IE009 – Processamento Adaptativo de Sinais

2ª Lista de Exercícios

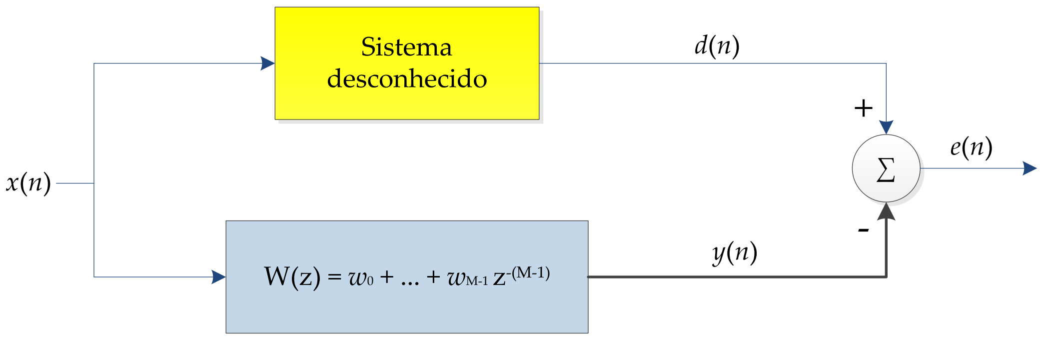
Prof. Rafael Ferrari - 1º semestre de 2019

Data de Entrega: 24/05/2019

1º exercício (1,0 pontos): Seja o sinal autorregressivo (AR) dado por $x(n) = 0{,}2\,x(n-1) + 0{,}4\,x(n-2) + \vartheta(n)$, onde $\vartheta(n)$ é um ruído branco de média nula e variância unitária.

a) Obtenha a função de transferência e identifique os polos do filtro de síntese.
b) Determine a matriz de autocorrelação do processo $x(n)$ de ordem $M = 3$ (3x3).

2º exercício (2,5 pontos): Considere que desejemos identificar um sistema dinâmico desconhecido. Dado um sinal de entrada qualquer, é possível obter uma medida da saída deste sistema, conforme ilustrado no diagrama abaixo, no qual $x(n)$ representa um processo gaussiano branco de média nula e variância unitária.



O modelo que vamos utilizar para a identificação do sistema é o de um filtro FIR com M coeficientes.

Você dispõe do arquivo dados_sistema.mat, o qual contém dois vetores:

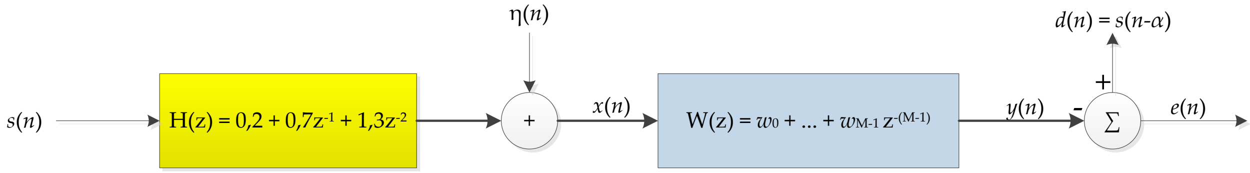
- $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{1\times T}$: amostras do processo de entrada $x(n)$;
- $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^{1\times T}$: observações da saída do sistema que queremos identificar, onde T denota o número de amostras disponíveis.

a) Obtenha a resposta ao impulso do filtro ótimo em função do número de coeficientes (M).
b) Mostre a curva de erro quadrático médio de identificação ($\mathrm{E}\{e^2(n)\}$) em função do número de coeficientes do filtro ótimo.
c) Para cada valor de M, exiba a saída produzida pelo filtro ótimo – considerando as primeiras 50 amostras – junto com a saída desejada. Discuta todos os resultados.

Agora, vamos aplicar um filtro de erro de predição sobre o vetor de sinal observado **d**.

d) Mostre a curva de erro quadrático médio de predição em função do tamanho do preditor (K coeficientes).
e) A que conclusões podemos chegar a respeito do sistema desconhecido ao analisarmos o perfil da curva de erro quadrático médio de predição, assim como as propriedades estatísticas (até segunda ordem) do erro de predição?
f) A partir das conclusões do item anterior, explique o comportamento observado no item b) para a curva de erro quadrático médio de identificação.

3º exercício (3,0 pontos): Suponha que um sinal $s(n)$ formado por uma sequência de amostras i.i.d. (independentes e identicamente distribuídas), de valores +1 e -1 equiprováveis, seja transmitido por um canal com função de transferência $H(z) = 0{,}2 + 0{,}7z^{-1} + 1{,}3z^{-2}$ e ruído aditivo branco e gaussiano com média nula e variância 0,01. O diagrama abaixo apresenta os elementos envolvidos no sistema de comunicação.



Assuma que desejemos projetar um equalizador com dois coeficientes através do paradigma de Wiener (ou seja, minimizando o erro quadrático médio entre a saída do equalizador $y(n)$ e um sinal desejado $d(n)$, considerando o equalizador como um filtro FIR: $W(z) = w_0 + w_1 z^{-1}$).

a) Calcule (analiticamente) a matriz de autocorrelação de $x(n)$ de ordem 2**.**
b) Calcule o vetor de correlação cruzada $\mathbf{p}_{xd}$ para atrasos de equalização 0, 1, 2, 3, 4 e 5 (ou seja, considerando como sinal desejado: $d(n) = s(n)$, $d(n) = s(n-1)$, $d(n) = s(n-2)$, $d(n) = s(n-3)$, $d(n) = s(n-4)$ e $d(n) = s(n-5)$, respectivamente).
c) Calcule as soluções de Wiener para os seis atrasos e seus respectivos erros residuais (entende-se por erro residual o erro quadrático médio associado à saída do filtro de Wiener considerando os coeficientes ótimos, ou seja, o J_{min}, conforme visto em classe). Discuta os resultados obtidos.
d) Trace a superfície da função custo de Wiener para a situação associada ao melhor dos seis atrasos, isto é, aquele que atinge o menor erro residual. Em outra figura, trace as curvas de nível dessa superfície juntamente com o ponto correspondente à solução de Wiener. Discuta os resultados obtidos.
e) Obtenha a resposta combinada canal-equalizador, isto é, a convolução entre a resposta ao impulso do canal e a resposta ao impulso do equalizador, para as soluções de Wiener de atraso 0, 1, 2 e 3. Trace as respostas combinadas em quatro figuras diferentes e analise os resultados, discutindo-os à luz dos erros residuais obtidos no item c).

DICA: use a função stem(.) do Matlab/Octave para traçar as respostas combinadas.

f) Obtenha a solução de Wiener analítica de 8 coeficientes para os atrasos máximo e mínimo em que há correlação entre o sinal desejado $d(n)$ e o vetor de entrada do filtro equalizador $\mathbf{x}(n)$.
g) Obtenha analiticamente para $x(n)$ o filtro ótimo de erro de predição progressiva a passo unitário de tamanho 8. (**Observação:** o preditor possui 7 coeficientes nesse caso).
h) Obtenha analiticamente para $x(n)$ o filtro ótimo de erro de predição retrógrada a passo unitário de tamanho 8. (**Observação:** o preditor possui 7 coeficientes nesse caso).
i) Compare e discuta, em termos dos coeficientes e dos zeros que caracterizam a função de transferência dos filtros, os FEPs obtidos nos itens g) e h) com os filtros de Wiener obtidos no item f).
j) Gere 1000 amostras do sinal recebido, filtre esse sinal utilizando os FEPs obtidos nos itens g) e h) e os filtros de Wiener determinados em f). Exiba as respectivas saídas (no caso dos FEPs, os erros de predição progressiva e retrógrada). Comente os resultados observados.

DICA: use o comando plot(y,'.').

4º exercício (1,5 pontos): Em sísmica de reflexão, **a** função refletividade é uma série temporal que contém informações sobre as estruturas da subsuperfície. Idealmente, cada impulso observado nessa série está associado a uma interface entre camadas geológicas distintas. Em experimentos sísmicos, são adquiridas séries temporais denominadas sismogramas que podem ser modeladas como a convolução da função refletividade com a assinatura da fonte mais um ruído de medida: $t(n) = w(n)*r(n) + q(n)$, em que $t(n)$ é o sismograma ou traço sísmico, $w(n)$ é a assinatura da fonte, $r(n)$ é a função refletividade e $q(n)$ é um ruído branco gaussiano.

O arquivo **sismograma.mat** contém uma série temporal que representa um sismograma sintético.

a) Proponha uma estratégia baseada em predição linear para estimar a função refletividade a partir exclusivamente do sismograma fornecido. Discuta as premissas envolvidas na solução proposta.

b) Aplique a solução proposta e compare o resultado com a função refletividade fornecida no arquivo **refletividade.mat**. Ajuste os parâmetros da solução proposta de modo a obter a melhor estimativa possível. Compare as sequências de autocorrelação do sismograma, da refletividade e da estimativa obtida. Discuta os resultados obtidos sob a luz das premissas estabelecidas no item anterior.

5º exercício (2,0 pontos): O arquivo **traco.mat** contém uma série temporal que representa um sismograma sintético contaminado por reflexões múltiplas. Note que a periodicidade das múltiplas é de aproximadamente 28 amostras.

a) Aplique desconvolução preditiva com passo arbitrário para atenuar as múltiplas e compare o resultado com o traço que contém somente primárias presente no arquivo **primarias.mat**. Use um preditor progressivo com 12 coeficientes e ajuste o passo de predição de maneira adequada. Compare as funções de autocorrelação do traço com múltiplas, do traço composto só por primárias e do resultado da filtragem. Comente os resultados.

b) Repita a letra a) usando um preditor com 50 coeficientes. Discuta os resultados.