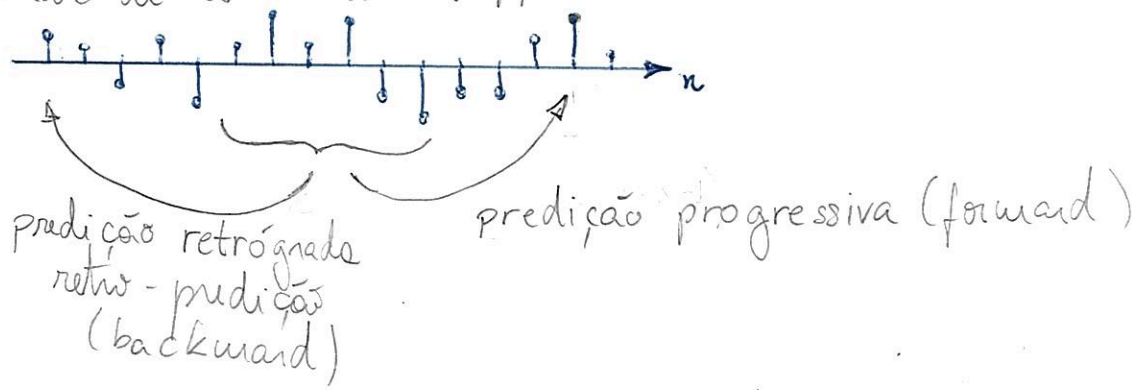
# Predição Linear

Estimar uma amostra futura ou passada a partir de uma combinação linear de amostras do processo.

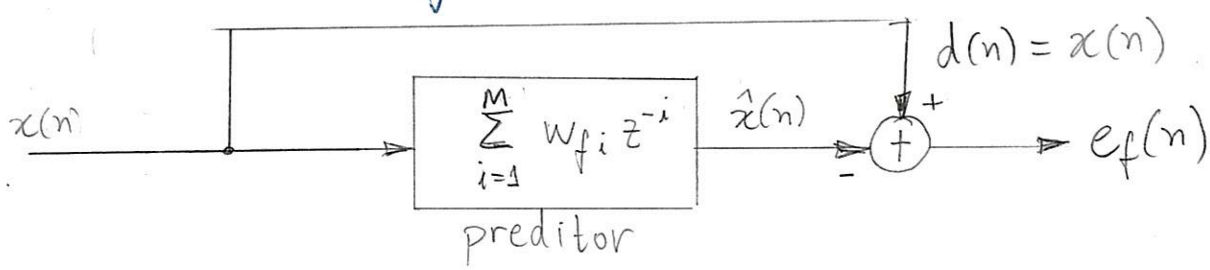



Cada amostra do processo pode ser vista como sendo composta por uma parcela dependente das amostras anteriores (posteriores) e outra independente, a parcela de inovação do processo.

Casos limites:

- não há parcela independente: processo determinístico
- não há parcela dependente: processo estocástico branco

## Predição Linear Progressiva a um passo




$$\hat{x}(n) = w_{f1}\, x(n-1) + w_{f2}\, x(n-2) + \dots + w_{fM}\, x(n-M) = \underline{w}_f^T\, \underline{x}(n-1)$$

Objetivo: minimizar $E\{e_f^2(n)\}$

Observe que a formulação é equivalente à de filtragem ótima (Wiener):

| | Wiener | Preditor |
|---|---|---|
| entrada | $\underline{x}(n)$ | $\underline{x}(n-1)$ |
| referência | $d(n)$ | $x(n)$ |
| erro | $d(n) - \underbrace{\underline{w}^T \underline{x}(n)}_{\hat{d}(n)}$ | $x(n) - \underbrace{\underline{w}_f^T \underline{x}(n-1)}_{\hat{x}(n-1)}$ |

$$E\{\underline{x}(n-1)\,\underline{x}^T(n-1)\} = E\{\underline{x}(n)\,\underline{x}^T(n)\}$$

$$\underline{w}_{ótimo} = R_x^{-1} p_{xd} \Rightarrow \underline{w}_{f\,ótimo} = R_x^{-1} p_{xd}$$

$$p_{xd} = E\{\underline{x}(n-1)\,x(n)\} = E\left\{\begin{bmatrix} x(n-1)\,x(n) \\ x(n-2)\,x(n) \\ \vdots \\ x(n-M)\,x(n) \end{bmatrix}\right\} = \begin{bmatrix} r_x(1) \\ r_x(2) \\ \vdots \\ r_x(M) \end{bmatrix} = \underline{r}_x$$

$$\therefore \boxed{\underline{w}_{f\,ótimo} = R_x^{-1}\,\underline{r}_x} \;//$$

# Filtro de Erro de Predição (passo unitário) (FEP)

Se imaginamos um sistema cuja entrada é $x(n)$ e a saída é o erro de predição, temos:

$$x(n) \longrightarrow \boxed{A(z)} \longrightarrow e_f(n)$$

$$e_f(n) = x(n) - \hat{x}(n) = x(n) - \underline{w}_f^T \, \underline{x}(n-1) = x(n) - \sum_{i=1}^{M} w_{fi} \, x(n-i)$$

$$A(z) = 1 - \sum_{i=1}^{M} w_{fi} \, z^{-1}$$ $\Rightarrow$ função de transferência do filtro de erro de predição

$$e_f(n) = \begin{bmatrix} 1 \\ -w_{f1} \\ -w_{f2} \\ \vdots \\ -w_{fM} \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} x(n) \\ x(n-1) \\ x(n-2) \\ \vdots \\ x(n-M) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -\underline{w}_f \end{bmatrix}^T \cdot \underline{x}(n)$$

O FEP pode ser visto como um filtro de eliminação de redundância entre as amostras de $x(n)$.

## Propriedades:

i) Os coeficientes ótimos do preditor são tais que $\dfrac{\partial E\{e_f^2(n)\}}{\partial w_{fi}} = 0$ $\forall i$

$$\frac{\partial E\{e_f^2(n)\}}{\partial w_{fi}} = 2E\left\{e_f(n) \cdot \frac{\partial e_f(n)}{\partial w_{fi}}\right\} = 2E\left\{e_f(n) \cdot \frac{\partial \left[x(n) - \sum_{i=1}^{M} w_{fi} \, x(n-i)\right]}{\partial w_{fi}}\right\} =$$

$$= 2\,E\left\{e_f(n)\left[-x(n-i)\right]\right\} \Rightarrow E\left\{e_f(n)\,x(n-i)\right\} = 0 \quad p/\ i=1,2,\dots M$$

Qdo $M \to \infty$, o FEP produz um sinal ortogonal às amostras passadas da entrada.

$$E\left\{e_f(n)\,e_f(n-k)\right\} = E\left\{e_f(n)\left[x(n-k) - \sum_{i=1}^{M} w_{f_i}\,x(n-k-i)\right]\right\} = \sum_{i=0}^{M} a_i\,E\left\{e_f(n)\,x(n-(k+i))\right\}$$

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ -\underline{w}_f \end{bmatrix}$$

$$= a_0\,E\{e_f(n)\,x(n-k)\} + a_1\,E\{e_f(n)\,x(n-(k+1))\} + \dots + a_M\,E\{e_f(n)\,x(n-(k+M))\}$$

Mas, qdo $M \to \infty$, $E\{e_f(n)\,x(n-j)\} = 0$ se $j \neq 0$

$$\therefore E\left\{e_f(n)\,e_f(n-k)\right\} = \begin{cases} E\{e_f^2(n)\} = J_{min} = r_x(0) - \underline{w}_f^T\,\underline{r}_x, & k=0 \\ 0, & k \neq 0 \end{cases}$$

Portanto, o FEP é um filtro branqueador pois sua saída tende a ser ortogonal à medida que $M$ aumenta. No limite, qdo $M \to \infty$, a saída do FEP é branca.

ii) Seja $A(z) = \sum_{k=0}^{M} a_k z^{-k}$ a função de transferência de um FEP e $\alpha_i$, $i=1,\dots,M$ os zeros de $A(z)$. Podemos então escrever:

$A(z) = B(z)\,(1 - \alpha_b z^{-1})$, onde $\alpha_b$ é um dos zeros e $A(z)$

e $B(z) = \prod_{\substack{i=1 \\ i\neq b}}^{M} (1 - \alpha_i z^{-1})$

O MSE pode ser escrito da seguinte forma:

$$E\left\{|e_f(n)|^2\right\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} S_f(e^{j\omega})\,d\omega$$ → a área da densidade espectral de potência fornece a potência ou a variância do sinal.

$$E\left\{|e_f(n)|^2\right\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} S_x(e^{j\omega}) \cdot |\underbrace{A(e^{j\omega})}_{\text{resposta em freqüência do FEP}}|^2 \, d\omega$$

Mas $A(e^{j\omega}) = B(e^{j\omega})(1-\alpha_b e^{-j\omega})$. Então

$$E\left\{|e_f(n)|^2\right\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} S_x(e^{j\omega})\,|B(e^{j\omega})|^2 \cdot |1-\alpha_b e^{-j\omega}|^2 \, d\omega$$

Expressando o zero $\alpha_b$ em sua forma polar, $\alpha_b = \rho_b e^{j\omega_b}$,

$$E\left\{|e_f(n)|^2\right\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} S_x(e^{j\omega})\,|B(e^{j\omega})|^2 \cdot \left(1-2\rho_b \cos(\omega-\omega_b)+\rho_b^2\right) d\omega$$

Vamos supor que todos os parâmetros do filtro já tenham sido otimizados, exceto o módulo do "último zero", $\rho_b$. Nesse caso, o valor ótimo de $\rho_b$ é obtido por $\frac{\partial E\{|e_f(n)|^2\}}{\partial \rho_b} = 0$

$$\frac{\partial E\left\{|e_f(n)|^2\right\}}{\partial \rho_b} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{S_x(e^{j\omega})}_{\geq 0}\,\underbrace{|B(e^{j\omega})|^2}_{\geq 0} \cdot 2\left(\rho_b - \cos(\omega-\omega_b)\right) d\omega = 0$$

A única forma de anular a integral é se $\rho_b - \cos(\omega-\omega_b)$ assumir valores positivos e negativos.

Como $|\cos(\omega-\omega_b)| \leq 1$ e $\rho_b \geq 0$, $\rho_b < 1$ para que existam valores negativos de $\rho_b - \cos(\omega-\omega_b)$

Esse procedimento pode ser repetido para qualquer zero do FEP, o que nos leva a concluir que todos os seus zeros têm módulo inferior a 1.

Como o FEP tem seus pólos na origem e todos os seus zeros estão dentro da circunferência de raio unitário, o FEP é um sistema de fase mínima.

iii) O FEP ótimo pode ser obtido através da solução de um problema de minimização de variância com restrições lineares (LCMV):

$$e_f(n) = \underline{a}^H \underline{x}(n)$$

$$\min E\left\{ |e_f(n)|^2 \right\} = \underline{a}^H R_x \underline{a}$$

$$\text{s.a.} \quad \underline{c}^H \underline{a} = g$$

no qual

$$\underline{c} = [1\ 0\ 0 \ldots 0]^T$$

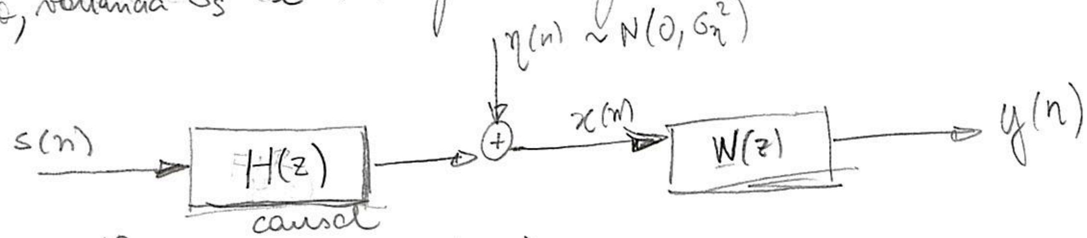
$$\underline{a} = [a_0\ \ a_1\ \ a_2\ \ \ldots\ \ a_M]^T$$

$$g = 1$$

Neste caso, a solução ótima é dada por $\left( \underline{w}_0 = R_x^{-1} C (C^H R_x^{-1} C)^{-1} \underline{g} \right)$

$$\underline{a} = \frac{R_x^{-1} \underline{c}}{\underline{c}^T R_x^{-1} \underline{c}}$$

iv) Imagine que se deseja estimar um processo s(n), WSS, com média nula, variância $\sigma_s^2$ e composto por amostras i.i.d. (branco)




$$x(n) = \sum_{i=0}^{\infty} h_i\, s(n-i) + \eta(n)$$

$$\underline{W}_{wiener} = R_X^{-1} \, p_{XS} = R_X^{-1} \cdot \begin{bmatrix} h_0 \sigma_s^2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\underline{W}_{wiener}}{h_0 \sigma_s^2} = R_X^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = R_X^{-1} \, \underline{C}$$

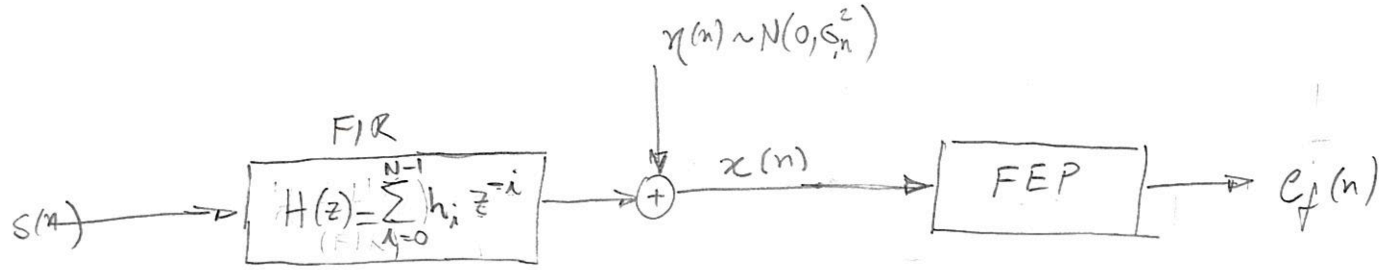
Substituindo na expressão do FEP ótimo:

$$\underline{a} = \frac{\dfrac{\underline{W}_{wiener}}{h_0 \sigma_s^2}}{\underline{C}^T \dfrac{\underline{W}_{wiener}}{h_0 \sigma_s^2}} \Rightarrow \boxed{\underline{a} = \frac{1}{w_{0\,wiener}} \cdot \underline{W}_{wiener}}$$

Portanto, em um problema de desconvolução de um processo branco, o FEP ótimo corresponde ao filtro de Wiener normalizado pelo seu primeiro coeficiente.

☆ É possível estimar o sinal $s(n)$ de maneira não-supervisionada utilizando-se um FEP.

Exemplo: Equalização de canais de comunicações




i.i.d
$\{-1;+1\}$
equiprováveis

$$x(n) = \boxed{h_0\, s(n)} + h_1 s(n-1) + h_2 s(n-2) + \dots + h_{N-1} s(n-N+1) + \eta(n)$$

$$x(n-1) = h_0 s(n-1) + h_1 s(n-2) + \dots + h_{N-1} s(n-N) + \eta(n-1)$$

$$\vdots$$

$$x(n-M) = h_0 s(n-M) + h_1 s(n-M-1) + \dots + h_{N-1} s(n-M-N+1) + \eta(n-M)$$

O erro de predição progressivo a passo unitário é dado por:

$$e_f(n) = x(n) - w_{f1}\, x(n-1) - w_{f2}\, x(n-2) - \dots - w_{fM}\, x(n-M)$$

Note que a única informação de $s(n)$ presente em $x(n)$ e ausente em $x(n-1)$, $x(n-2),\dots,x(n-M)$ é a amostra mais recente do sinal transmitido, ou seja, $s(n)$.

Nesse caso, se o FEP conseguir remover toda a redundância existente entre $x(n)$ e $\underline{x}(n-1)$ o erro de predição residual seria

$$e_f(n) = h_0\, s(n) + \eta'(n)$$

Exemplo

$$H(z) = 1 + 0{,}5\, z^{-1} \Rightarrow \text{zero em } z = -0{,}5$$

$$\sigma_\eta^2 = 0{,}1$$

Solução de Wiener para atraso 0 ($d(n) = s(n)$), com equalizador de 2ª ordem:

$$\underline{w}_W = R_x^{-1} p_{xd} \Rightarrow \begin{bmatrix} w_0 \\ w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}25+\sigma_\eta^2 & 0{,}5 & 0 \\ 0{,}5 & 1{,}25+\sigma_\eta^2 & 0{,}5 \\ 0 & 0{,}5 & 1{,}25+\sigma_\eta^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}881 \\ -0{,}378 \\ 0{,}14 \end{bmatrix}$$

$$W(z) = 0{,}881 - 0{,}378\, z^{-1} + 0{,}14\, z^{-2}$$

FEP ótimo de 2ª ordem: $A(z) = 1 - w_{f1} z^{-1} - w_{f2} z^{-2}$

$$\underline{w}_f = R_x^{-1} r_x \Rightarrow \begin{bmatrix} w_{f1} \\ w_{f2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}35 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 1{,}35 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0{,}5 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}429 \\ -0{,}159 \end{bmatrix}$$

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ -0{,}429 \\ +0{,}159 \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad A(z) = 1 - 0{,}429\, z^{-1} + 0{,}159\, z^{-2}$$

Zeros de $W(z)$: $z_1 = 0{,}215 + j0{,}336$ e $z_2 = 0{,}215 - j0{,}336$

Zeros de $A(z)$: $z_1 = 0{,}215 + j0{,}336$ e $z_2 = 0{,}215 - j0{,}336$

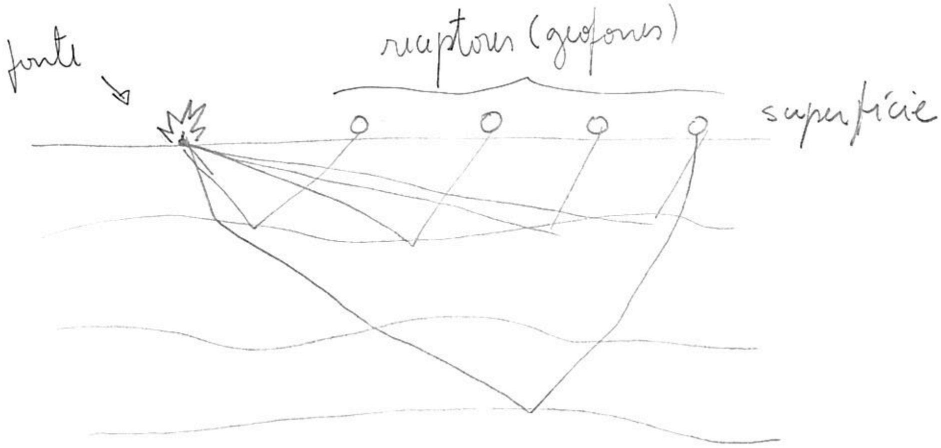
$$\frac{\underline{w}_W}{w_0} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ -0{,}429 \\ 0{,}159 \end{bmatrix} = \underline{a}$$

Resposta combinada canal-equalizador:

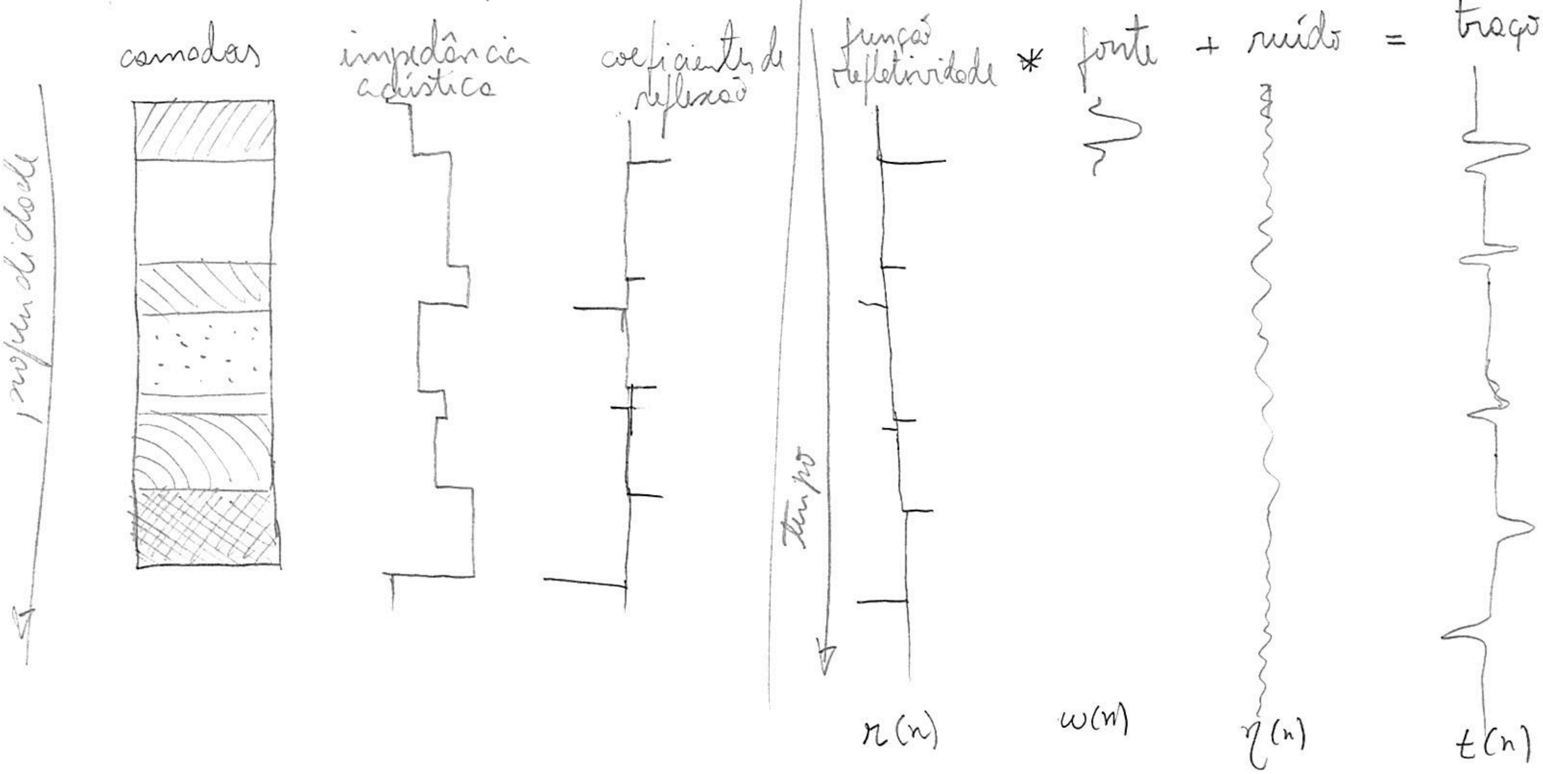
$$H(z)W(z) = 0{,}881 + 0{,}062\, z^{-1} - 0{,}049\, z^{-2} + 0{,}070\, z^{-3}$$

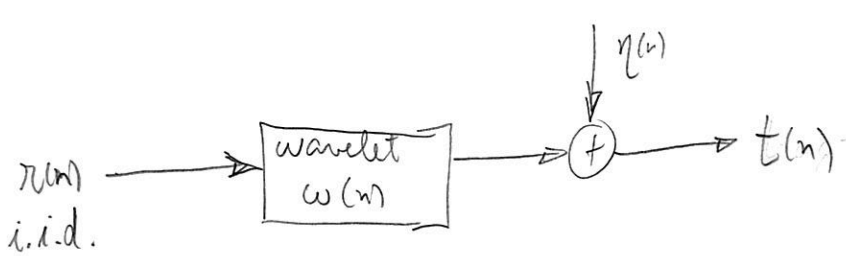
$$H(z)A(z) = 1{,}0 + 0{,}071\, z^{-1} - 0{,}056\, z^{-2} + 0{,}079\, z^{-3}$$

# Imageamento Sísmico




Domínio da profundidade | Domínio temporal.



# Predição Linear e Análise de Sinais.

## a) Predição de um sinal AR

FEP

$$\underset{\substack{\text{branco}\\ \sigma_\nu^2}}{\nu(n)} \longrightarrow \boxed{\underset{B(z)}{\dfrac{1}{1-\sum_{i=1}^{L} b_i z^{-i}}}} \xrightarrow{x(n)} \boxed{\underset{A(z)}{1-\sum_{i=1}^{M} w_{fi} z^{-i}}} \longrightarrow e_f(n)$$

↳ estável (todos os pólos dentro do CRU)

- Se $M<L$, $e_f(n)$ é correlacionado pois não há zeros suficientes para cancelar os pólos em $B(z)$.

- Se $M=L$, $w_{fi}=b_i$ e $e_f(n)=\nu(n)$, os zeros cancelam os pólos.

- Se $M>L$, $w_{fi}=b_i$ para $i=1,2,\dots,L$ e $w_{fi}=0$ para $i=L+1,\dots,M$.

A predição linear pode ser usada como um método de análise de um sinal aleatório que pressupõe que o sinal se comporta como um modelo auto-regressivo.

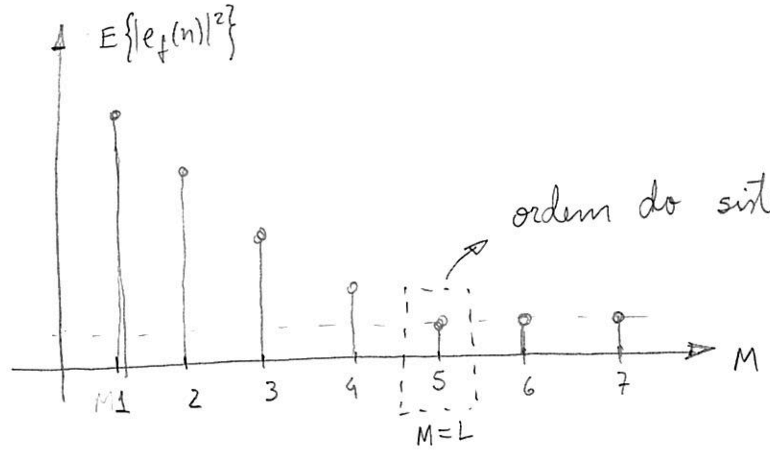
$$\nu(n) \longrightarrow \boxed{\dfrac{1}{1-\sum_{i=1}^{L} b_i z^{-i}}} \longrightarrow x(n)$$

é chamado de <u>filtro de síntese</u> pois gera um processo AR a partir de um ruído branco.

$$x(n) \longrightarrow \boxed{1-\sum_{i=1}^{M} w_{fi} z^{-i}} \longrightarrow e_f(n)$$

é chamado de <u>filtro de análise</u> pois a partir dele é possível identificar o processo AR que gera $x(n)$.

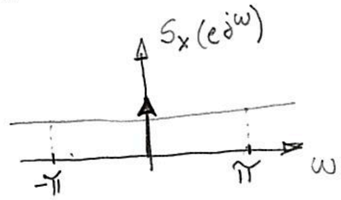
No processo de identificação do processo AR, a ordem M do FEP deve ser aumentada até o erro quadrático médio de predição parar de diminuir. Nessa situação, $e_f(n)$ é branco




Caso essa condição não ocorra, o sinal $x(n)$ não é gerado por um modelo AR e o FEP constitui uma aproximação AR do sistema original. Nesse caso, qto maior M, mais $e_f(n)$ tende a um ruído branco.

## b) Predição de um sinal composto por raias espectrais

Começamos analisando um exemplo simples: $x(n) = 1 + \underbrace{\nu(n)}_{\text{branco},\ \sigma_\nu^2}$




FEP: $A(z) = 1 - \omega_{f1} z^{-1}$

Preditor ótimo: $\omega_{f1} = \dfrac{r_x(1)}{r_x(0)} = \dfrac{E\{x(n)x(n-1)\}}{E\{x(n)x(n)\}} = \dfrac{E\{(1+\nu(n))(1+\nu(n-1))\}}{E\{(1+\nu(n))^2\}} = \dfrac{1}{1+\sigma_\nu^2}$

Assim; $A(z) = 1 - \left(\dfrac{1}{1+\sigma_\nu^2}\right) z^{-1}$

Se $\sigma_\nu^2 = 0$, $x(n)$ é uma constante: apenas uma amostra é necessária para predizer o sinal com erro nulo. Nesse caso, $A(z) = 1 - z^{-1}$ possui um zero no círculo de raio unitário, que indica que na frequência $2k\pi$ o FEP

À medida que $\sigma_\nu^2$ aumenta, $w_{f1}$ diminui e o zero caminha na direção da origem. Quando $\sigma_\nu^2 \to \infty$, $A(z) = 1$, ou seja, o erro de predição é o próprio sinal $x(n)$.

Suponha agora que $x(n) = \sqrt{2}\cos(n\omega_0 + \varphi) + \nu(n)$, em que $\varphi$ é uma V.A. uniforme $\in (0, 2\pi)$

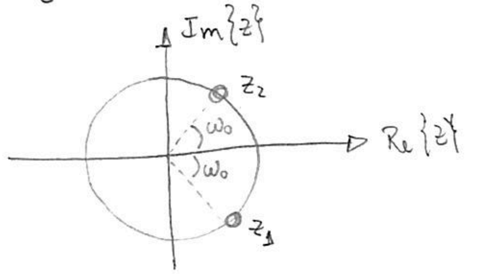
FEP: $A(z) = 1 - w_{f1} z^{-1} - w_{f2} z^{-2}$

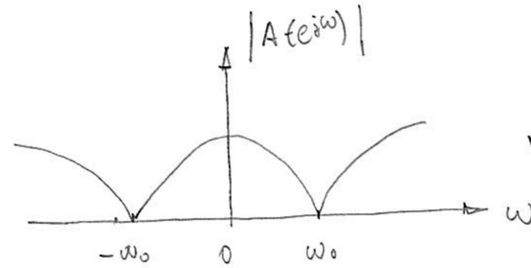
Coeficientes ótimos: $w_{f1} = 2\cos\omega_0 \dfrac{\operatorname{sen}^2\omega_0 + \sigma_\nu^2/2}{\operatorname{sen}^2\omega_0 + \sigma_\nu^2(2+\sigma_\nu^2)}$

$$w_{f2} = -1 + \frac{\sigma_\nu^2\left(1 + \sigma_\nu^2 + 2\cos^2\omega_0\right)}{\left(1+\sigma_\nu^2\right)^2 - \cos^2\omega_0}$$

- Se $\sigma_\nu^2 = 0 \Rightarrow w_{f1} = 2\cos\omega_0$ e $w_{f2} = -1$

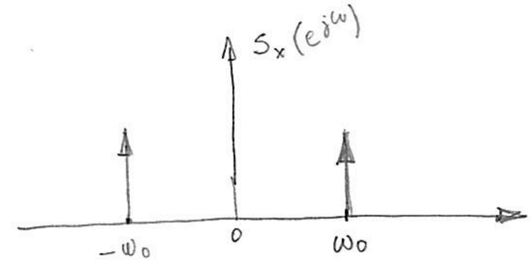
Nesse caso, $A(z) = 1 - 2\cos\omega_0 z^{-1} + z^{-2}$, cujas raízes são $z_1 = e^{-j\omega_0}$ e $z_2 = e^{j\omega_0}$




O FEP anula perfeitamente as raias presentes no sinal de entrada

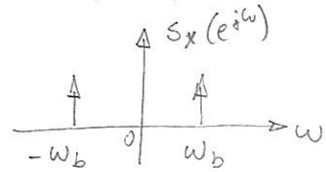
Densidade espectral de potência de $\sqrt{2}\cos(\omega_0 n + \varphi)$



Vimos anteriormente que podemos expressar o MSE de predição como:

$$E\{|e_f(n)|^2\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} S_x(e^{j\omega})\,|B(e^{j\omega})|^2 \cdot \left(1-2\rho_b\cos(\omega-\omega_b)+\rho_b^2\right)d\omega$$

- Se $\alpha_b$ é um zero no CRU, $\rho_b = 1$
- O termo $(1-2\rho_b\cos(\omega-\omega_b)+\rho_b^2) = 2-2\cos(\omega-\omega_b)$ só se anula em $\omega=\omega_b$. A integral, ou seja, $E\{|e_f(n)|^2\}$, só se anula se $S_x(e^{j\omega})$ for composto de raios espectrais situados exatamente em $|\omega| = \omega_b$:




<u>Observações:</u>

* O FEP funciona como um dispositivo de análise do sinal de entrada $x(n)$. Se $x(n)$ tiver um espectro discreto (composto de raios), então, caso tenha ordem suficiente, o FEP terá todos os seus zeros sobre o CRU (Círculo de Raio Unitário) nas freqüências (ângulos) desses raios. Nesse caso o erro é <u>nulo</u> e $x(n)$ é dito <u>predizível</u>. Se, por outro lado, $x(n)$ possuir um <u>espectro contínuo</u> para $\omega \in (-\pi, \pi)$, então, caso tenha ordem suficiente, o preditor irá <u>branquear</u> o sinal. Nesse caso, $x(n)$ é dito um sinal <u>regular</u>.

* Em qualquer caso de $x(n)$ regular, o FEP sempre analisa o sinal pelo método, i.e., segundo a hipótese, do modelo AR, mas somente quando de fato $x(n)$ for um processo AR é que ele conseguirá branquear.

# Predição Retrógrada de passo unitário

predição progressiva

$$x(n) \quad \overbrace{x(n-1) \quad x(n-2) \quad \dots \quad x(n-M+1) \quad x(n-M)}$$

$$\underbrace{x(n) \quad x(n-1) \quad x(n-2) \quad \dots \quad x(n-M+1)} \quad x(n-M)$$

predição retrógrada

A predição retrógrada linear consiste de estimar um valor passado do processo $x(n)$ a partir de uma combinação linear de amostras mais recentes do processo. No caso específico de passo de predição unitário, deseja-se uma estimativa de $x(n-M)$ a partir de $x(n), x(n-1), \dots, x(n-M+1)$:

$$\hat{x}(n-M) = \underline{w}_b^T \, \underline{x}(n)$$

em que:

$$\underline{x}(n) = [\, x(n) \quad x(n-1) \quad \dots \quad x(n-M+1) \,]^T$$

$$\underline{w}_b = [\, w_{b0} \quad w_{b1} \quad \dots \quad w_{bM-1} \,]^T$$

O erro de predição retrógrada é dado por

$$e_b(n) = x(n-M) - \hat{x}(n-M) \Rightarrow e_b(n) = x(n-M) - \underline{w}_b^T \underline{x}(n)$$

Minimizando $E\{|e_b(n)|^2\}$, caímos no mesmo cenário de filtragem ótima com $d(n) = x(n-M)$. Então:

$$\underline{w}_{b\,\text{ótimo}} = R_x^{-1} \, \underline{r}_x^B \quad , \text{ em que } \quad \underline{r}_x^B = E\{\underline{x}(n)\, x(n-M)\} = \begin{bmatrix} r_x(M) \\ r_x(M-1) \\ \vdots \\ r_x(1) \end{bmatrix}$$

Note que $\underline{w}_f = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 1 & 0 \\ & \iddots & & \vdots \end{bmatrix} \cdot \underline{w}_b$

# Filtro de Erro de Predição Retrógrado de passo unitário

$$e_b(n) = x(n-M) - \sum_{i=0}^{M-1} w_{b_i}\, x(n-i) = \sum_{i=0}^{M} u_i\, x(n-i)$$

em que: $$u_i = \begin{cases} -w_{b_i}, & i = 0, 1, \dots, M-1 \\ 1, & i = M. \end{cases}$$

$$e_b(n) = \underline{u}^T \underline{x}(n), \quad \text{onde} \quad \underline{x}(n) = [\,x(n)\ \ x(n-1)\ \ \dots\ \ x(n-M)\,]^T$$
$$\underline{u} = [-\underline{w}_b^T \ \ 1]^T$$

Função de transferência:

$$U(z) = \sum_{i=0}^{M} u_i z^{-i} = \left( \sum_{i=0}^{M-1} -w_{b_i} z^{-i} \right) + z^{-M}$$

$$x(n) \longrightarrow \boxed{\ U(z)\ } \longrightarrow e_b(n)$$

## Propriedades

i) O FEP retrógrado de passo unitário é um filtro branqueador

ii) Os zeros do FEP retrógrado têm módulo maior ou igual à unidade, ou seja, é um filtro de <u>fase máxima</u>

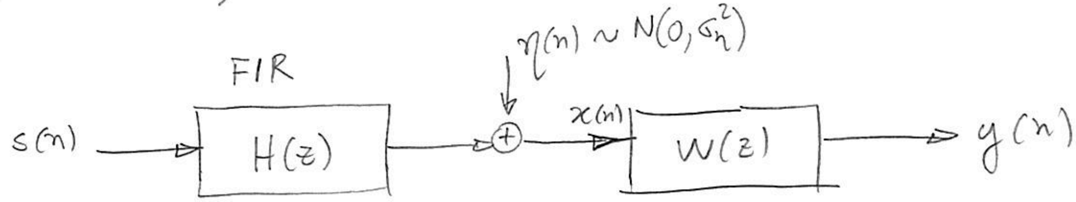
iii) Formulando a otimização do FEP retrógrado como um problema de minimização de variância com restrições lineares; temos:

$$\min E\left\{|e_b(n)|^2\right\} = \underline{u}^H R_x \underline{u}$$

s.a. $u_M = 1 \Rightarrow \underbrace{[0\ 0 \ldots 0\ 1]^T}_{\underline{c}} \underline{u} = 1$

$$\underline{u} = \frac{R_x^{-1}\,\underline{c}}{\underline{c}^T R_x^{-1}\,\underline{c}} \quad \text{com} \quad \underline{u} = \begin{bmatrix} -w_{b0} \\ -w_{b1} \\ \vdots \\ -w_{bM-1} \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \underline{X}(n) = \begin{bmatrix} x(n) \\ x(n-1) \\ \vdots \\ x(n-M) \end{bmatrix}$$

Imagine que se deseje estimar um processo $s(n)$, WSS, com média nula, variância $\sigma_s^2$ e composto por amostras i.i.d. (processo branco)




$$x(n) = \sum_{i=0}^{N-1} h_i\, s(n-i) + \eta(n)$$

Estimar $s(n)$ com atraso máximo a partir de $\underline{x}(n) = [x(n)\ x(n-1) \ldots x(n-M)]^T$

$$\underline{x}(n-M) = h_0 s(n-M) + \ldots + h_{N-1}\, s(n \underbrace{-M-N+1}) + \eta(n-M)$$

atraso máximo $(M+N-1)$

$$\boxed{d(n) = s(n-(M+N-1))}$$

$$\underline{W}_W = R_X^{-1} p_{xd} = R_X^{-1} E\{\underline{X}(n)\, s(n-(M+N-1))\} = R_X^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ h_{N-1}\sigma_s^2 \end{bmatrix} = R_X^{-1}\,\underline{c} \cdot h_{N-1}\sigma_s^2$$

com $\underline{X}(n) = [x(n)\ x(n-1) \ldots x(n-M)]^T$

$\underline{W}_W = [W_{W_0}\ W_{W_1} \ldots W_{W_M}]^T$

$$R_X^{-1}\,\underline{c} = \frac{\underline{W}_W}{h_{N-1}\sigma_s^2}$$

Substituindo na expressão dos coeficientes ótimos do FEP:

$$\underline{\mu} = \frac{\dfrac{\underline{W}_W}{h_{N-1}\sigma_s^2}}{\underline{c}^T \dfrac{\underline{W}_W}{h_{N-1}\sigma_s^2}} \Rightarrow \boxed{\underline{\mu} = \frac{\underline{W}_W}{W_{W_M}}}$$

Portanto, o FEP retrógrado de passo unitário é equivalente ao filtro de wiener de atraso máximo de mesma ordem, normalizado pelo seu último coeficiente. Isso significa que o FEP realiza uma estimação não-supervisionada de $s(n-(M+N-1))$ com um fator de escala $\frac{1}{W_{W_M}}$.

---

Relação entre o MMSE retrógrado e MMSE progressivo

MMSE Wiener: $J_{min} = \sigma_d^2 - \underline{W}^T \underline{p}_{xd} = \sigma_d^2 - \underline{p}_{xd}^T \underline{W}$

MMSE predição progressiva: $(d(n) = x(n))$

$$E\{|e_f(n)|^2\} = r_x(0) - \underline{r}_x^T \underline{w}_f = P$$

MMSE predição retrógrada: $(d(n) = x(n-M))$

$$E\{|e_b(n)|^2\} = r_x(0) - (\underline{r}_x^B)^T \underline{w}_b = r_x(0) - \begin{bmatrix} r_x(M) \\ \vdots \\ r_x(1) \end{bmatrix}^T \underbrace{\begin{bmatrix} w_{b0} \\ \vdots \\ w_{bM-1} \end{bmatrix}}_{\begin{bmatrix} 0 & & 1 \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ 1 & & 0 \end{bmatrix} \underline{w}_f} = r_x(0) - \begin{bmatrix} r_x(1) \\ \vdots \\ r_x(M) \end{bmatrix}^T \underbrace{\begin{bmatrix} w_{bM-1} \\ \vdots \\ w_{b0} \end{bmatrix}}_{\underline{w}_f}$$

$$= r_x(0) - \underline{r}_x^T \underline{w}_f = P$$

Portanto, o MMSE retrógrado e o MMSE progressivo têm o mesmo valor para preditores de mesma ordem.

# Algoritmo de Levinson-Durbin

Trata-se de um método para computar os coeficientes do FEP e a potência do erro de predição, o qual resolve as equações de Yule-Walker de maneira recursiva, tirando proveito da estrutura Toeplitz da matriz de autocorrelação $R_x$.

O algoritmo apresenta ordem de complexidade proporcional ao quadrado da ordem da matriz de autocorrelação. Algoritmos gerais de resolução de sistemas de equações lineares, como o método de eliminação de Gauss-Jordan, apresentam ordem de complexidade proporcional ao cubo da ordem da matriz de autocorrelação.

IDÉIA: Obter o preditor ótimo de M coeficientes a partir do preditor ótimo de M-1 coeficientes.

Ponto de partida:

- A solução do preditor progressivo ótimo satisfaz as equações de Wiener-Hopf para o caso em que $d(n) = x(n)$. Isto significa que

$$R_x^{(m)} \underline{w}_f^{(m)} = \underline{r}_x^{(m)} \rightarrow \underline{r}_x^{(m)} = \begin{bmatrix} r_x(1) \\ r_x(2) \\ \vdots \\ r_x(m) \end{bmatrix}$$

(O índice (m) denota a ordem das entidades envolvidas.)

- O MMSE do preditor é exatamente o valor do MSE avaliado na solução ótima (Wiener). No tópico anterior, vimos que

$$J_{min} = \sigma_d^2 - \underline{w}^T \underline{p}_{xd}.$$

No contexto de predição ($d(n) = x(n)$), $E\{|e_f^{(m)}(n)|^2\} = P_m = r_x(0) - (\underline{r}_x^{(m)})^T \underline{w}_f^{(m)}$

Podemos combinar as equações de Wiener-Hopf e a equação de MMSE de predição em um único sistema:

$$(1) \qquad \begin{bmatrix} r_x(0) & \left(\underline{r}_x^{(m-1)}\right)^T \\ \underline{r}_x^{(m-1)} & R_x^{(m-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -\underline{w}_f^{(m-1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{m-1} \\ \underline{0}^{(m-1)} \end{bmatrix}$$

Que é equivalente a $R_x^{(m)} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -\underline{w}_f^{(m-1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{m-1} \\ \underline{0}^{(m-1)} \end{bmatrix}$

Acrescentando mais uma equação ao sistema, temos a matriz aumentada:

$$(2) \qquad \left[\begin{array}{c|c} R_x^{(m)} & \underline{r}_{xB}^{(m)} \\ \hline \left(\underline{r}_{xB}^{(m)}\right)^T & r_x(0) \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} 1 \\ -\underline{w}_f^{(m-1)} \\ \hline 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} P_{m-1} \\ \underline{0}^{(m-1)} \\ \hline \Delta_m \end{array}\right] \Rightarrow R_x^{(m+1)} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -\underline{w}_f^{(m-1)} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{m-1} \\ \underline{0}^{(m-1)} \\ \Delta_m \end{bmatrix}$$

em que:

$$\underline{r}_{xB}^{(m)} = \left[ r_x(m) \quad r_x(m-1) \quad \dots \quad r_x(1) \right]^T$$

$$\Delta_m = \left(\underline{r}_{xB}^{(m)}\right)^T \begin{bmatrix} 1 \\ -\underline{w}_f^{(m-1)} \end{bmatrix} \qquad (3)$$

Seguindo o mesmo raciocínio, é possível chegar aos seguintes resultados para o preditor retrógrado de passo unitário:

$$(4) \qquad \underbrace{\begin{bmatrix} R_x^{(m-1)} & \underline{r}_{xB}^{(m-1)} \\ \left(\underline{r}_{xB}^{(m-1)}\right)^T & r_x(0) \end{bmatrix}}_{R_x^{(m)}} \begin{bmatrix} -\underline{w}_b^{(m-1)} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{0}^{(m-1)} \\ P_{m-1} \end{bmatrix}$$

$$R_x^{(m)} \cdot \begin{bmatrix} -\underline{w}_b^{(m-1)} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{0}^{(m-1)} \\ P_{m-1} \end{bmatrix}$$

$$(5)\quad \left[\begin{array}{c|c} r_x(0) & \left(\underline{r}_x^{m}\right)^T \\ \hline \underline{r}_x^{m} & R_x^{(m)} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} 0 \\ \hline -\underline{w}_b^{(m-1)} \\ 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} \Delta m \\ \hline \underline{0}^{(m-1)} \\ P_{m-1} \end{array}\right] \Rightarrow R_x^{(m+1)} \begin{bmatrix} 0 \\ -\underline{w}_b^{(m-1)} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta m \\ \underline{0} \\ P_{m-1} \end{bmatrix}$$

Multiplicando a equação (5) por $k_m \triangleq \dfrac{\Delta m}{P_{m-1}}$

$$(6)\quad R_x^{(m+1)} \begin{bmatrix} 0 \\ k_m \cdot \begin{bmatrix} -\underline{w}_b^{m-1} \\ 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_m^2 \cdot P_{m-1} \\ \underline{0}^{(m-1)} \\ \Delta m \end{bmatrix}$$

Fazendo (2)-(6) :

$$(7)\quad R_x^{(m+1)} \begin{bmatrix} 1 \\ -\underline{w}_f^{(m-1)} + k_m \underline{w}_b^{(m-1)} \\ -k_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1-k_m^2)\, P_{m-1} \\ \underline{0}^{(m-1)} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Pegando a equação (1) para a ordem $(m+1)$, temos $R_x^{(m+1)} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -\underline{w}_f^{(m)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_m \\ 0 \end{bmatrix}$.

Igualando termo a termo com a equação (7), chegamos a :

$$(8)\quad \underline{w}_f^{(m)} = \begin{bmatrix} \underline{w}_f^{(m-1)} \\ 0 \end{bmatrix} - k_m \begin{bmatrix} \underline{w}_b^{(m-1)} \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$(9)\quad P_m = (1-k_m^2)\, P_{m-1}$$

Como $\underline{w}_b^{(m-1)} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & & 1 & 0 \\ 0 & ⋰ & & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \underline{w}_f^{(m-1)}$, podemos abrir a equação (8) na forma escalar :

$$w_{fi}^{(m)} = \begin{cases} w_{fi}^{(m-1)} - k_m w_{f(m-i)}^{(m-1)} & , \; i = 1, \ldots, m-1 \\ k_m & , \; i = m \end{cases}$$

Finalmente, pegando a 1ª linha da equação (6):

$$\begin{bmatrix} r_x(0) & \dots & r_x(m) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ k_m \begin{bmatrix} -\underline{w}_b^{(m-1)} \\ 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = k_m^2 P_{m-1}$$

$$-\cancel{k_m} r_x(1) w_{f_{m-1}}^{(m-1)} - \cancel{k_m} r_x(2) w_{f_{m-2}}^{(m-1)} - \dots - \cancel{k_m} r_x(m-1) w_{f_1}^{(m-1)} + \cancel{k_m} r_x(m) = k_m^{\cancel{2}} P_{m-1}$$

Logo:

$$k_m = \frac{1}{P_{m-1}} \left[ r_x(m) - \sum_{i=1}^{m-1} w_{fi}^{(m-1)} r_x(m-i) \right] \qquad (11)$$

Estabelecidos estas relações, podemos apresentar o algoritmo de Levinson-Durbin:

Entradas: elementos de autocorrelação $r_x(0), r_x(1), \dots, r_x(M)$

Condição inicial: $P_0 = E\{|e_f^0(n)|^2\} = r_x(0)$

Para $m = 1, 2, \dots, M$, faça:

1) $k_m = \dfrac{1}{P_{m-1}} \left[ r_x(m) - \underbrace{\sum_{i=1}^{m-1} w_{fi}^{(m-1)} r_x(m-i)}_{} \right]$ → na primeira iteração este termo é nulo

2) $w_{fi}^{m} = \begin{cases} w_{fi}^{(m-1)} - k_m w_{f(m-i)}^{(m-1)}, & p/\ i = 1, 2, \dots, m-1 \\ k_m, & p\ i = m \end{cases}$

3) $P_m = P_{m-1}(1 - k_m^2) \qquad (|k_m| \leq 1)$

Ao término da M-ésima iteração, obtém-se o preditor progressivo de ordem M, $\underline{w}_f^{(M)} = [w_{f1}\ w_{f2}\ \dots\ w_{fM}]^T$

O preditor retrógrado pode ser obtido fazendo-se: $\underline{w}_b^{(M)} = [w_{fM}\ w_{fM-1}\ \dots\ w_{f1}]^T$

# Predição Linear em Treliça

Erro de predição progressiva a passo unitário:

$$e_f^{(m)}(n) = x(n) - \left(\underline{w}_f^{(m)}\right)^T \underline{x}^{(m)}(n-1) \qquad (12)$$

Erro de predição retrógrada a passo unitário:

$$e_b^{(m)}(n) = x(n-m) - \left(\underline{w}_b^{(m)}\right)^T \underline{x}^{(m)}(n) \qquad (13)$$

Reescrevendo a equação (8) para ordem $m+1$:

$$\underline{w}_f^{(m+1)} = \begin{bmatrix} \underline{w}_f^{(m)} \\ 0 \end{bmatrix} - k_{m+1} \begin{bmatrix} \underline{w}_b^{(m)} \\ -1 \end{bmatrix} \qquad (14)$$

Substituindo esse resultado na equação (12) para ordem $m+1$:

$$e_f^{(m+1)}(n) = x(n) - \left[\underline{w}_f^{(m+1)}\right]^T \underline{x}^{(m+1)}(n-1)$$

$$e_f^{(m+1)}(n) = \underbrace{x(n) - \begin{bmatrix} \underline{w}_f^{(m)} \\ 0 \end{bmatrix}^T \underline{x}^{(m+1)}(n-1)}_{e_f^{(m)}(n)} - k_{m+1} \underbrace{\begin{bmatrix} -\underline{w}_b^{(m)} \\ 1 \end{bmatrix}^T \underline{x}^{(m+1)}(n-1)}_{e_b^{(m)}(n-1)}$$

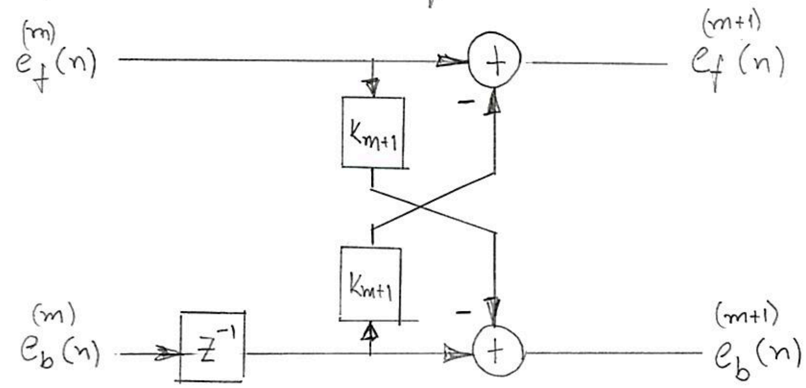
Portanto,

$$\boxed{e_f^{(m+1)}(n) = e_f^{(m)}(n) - k_{m+1}\, e_b^{(m)}(n-1)}$$

Usando a equação do erro retrógrado, obtemos:

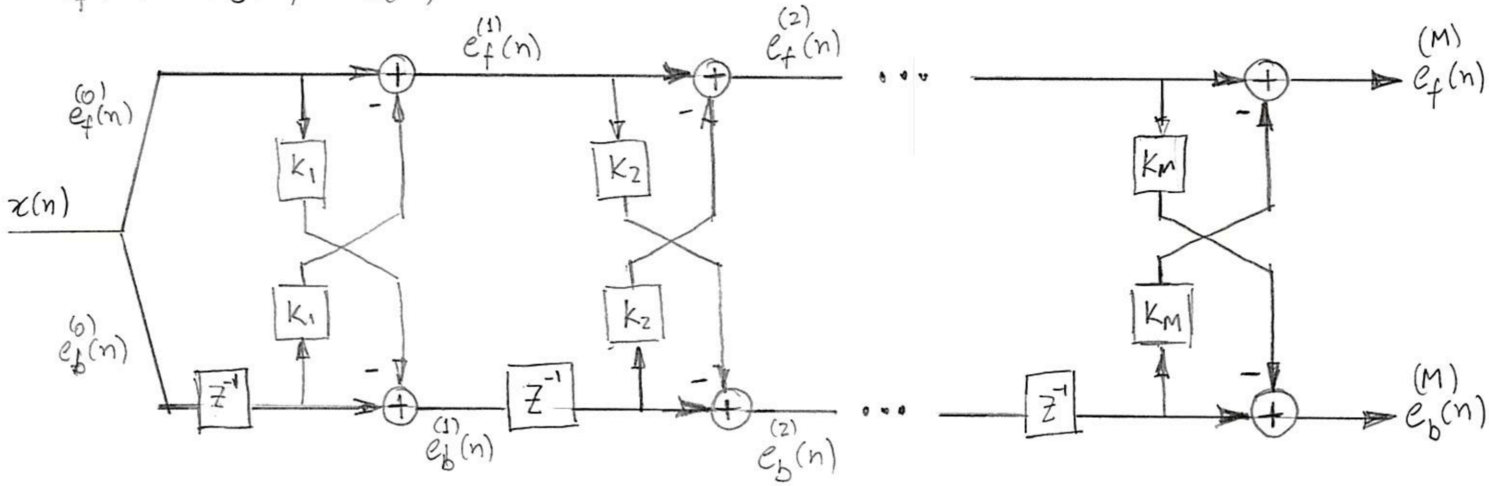
$$\boxed{e_b^{(m+1)}(n) = e_b^{(m)}(n-1) - k_{m+1}\, e_f^{(m)}(n)}$$

Essas equações podem ser representadas a partir do seguinte diagrama:




Concatenando blocos deste tipo, obtemos uma estrutura em treliça que calcula os erros de predição progressivo e retrógrado de ordem M:

$e_f^{(0)}(n) = e_b^{(0)}(n) = x(n)$




Note que

$$K_m = \frac{1}{P_{m-1}}\left[r_x(m) - \sum_{i=1}^{m-1} w_{fi}\, r_x(m-i)\right] = \frac{E\left\{\overbrace{\left(x(n) - \sum_{i=1}^{m-1} w_{fi}\, x(n-i)\right)}^{e_f^{(m-1)}(n)} x(n-m)\right\}}{E\left\{\left|e_f^{(m-1)}(n)\right|^2\right\}}$$

$$k_m = \frac{E\left\{e_f^{(m-1)}(n)\, x(n-m)\right\}}{E\left\{\left|e_f^{(m-1)}(n)\right|^2\right\}}$$

Os coeficientes $k_m$ são conhecidos como coeficientes de correlação parcial.

# Predição Progressiva a passo arbitrário

Estimar $x(n)$ a partir de $x(n-L), x(n-L-1), \ldots, x(n-L-M+1)$ com $L = 1, 2, \ldots$ sendo o passo de predição.

$$\hat{x}(n) = w_{f0}\, x(n-L) + w_{f1}\, x(n-L-1) + \ldots + w_{f\,M-1}\, x(n-L-M+1)$$

$$= \sum_{i=0}^{M-1} w_{fi}\, x(n-L-i) = \begin{bmatrix} w_{f0} \\ \vdots \\ w_{f\,M-1} \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} x(n-L) \\ \vdots \\ x(n-L-M+1) \end{bmatrix} = \underline{w}_f^T \underline{x}(n-L)$$

## Preditor ótimo:

$$\underline{w}_f = E\left\{\underline{x}(n-L) \cdot \underline{x}^T(n-L)\right\}^{-1} E\left\{\underline{x}(n-L)\, x(n)\right\} = \boxed{R_x^{-1}\, \underline{r}_x(L)}$$

em que $\underline{r}_x(L) = \begin{bmatrix} r_x(L) \\ r_x(L+1) \\ \vdots \\ r_x(L+M-1) \end{bmatrix}$

## Erro de predição:

$$e_f(n) = x(n) - \hat{x}(n) = x(n) - \underline{w}_f^T \underline{x}(n-L)$$

considerando o vetor $\underline{x}(n) = \left[x(n)\ x(n-1) \ldots x(n-L) \ldots x(n-L-M+1)\right]^T$:

$$e_f(n) = [1\ \underbrace{0\ 0 \ldots 0\ 0}_{L-1 \text{ zeros}}\ -\underline{w}_f^T]\, \underline{x}(n) \Rightarrow e_f(n) = \underline{a}^T \underline{x}(n)$$

$$x(n) \longrightarrow \underset{\text{FEP}}{\boxed{A(z)}} \longrightarrow e_f(n) \qquad A(z) = 1 - w_{f0} z^{-L} - \ldots - w_{f\,M-1} z^{-L-M+1}$$

# Predição Retrógrada a passo arbitrário

Estimar $x(n-L-M+1)$ a partir de $x(n), x(n-1), \ldots, x(n-M+1)$, com $L = 1, 2, \ldots$ sendo o passo de predição

$$\hat{x}(n-L-M+1) = w_{b_0} x(n) + w_{b_1} x(n-1) + \ldots + w_{b_{M-1}} x(n-M+1)$$

$$= \sum_{i=0}^{M-1} w_{b_i} x(n-i) = \begin{bmatrix} w_{b_0} \\ w_{b_1} \\ \vdots \\ w_{b_{M-1}} \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} x(n) \\ x(n-1) \\ \\ x(n-M+1) \end{bmatrix} = \underline{w}_b^T \underline{X}(n)$$

## Preditor ótimo:

$$\underline{w}_b = E\left\{ \underline{X}(n) \underline{X}^T(n) \right\}^{-1} E\left\{ \underline{X}(n) x(n-L-M+1) \right\} = R_x^{-1} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} r_x(L+M-1) \\ r_x(L+M-2) \\ \vdots \\ r_x(L) \end{bmatrix}}_{\underline{r}_x^B(L)} =$$

$$\boxed{\underline{w}_b = R_x^{-1} \underline{r}_x^B(L)}$$

## Erro de Predição

$$e_b(n) = x(n-L-M+1) - \hat{x}(n-L-M+1) = x(n-L-M+1) - \underline{w}_b^T \underline{X}(n)$$

Expandindo o vetor $\underline{X}(n)$ para $\underline{X}(n) = \left[ x(n) \; x(n-1) \ldots x(n-L-M+1) \right]^T$:

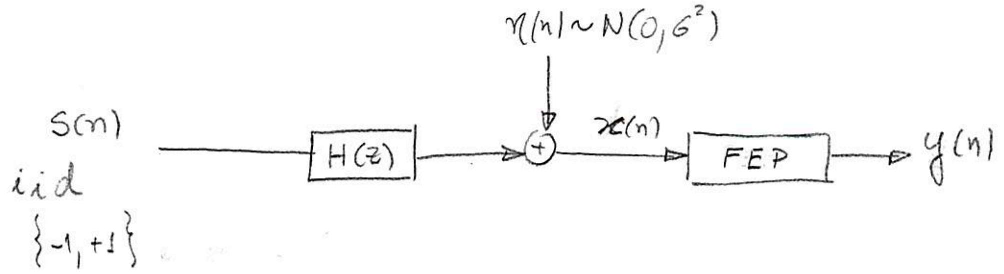
$$e_b(n) = \Big[ -\underline{w}_b^T \; \underbrace{0 \; 0 \ldots 0 \; 0}_{L-1 \text{ zeros}} \; 1 \Big] \underline{X}(n) = \underline{u}^T \underline{x}(n)$$

$$U(z) = -w_{b_0} - w_{b_1} z^{-1} - \ldots - w_{b_{M-1}} z^{-M+1} + z^{-(L+M-1)}$$

FEP

$$x(n) \longrightarrow \boxed{U(z)} \longrightarrow e_b(n)$$

# Exemplo: Equalização de Canais de Comunicação




$P_s(-1) = P_s(+1) = 0{,}5$

$$H(z) = h_0 + h_1 z^{-1} + \dots + h_{N-1} z^{-N+1}$$

P/ $N = 5$ :

$$x(n) = h_0 s(n) + h_1 s(n-1) + h_2 s(n-2) + h_3 s(n-3) + h_4 s(n-4) + \eta(n)$$
$$x(n-1) = h_0 s(n-1) + h_1 s(n-2) + h_2 s(n-3) + h_3 s(n-4) + h_4 s(n-5) + \eta(n-1)$$
$$x(n-2) = h_0 s(n-2) + h_1 s(n-3) + h_2 s(n-4) + h_3 s(n-5) + h_4 s(n-6) + \eta(n-2)$$
$$x(n-3) = h_0 s(n-3) + h_1 s(n-4) + h_2 s(n-5) + h_3 s(n-6) + h_4 s(n-7) + \eta(n-3)$$
$$x(n-4) = h_0 s(n-4) + h_1 s(n-5) + h_2 s(n-6) + h_3 s(n-7) + h_4 s(n-8) + \eta(n-4)$$
$$x(n-5) = h_0 s(n-5) + h_1 s(n-6) + h_2 s(n-7) + h_3 s(n-8) + h_4 s(n-9) + \eta(n-5)$$

## FEP Progressivo:

Passo um ($L=1$) e $M=2$ : $e_f(n) = x(n) - w_{f0} x(n-1) - w_{f1} x(n-2)$

Idealmente, se o FEP eliminar toda a redundância: $e_f(n) = h_0 s(n) + \eta'(n)$

- Passo 2 ($L=2$) e $M=2$: $e_f(n) = x(n) - w_{f0} x(n-2) - w_{f1} x(n-3)$

  Idealmente: $e_f(n) = h_0 s(n) + h_1 s(n-1) + \eta'(n)$

- Passo 3 ($L=3$) e $M=2$: $e_f(n) = x(n) - w_{f0} x(n-3) - w_{f1} x(n-4)$

  Idealmente: $e_f(n) = h_0 s(n) + h_1 s(n-1) + h_2 s(n-2) + \eta'(n)$

- Passo 4 ($L=4$) e $M=2$ : $e_f(n) = x(n) - w_{f0} x(n-4) - w_{f1} x(n-5)$

  Idealmente $e_f(n) = h_0 s(n) + h_1 s(n-1) + h_2 s(n-2) + h_3 s(n-3) + \eta'(n)$

Generalizando, idealmente o erro de predição progressiva de passo L resulta em

$$e_f(n) = h_0\, s(n) + h_1\, s(n-1) + \dots + h_{L-1}\, s(n-L+1) + \eta'(n)$$

O FEP atua no sentido de manter a resposta ao impulso do canal, eliminando seus coeficientes finais.

## FEP Retrógrado:

- Passo unitário ($L=1$) e $M=2$: $e_b(n) = x(n-2) - w_{b_0}\, x(n) - w_{b_1}\, x(n-1)$

  Idealmente: $e_b(n) = h_4\, s(n-6) + \eta'(n)$

- Passo 2 ($L=2$) e $M=2$: $e_b(n) = x(n-3) - w_{b_0}\, x(n) - w_{b_1}\, x(n-1)$

  Idealmente: $e_b(n) = h_3\, s(n-6) + h_4\, s(n-7) + \eta'(n)$

- Passo 3 ($L=3$) e $M=2$: $e_b(n) = x(n-4) - w_{b_0}\, x(n) - w_{b_1}\, x(n-1)$

  Idealmente: $e_b(n) = h_2\, s(n-6) + h_3\, s(n-7) + h_4\, s(n-8) + \eta'(n)$

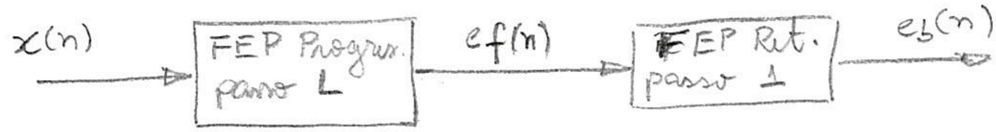
E assim por diante. Generalizando, temos

$$e_b(n) = h_{N-L}\, s(n-N-M+1) + \dots + h_{N-1}\, s(n-N-M-L+2) + \eta'(n)$$

Note que o FEP retrógrado atua no sentido de manter a resposta ao impulso do canal, eliminando seus coeficientes iniciais. Quanto maior o passo de predição, menos coeficientes são eliminados.

# Cascata de FEP's

1) FEP Progressivo de passo arbitrário seguido de FEP Retrógrado de passo unitário:




Preditor progressivo com $M_f$ coeficientes e retrógrado de $M_b$ coeficientes. Considerando o caso ideal em que toda a redundância é removida, temos:

$$e_f(n) = h_0 s(n) + h_1 s(n-1) + \dots + h_{L-1} s(n-L+1) + \eta'(n)$$

$$\vdots$$

$$e_f(n-M_b+1) = h_0 s(n-M_b+1) + h_1 s(n-M_b) + \dots + h_{L-1} s(n-M_b-L+2) + \eta'(n-M_b+1)$$

$$e_f(n-M_b) = h_0 s(n-M_b) + h_1 s(n-M_b-1) + \dots + h_{L-1} s(n-M_b-L+1) + \eta'(n-M_b)$$

O erro retrógrado é dado por:

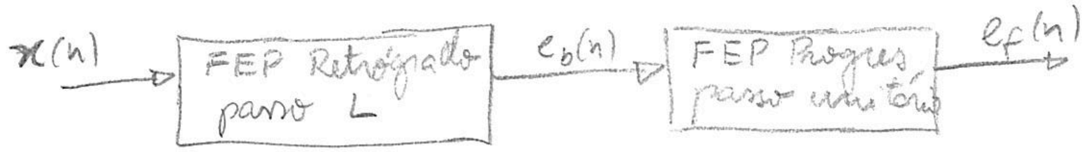
$$e_b(n) = e_f(n-M_b) - \underline{w}_b^T \begin{bmatrix} e_f(n) \\ \vdots \\ e_f(n-M_b+1) \end{bmatrix}$$

Dessa forma, considerando que o FEP retrógrado elimina toda redundância entre $e_f(n-M_b)$ e as entradas do preditor, temos

$$\boxed{e_b(n) = h_{L-1} s(n-M_b-L+1) + \eta'(n-M_b)}$$

A cascata tende a recuperar o sinal $s(n)$ multiplicado pelo coeficiente $(L-1)$ do canal e com um atraso $(M_b+L-1)$, ou seja, que depende do passo de predição progressiva e do número de coeficientes do preditor retrógrado.

2) FEP Retrógrado de passo arbitrário seguido de FEP Progressivo de passo unitário.




Preditor retrógrado com $M_b$ coeficientes e progressivo de $M_f$ coeficientes. Novamente considerando o caso ideal, o erro retrógrado é dado por:

$$e_b(n) = h_{N-L}\, s(n-N-M_b+1) + \ldots + h_{N-1}\, s(n-N-M_b-L+2) + \eta'(n)$$

$$e_b(n-1) = h_{N-L}\, s(n-N-M_b) + \ldots + h_{N-1}\, s(n-N-M_b-L+1) + \eta'(n-1)$$

$$\vdots$$

$$e_b(n-M_f) = h_{N-L}\, s(n-N-M_b-M_f+1) + \ldots + h_{N-1}\, s(n-N-M_b-M_f-L+2) + \eta'(n-M_f)$$

O erro de predição progressivo é obtido a partir da diferença entre $e_b(n)$ e a combinação linear de $e_b(n-1)$, $e_b(n-2), \ldots, e_b(n-M_f)$. Assim, considerando que idealmente o FEP progressivo elimina toda a redundância, temos que a saída da cascata é:

$$\boxed{e_f(n) = h_{N-L}\, s(n-N-M_b+1) + \eta'(n)}$$

Nesse caso, a cascata gera uma estimativa atrasada de $s(n)$, com fator de escala $h_{N-L}$ e atraso $(N+M_b-1)$. Note que o atraso não depende do passo de predição do primeiro estágio da cascata, como ocorre na cascata Progressiva-Retrógrada.