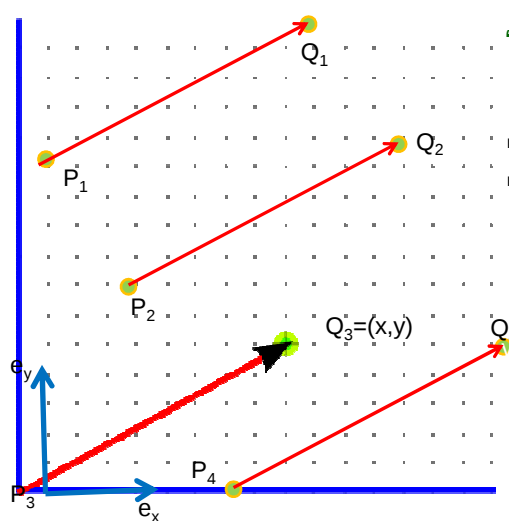
Polares



Esféricas

IA725 – 1s2009 - Ting

Vetores



“Diferença” entre 2 pontos
 $\mathbf{v} = \mathbf{Q}_i - \mathbf{P}_i$

- Magnitude ($|\mathbf{v}|$)
- Orientação (sentido e direção)

Vetor contravariante

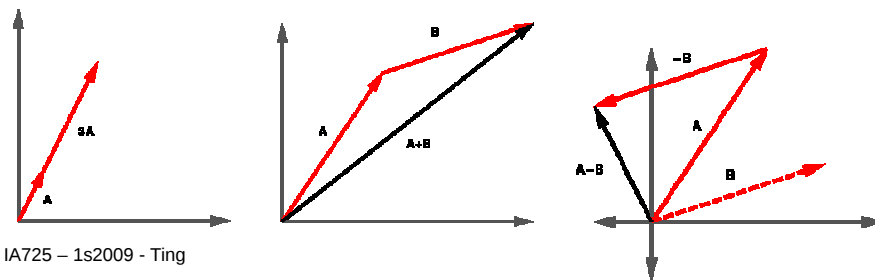
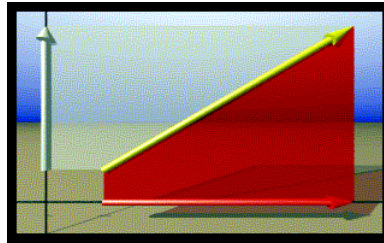
$$\mathbf{Q}_3 = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Vetor covariante

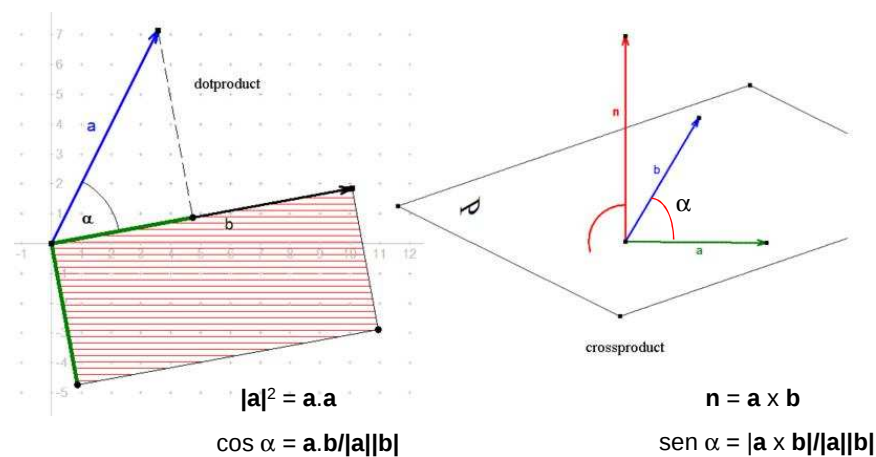
$$\mathbf{e} = [\mathbf{e}_x \quad \mathbf{e}_y]$$

IA725 – 1s2009 - Ting

Operações sobre Vetores

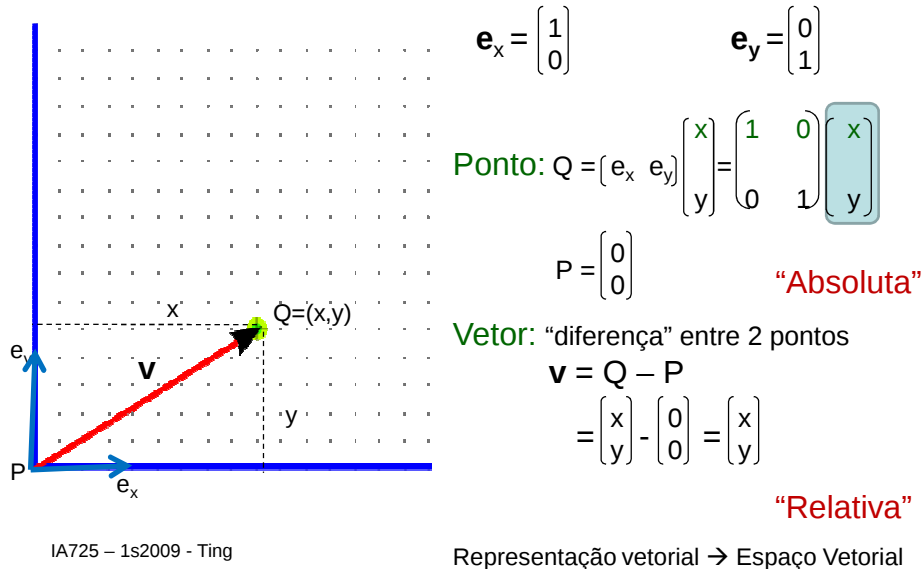


Operações sobre Vetores Produto Escalar e Vetorial



IA725 – 1s2009 - Ting

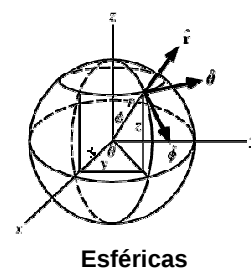
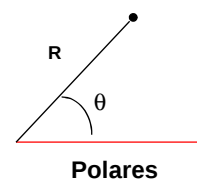
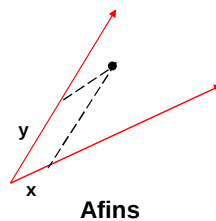
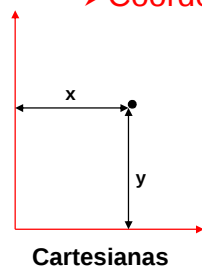
Coordenadas Afins



Pontos

n valores escalares no espaço R^n

- Coordenadas cartesianas
- Coordenadas polares
- Coordenadas cilíndricas
- Coordenadas esféricas
- **Coordenadas afins**

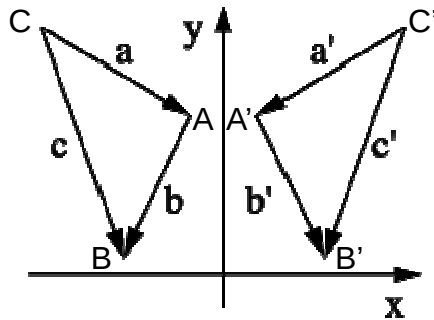


IA725 – 1s2009 - Ting

Transformações Lineares

Lineares= satisfazem a relação
 $f(\alpha p + \beta q) = \alpha f(p) + \beta f(q), \forall p, q \in V \text{ e } \forall \alpha, \beta \in K$

Reflexão



Pontos

$$\begin{pmatrix} A_x & B_x & C_x \\ A_y & B_y & C_y \end{pmatrix} \xrightarrow{f} \begin{pmatrix} A'_x & B'_x & C'_x \\ A'_y & B'_y & C'_y \end{pmatrix}$$

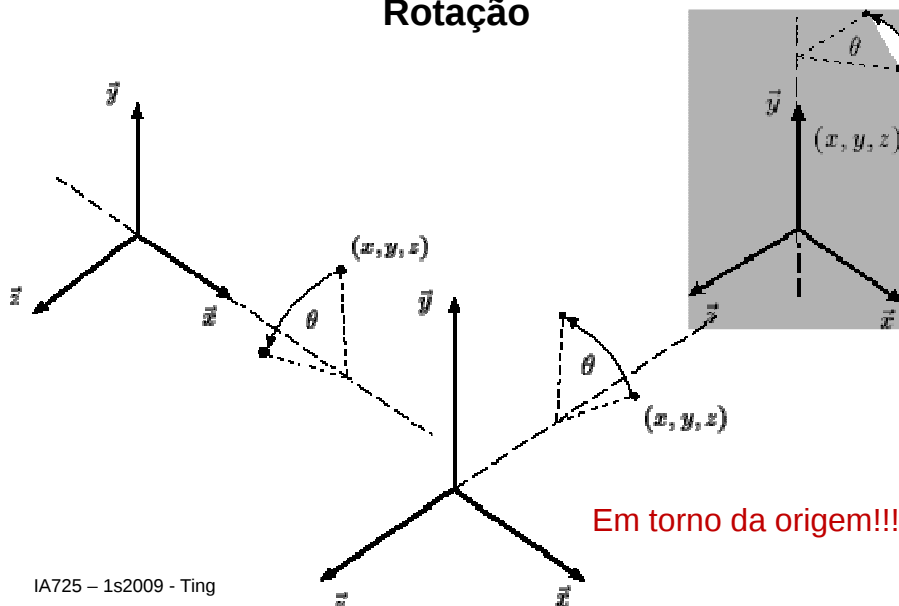
Vetores: diferença de 2 pontos

$$\begin{pmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \end{pmatrix} \xrightarrow{f} \begin{pmatrix} a'_x & b'_x & c'_x \\ a'_y & b'_y & c'_y \end{pmatrix}$$

IA725 – 1s2009 - Ting

Transformações Lineares

Rotação



IA725 – 1s2009 - Ting

Transformações Lineares

Notação Matricial

$$R_z(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Em torno da origem!!!!

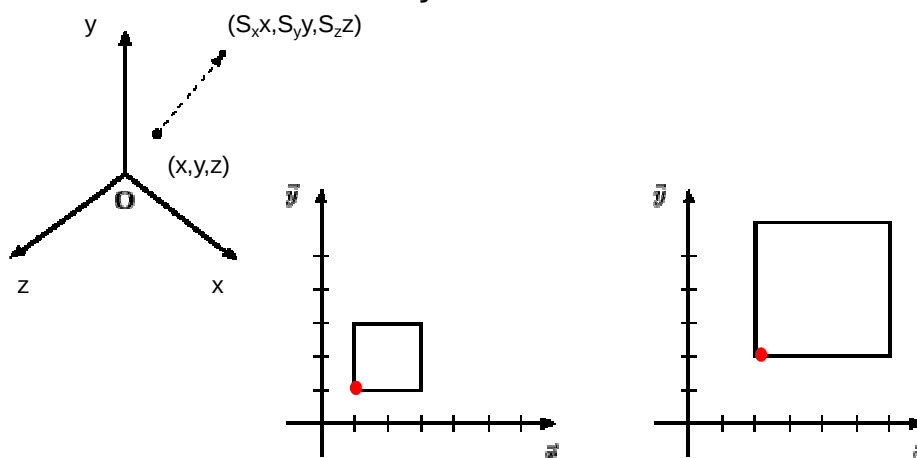
$$R_x(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$R_y(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix}$$

IA725 – 1s2009 - Ting

Transformações Lineares

Mudança de Escala



Como se pode evitar deslocamentos?

IA725 – 1s2009 - Ting

Transformações Lineares

Notação Matricial

$$S = \begin{pmatrix} S & 0 & 0 \\ 0 & S & 0 \\ 0 & 0 & S \end{pmatrix}$$

Uniforme

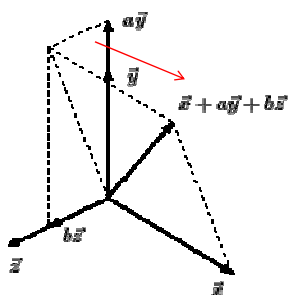
$$S = \begin{pmatrix} S_x & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 \\ 0 & 0 & S_z \end{pmatrix}$$

Não-Uniforme

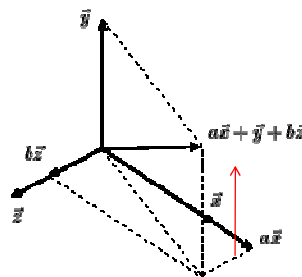
IA725 – 1s2009 - Ting

Transformações Lineares

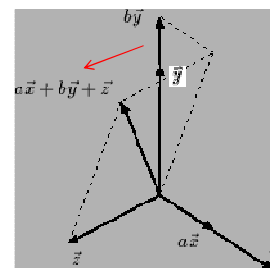
Cisalhamento (*Shearing*)



x em relação a y e z



y em relação a x e z



z em relação a x e y

Gráfico das funções de
cisalhamento passam pela
origem!!!!

IA725 – 1s2009 - Ting

Transformações Lineares

Notação Matricial

$$Sh_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \Delta x/\Delta z \\ 0 & 1 & \Delta y/\Delta z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

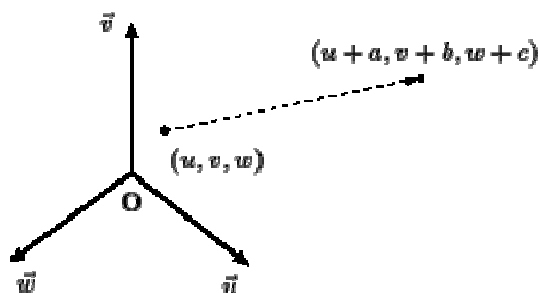
$$Sh_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \Delta y/\Delta x & 1 & 0 \\ \Delta z/\Delta x & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Sh_y = \begin{pmatrix} 1 & \Delta x/\Delta y & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \Delta z/\Delta y & 1 \end{pmatrix}$$

IA725 – 1s2009 - Ting

Deslocamentos

Translações



IA725 – 1s2009 - Ting

Translações

Notação Matricial

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \quad \text{Tr} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

IA725 – 1s2009 - Ting

Transformações Afins

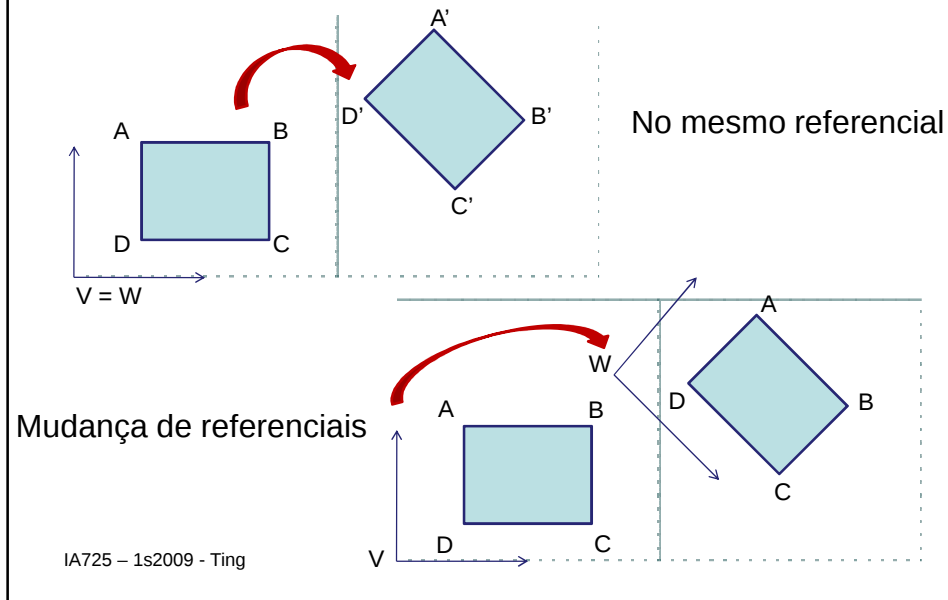
Transformações = funções f entre dois espaços vetoriais V e W que preservam as operações de adição vetorial e multiplicação por escalar do conjunto K
 $f: V \rightarrow W$

Afins = **lineares** + **deslocamento**

↓
 Reflexões
 Rotação
 Mudança de escala
 Cisalhamento

IA725 – 1s2009 - Ting

Transformações Afins



Transformações Afins

Notação Matricial

Transformação Linear

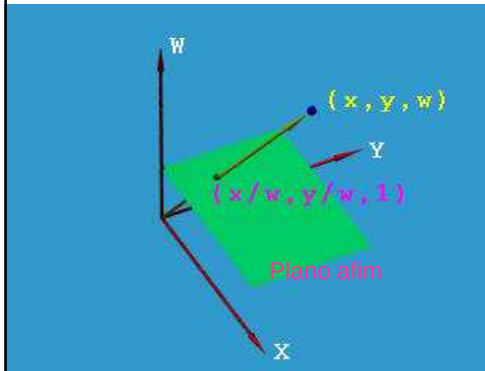
Translação

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix}$$

Coordenadas Homogêneas = pontos $\mathbb{R}^n$ representados por $(n+1)$ escalares

Coordenadas Homogêneas

(x, y, z, w)



Ponto

$(x/w, y/w, z/w, 1)$, ou seja, projeção de (x, y, z, w) , sobre o plano $w=1$ com centro de projeção na origem.

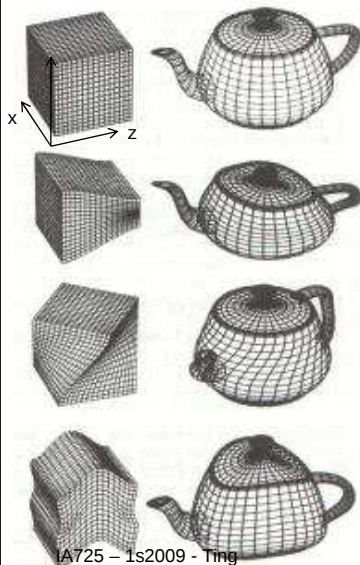
Vetor

“diferença” de 2 pontos homogêneos $\rightarrow$ Quarta coordenada(w) é nula

$\lim_{w \rightarrow 0} (x/w, y/w, z/w, w/w) = (\infty, \infty, \infty, 1)$
na direção (x, y, z)

IA725 – 1s2009 - Ting

Transformações Não-Lineares



Tapering

$(x, y, z) \rightarrow (rx, ry, z)$

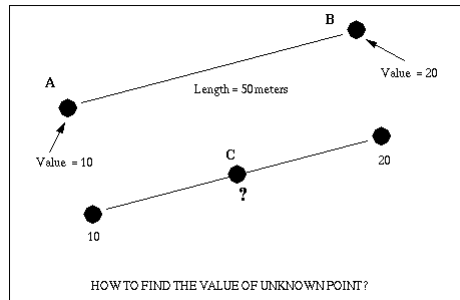
Twisting

$(x, y, z) \rightarrow (x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta, z)$

Bending

IA725 – 1s2009 - Ting

Interpolação Linear



$$\text{Valor}_C = \text{Valor}_A + (25/50) (\text{Valor}_B - \text{Valor}_A)$$



Proporção dos segmentos

independe da referência e das grandezas

Interpolação Linear Segmentos

$$p(t) = p_0 + t(p_1 - p_0)$$



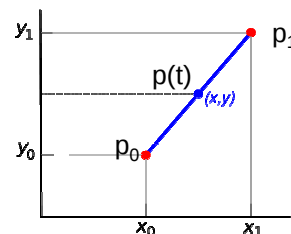
Proporção dos segmentos

$$p(t) = (1-t) p_0 + t p_1$$



Coordenadas baricêntricas

Combinação convexa de p_0 e p_1



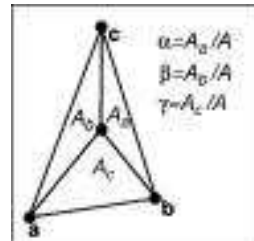
Interpolação Linear Triângulos

$$p(\alpha, \beta, \gamma) = \alpha a + \beta b + \gamma c$$

Proporção de áreas

Coordenadas baricêntricas
Combinação convexa de a, b, c

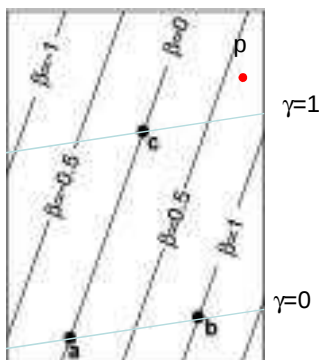
$$p(\alpha, \beta, \gamma), a, b, c \longrightarrow \alpha, \beta, \gamma ?$$



IA725 – 1s2009 - Ting

Interpolação Linear Triângulos

$$p(\alpha, \beta, \gamma), a, b, c \longrightarrow \alpha, \beta, \gamma ?$$



$$p(\alpha, \beta, \gamma) = \alpha a + \beta b + \gamma c$$

$$p = (1 - \beta - \gamma) a + \beta b + \gamma c$$

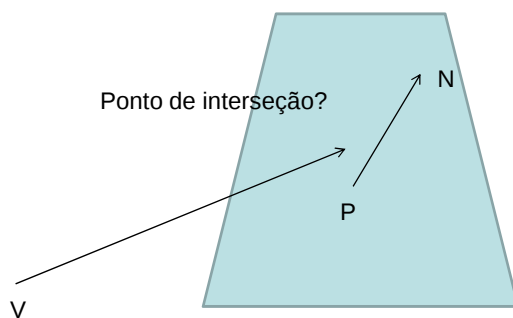
$$(p - a) = \beta(b - a) + \gamma(c - a)$$

$$(p - b) = \alpha(a - b) + \gamma(c - b)$$

$$1 = \alpha + \beta + \gamma$$

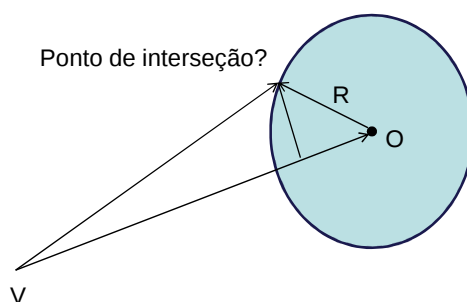
IA725 – 1s2009 - Ting

Interseções raio - plano



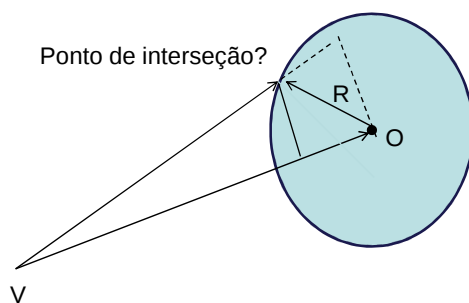
IA725 – 1s2009 - Ting

Interseções raio - esfera



IA725 – 1s2009 - Ting

Interseções raio - esfera



IA725 – 1s2009 - Ting