A Linguagem Formalizada L

Expressões de L: São sequências de comprimento finito, de símbolos dos seguintes tipos:

A- Variáveis - letras minúsculas de ‘u’ a ‘z’ com ou sem índices inferiores

B - Constantes

i) Constantes Lógicas:
-, $\vee$, (,), &, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, $\exists$

ii) Constantes não-lógicas

a)Predicados - letras maiúsculas com ou sem índices inferiores e/ou superiores

b)Constantes Individuais - letras minúsculas de ‘a’ a ‘t’ com ou sem índices inferiores

Predicado de grau n - predicado tendo como índice superior o numeral para o inteiro positivo n

Letra Sentencial - é um predicado sem índice superior

Símbolo Individual - é uma variável ou uma constante individual

Fórmula Atômica - Expressão formada por uma letra sentencial ou por um predicado de grau n seguido de n símbolos individuais

Fórmula - Expressão que é uma fórmula atômica ou é construída a partir de uma ou mais fórmulas atômicas através da aplicação de um número finito de vezes das seguintes regras:

(Regras de Formação:)

i) Se Φ é uma fórmula, então **-**Φ é uma fórmula

ii) Se Φ e Ψ são fórmulas então:
$(\Phi \vee \Psi)$, $(\Phi \,\&\, \Psi)$, $(\Phi \rightarrow \Psi)$ e $(\Phi \leftrightarrow \Psi)$ são fórmulas

iii) Se Φ é uma fórmula e α é uma variável então $(\alpha)\Phi$ e $(\exists\alpha)\Phi$ são fórmulas.

Uma **ocorrência** de uma variável α numa fórmula Φ pode ser **ligada** ou **livre**

Uma **sentença** é uma fórmula onde nenhuma variável ocorre livre.

Terminologia Sintática Adicional

-Φ é chamada a **negação** de Φ

(Φ & Ψ) é uma **conjunção**, sendo Φ e Ψ os **termos conjuntivos**

(Φ ∨ Ψ) é uma **disjunção**, sendo Φ e Ψ os **termos disjuntivos**

(Φ → Ψ) é um **condicional**, sendo Φ o **antecedente** e Ψ o **consequente**

(Φ ↔ Ψ) é um **bicondicional**

(α)Φ é uma **generalização universal** de Φ em relação a α.

(∃α)Φ é uma **generalização existencial** de Φ em relação a α.

Os símbolos &, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ são chamados de **conectivos**

As expressões $(\exists\alpha)$ e (α) são chamadas respectivamente de **quantificador existencial** e **quantificador universal**, onde α é uma variável

Uma fórmula que não é uma fórmula atômica é chamada de **fórmula geral** se ela começa por um quantificador universal ou existencial; de outra maneira ela é chamada de **fórmula molecular**

Uma sentença é uma **sentença do cálculo sentencial (CS)** se ela não contém nenhum símbolo individual

Uma **ocorrência de uma fórmula** Y numa fórmula Φ pode ser **livre** ou **ligada**

A **ordem** de uma fórmula é dada por:

i) Fórmulas atômicas são de ordem 1

ii) Se uma fórmula Φ é de ordem n, então $-\Phi$; $(\alpha)\Phi$; $(\exists\alpha)\Phi$ são de ordem n+1

iii) Se o máximo das ordens das fórmulas Φ e Ψ é n, então $(\Phi \vee \Psi)$, $(\Phi \,\&\, \Psi)$, $(\Phi \rightarrow \Psi)$ e $(\Phi \leftrightarrow \Psi)$ são de ordem n+1

Para qualquer fórmula Φ, variável α e símbolo individual β, F a/b é o resultado da substituição de todas as ocorrências livres de α em Φ por β.

Interpretação

Dar uma interpretação à linguagem L consiste em:

1) Especificar um conjunto D não-vazio como sendo o universo de discurso

2) Atribuir **a cada** constante individual um elemento de D

3) Atribuir **a cada** predicado de ordem n uma relação n-ária entre elementos de D

4) Atribuir **a cada** letra sentencial um valor-verdade: **Verdadeiro ou Falso**

Verdade

A questão é determinar se:
"Φ é verdadeira sob a interpretação I"

Considerando a linguagem L desprovida de quantificadores e sendo dados uma interpretação I e uma sentença Φ de L:

1) Se Φ é uma letra sentencial, a interpretação I atribui a ela "verdadeiro" ou "falso"

2) Se Φ é atômica e não é letra sentencial, então F **é verdadeira sob I** se e somente se as constantes individuais que aparecem em Φ são relacionadas na ordem dada pela relação que que I atribui ao predicado de Φ

3) Se $\Phi = -\Psi$ então F **é verdadeira sob I** se e somente se Ψ não é verdadeira sob I

4) Se $\Phi = (\Psi \vee X)$ então F **é verdadeira sob I** se e somente se Ψ é verdadeira sob I **ou** X é verdadeira sob I **ou** ambos

5) Se $\Phi = (\Psi \;\&\; X)$ então F **é verdadeira sob I** se e somente se Ψ é verdadeira sob I **e** X é verdadeira sob I

6) Se $\Phi = (\Psi \to X)$ então F **é verdadeira sob I** se e somente se Ψ não é verdadeira sob I **ou** X é verdadeira sob I **ou** ambos

7) Se $\Phi = (\Psi \leftrightarrow X)$ então F **é verdadeira sob I** se e somente se Ψ e X são **ambas** verdadeiras sob I ou Ψ e X são **ambas** falsas sob I

No caso de sentenças que contém quantificadores, é necessário o seguinte conceito:

Sejam I e I’ duas interpretações de L e seja β uma constante individual. Diz-se que I é uma β-variante de I’ se e somente se I e I’ são a mesma ou diferem somente na atribuição que fazem para a constante β.

Pode-se agora complementar a definição anterior com os seguintes itens:

8) Se $\Phi = (\alpha)\Psi$ então F **é verdadeira sob I** se e somente se $\Psi\alpha/\beta$ é verdadeira sob todo β-variante de I

9) Se $\Phi = (\exists\ \alpha)\Psi$ então F **é verdadeira sob I** se e somente se $\Psi\alpha/\beta$ é verdadeira sob pelo menos um β-variante de I

Validade, Consequência e Consistência

Uma sentença Φ **é válida** se e somente se ela é verdadeira sob toda interpretação

Uma sentença Φ **é uma consequência** de um conjunto de sentenças Γ se e somente se não existir nenhuma interpretação sob a qual todas as sentenças de Γ sejam verdadeiras e Φ seja falsa

Um conjunto de sentenças Γ **é consistente** se e somente se existir uma interpretação sob a qual todas as sentenças de Γ sejam verdadeiras.

Sentenças Tautológicas

Uma atribuição U de valores-verdade a todas as sentenças de L é dita **normal** se e somente se para cada sentença Φ de L:

1) U atribui **um e um só** valor verdade a Φ

2) Se $\Phi = -\Psi$ então **U atribui valor verdadeiro a** F se e somente se U não atribui valor verdadeiro a Ψ

3) Se $\Phi = (\Psi \vee X)$ então **U atribui valor verdadeiro a** F se e somente se U atribui valor verdadeiro a Ψ **ou** U atribui valor verdadeiro a X **ou** ambos

4) Se $\Phi = (\Psi \ \& \ X)$ então **U atribui valor verdadeiro a** F se e somente se U atribui valor verdadeiro a Ψ **e** U atribui valor verdadeiro a X

5) Se $\Phi = (\Psi \rightarrow X)$ então **U atribui valor verdadeiro a** F se e somente se U atribui valor verdadeiro a Ψ **ou** U não atribui valor verdadeiro a X **ou** ambos

6) Se $\Phi = (\Psi \leftrightarrow X)$ então **U atribui valor verdadeiro a** F se e somente se U atribui valor verdadeiro a ambos **ou** U não atribui valor verdadeiro a ambos

Toda atribuição normal pode ser feita da seguinte maneira:

* Fazer uma atribuição arbitrária para as sentenças atômicas e gerais de L

* Estender a atribuição para as sentenças moleculares segundo as regras anteriores

Uma sentença F **é tautológica** se e somente se **toda** atribuição normal de valores-verdade atribui a ela o valor-verdade verdadeiro.

Uma sentença Φ é uma **consequência tautológica** de um conjunto de sentenças Γ se e somente se toda atribuição normal que atribui verdadeiro a todas as sentenças de Γ atribui também verdadeiro à sentença Φ

Um conjunto de sentenças Γ é **funcional-veritativo consistente** se e somente se existe ao menos uma atribuição normal que atribua verdadeiro a todas as sentenças de Γ

Quais são as sentenças tautológicas?

I) Toda sentença Φ que não contém quantificadores é tautológica se e somente se ela é válida

I')Uma sentença do CS é tautológica se e somente se ela é válida

Uma sentença Φ é uma **instância substitutiva** de uma sentença do CS Ψ se e somente se Φ é o resultado da reposição das letras sentenciais de Ψ por sentenças, a mesma letra sendo reposta em todas as suas ocorrências pela mesma sentença

II) Dada uma sentença Φ, Φ é tautológica se e somente se existir uma sentença Ψ do CS tautológica tal que Φ seja uma instância substitutiva de Ψ

Para saber se uma sentença dada é tautológica:

a) Obter uma sentença do CS da qual a sentença dada é uma instância substitutiva.

b) Verificar se a sentença do CS obtida é tautológica

A verificação proposta no item b) é direta:
Tabela-Verdade

A tabela-verdade é um procedimento sistemático e garantido para detectar se qualquer sentença do CS é ou não uma tautologia.

Para resolver a questão a) são necessárias duas definições:

Uma sentença Φ é um **componente básico funcional-veritativo** de uma sentença Ψ se e somente se Φ é atômica ou geral e ocorre livre em Ψ ao menos uma vez.

Uma sentença Φ do CS é **associada** a uma sentença Ψ se Φ é obtida de Ψ colocando-se ocorrências de letras sentenciais em todas as ocorrências livres em Ψ de seus componentes básicos funcionais-veritativos, sendo que componentes distintos devem ser repostos por letras distintas e todas as ocorrências livres do mesmo componente devem ser repostas pela mesma letra

Portanto, se $\phi \in$ CS e é associada a Ψ:

III) Ψ é tautológica se e somente se Φ é tautológica

Derivações no CS:

Uma **derivação no CS** é uma sequência finita de linhas consecutivamente numeradas cada uma consistindo de uma sentença do CS junto com uma lista de números (os números-premissa daquela linha). Esta sequência é construída segundo as seguintes regras:

P - Introdução de Premissas
Qualquer sentença do CS pode ser introduzida numa linha, sendo tomado como único número-premissa o número da própria linha.

MP - Modus Ponens
Ψ pode ser introduzida numa linha, se Φ e $(\Phi \rightarrow \Psi)$ aparecem em linhas precedentes; os números-premissa serão todos os números-premissa das linhas precedentes.

MT - Modus Tolens
Φ pode ser introduzida numa linha se Ψ e ($-\Phi \rightarrow -\Psi$) aparecem em linhas precedentes; os números-premissa da nova linha serão aqueles das linhas precedentes.

C - Condicionalização
($\Phi \rightarrow \Psi$) pode ser introduzida numa linha se Ψ aparece numa linha precedente. Os números-premissa serão aqueles da linha precedente, exceto, se desejado, o número da linha onde aparece a sentença Φ.

D - Intercâmbio Definicional
Se Ψ é obtida de Φ pela reposição de uma ocorrência de uma sentença X em Φ por uma ocorrência de uma sentença à qual X é definicionalmente equivalente, então Ψ pode ser introduzida numa linha, se Φ aparece numa linha precedente; os números-premissa da nova linha serão os da linha precedente.

Equivalências definicionais:

$(\Phi \vee \Psi)$ com $(-\Phi \rightarrow \Psi)$

$(\Phi \,\&\, \Psi)$ com $-(\Phi \rightarrow -\Psi)$

$(\Phi \leftrightarrow \Psi)$ com $(\Phi \rightarrow \Psi)\&(\Psi \rightarrow \Phi)$

Uma derivação do CS, na qual Φ apareça na última linha, tendo como números-premissa os números das linhas de sentenças que pertençam a um conjunto Γ, é chamada de "**derivação do CS de** F **a partir de** G" ou "**uma prova de** F **a partir de** G"

Neste caso diz-se que F **é CS-derivável do conjunto** G

Uma sentença Φ do CS é um **teorema do CS** se e somente se Φ é CS-derivável do conjunto vazio de sentenças.

Regras Derivadas

TH - Teorema

Qualquer sentença do CS que é uma instância substitutiva de um teorema do CS previamente provado pode ser introduzida numa linha como conjunto vazio de números-premissa.

Em geral, Ψ pode ser introduzida numa linha se $\Phi_1, \Phi_2, ..., \Phi_n$ aparecem em linhas precedentes e o condicional:

$$(\Phi_1 \rightarrow (\Phi_2 \rightarrow \ldots (\Phi_n \rightarrow \Psi) \ldots))$$

é uma instância substitutiva de um teorema do CS previamente provado; os números-premissa da nova linha serão os das linhas precedentes.

R - Reposição

A sentença Φ pode ser introduzida numa linha se Ψ aparece numa linha precedente e Φ é obtida a partir de Ψ pela reposição de uma ocorrência de Θ em Ψ por uma ocorrência de X, desde que $X \leftrightarrow \Theta$ ou $\Theta \leftrightarrow X$ seja uma instância substitutiva de um teorema do CS previamente provado. Os números-premissa da nova linha serão os mesmos da linha onde aparece X

Correção: (meta-teorema)
Uma sentença que aparece numa linha de derivação do CS construída de acôrdo com as regras acima é uma consequência tautológica das premissas daquela linha.

Se o conjunto de premissas numa linha é vazio então a sentença é uma tautologia.

O fato de não se obter uma derivação não significa que a sentença não seja tautológica. Sempre é possível utilizar a tabela-verdade.

Pode-se mostrar também:
Completude:
Se uma sentença do CS é consequência tautológica de um conjunto Γ (de sentenças do CS), então a sentença dada é CS-derivável a partir de Γ

Regras de Inferência para L

Uma **derivação** é uma sequência finita de linhas consecutivamente numeradas, cada uma consistindo de uma sentença e de um conjunto de números (os números-premissa da linha), sendo a sequência construída segundo as seguintes regras:

P - Introdução de Premissas
Idêntica à regra P do CS

T - Inferência Tautológica
Qualquer sentença pode ser introduzida numa linha se ela é uma consequência tautológica de um conjunto de sentenças que aparece em linhas precedentes; os números-premissa serão os mesmos das linhas precedentes

C - Condicionalização
Idêntica à regra C do CS

IU - Instanciação Universal
A sentença $\Phi\alpha/\beta$ (sendo Φ uma fórmula, α uma variável e β uma constante individual) pode ser introduzida numa linha se $(\alpha)\Phi$ aparece numa linha precedente; os números-premissa serão os mesmos da linha precedente

GU - Generalização Universal
A sentença $(\alpha)\Phi$ pode ser introduzida numa linha se $\Phi\alpha/\beta$ aparece numa linha precedente e β não ocorre nem em Φ nem em nenhuma premissa daquela linha precedente.

E - Quantificação Existencial
A sentença $(\exists\alpha)\Phi$ pode ser introduzida numa linha se $-(\alpha)-\Phi$ aparece numa linha precedente (e vice-versa); os números-premissa serão os mesmos da linha precedente.

Uma derivação na qual uma sentença Φ apareça na última linha e tal que todas as premissas daquela linha pertençam a um conjunto Γ é chamada uma **derivação de** F **a partir de** G

Uma sentença Φ é **derivável a partir de um conjunto** G **de sentenças** se e somente se existe uma derivação de Φ a partir de Γ

Conclusão:
Dado que qualquer linha de uma derivação só pode ter um número finito de premissas, pode-se afirmar que se uma sentença é derivável a partir de um conjunto infinito de sentenças Γ, então ela é derivável a partir de algum sub-conjunto finito de Γ (**compacidade**).

Regras Abreviadas

GE - Generalização Existencial
A sentença $(\exists\alpha)\Phi$ pode ser introduzida numa linha se $\Phi\alpha/\beta$ aparece numa linha precedente. Os números-premissa da nova linha serão os mesmos da linha precedente.

IE - Instanciação Existencial
Supondo que:
i)$(\exists\alpha)\Psi$ aparece numa linha i;
ii)$\Psi\alpha/\beta$ aparece e é premissa numa linha posterior j;
iii)Φ aparece numa linha posterior k;
iv)a constante β não ocorre nem em Φ, nem em Ψ, nem em nenhuma premissa da linha k, além de $\Psi\alpha/\beta$;
Então Φ pode ser introduzida numa nova linha. Os números-premissa da nova linha serão os mesmos da linha i e k exceto o número j.

Q - Intercâmbio de Quantificadores
A sentença $-(\exists\alpha)\Phi$ pode ser introduzida numa linha se $(\alpha)-\Phi$ aparece numa linha precedente e vice-versa. Identicamente para os pares de sentença:

$$(\exists\alpha)-\Phi \quad \text{e} \quad -(\alpha)\Phi$$
$$-(\exists\alpha)-\Phi \quad \text{e} \quad (\alpha)\Phi$$
$$(\exists\alpha)\Phi \quad \text{e} \quad -(\alpha)-\Phi$$

Os números-premissa da nova linha serão os mesmos da linha precedente.

Metateoremas

Definições e notações:

Φ é uma fórmula

$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ são variáveis distintas

$\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n$ são constantes não necessariamente distintas

$\Phi^{\alpha_1\ \alpha_2\ ...\ \alpha_n}_{\beta_1\ \beta_2\ ...\ \beta_n}$ é o resultado da substituição de todas as ocorrências livres de $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ em Φ por ocorrências de $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n$.

Uma fórmula F **é o fechamento de uma fórmula** Y se e somente se:
Φ é uma sentença e
$\Phi=\Psi$ ou Φ é o resultado de prefixar Ψ por uma cadeia de quantificadores universais.

Símbolo: $\Vdash$

Para qualquer fórmula Φ, $\Vdash \Phi$ se e somente se todo fechamento de Φ é um teorema da lógica.

Para qualquer fórmula Φ e Ψ, F **é equivalente a** Y se e somente se $\Vdash \Phi \leftrightarrow \Psi$.

Uma fórmula Φ está na sua **forma normal prenex** se e somente se ela não tem quantificadores ou ela consiste de uma cadeia de quantificadores seguida de uma fórmula sem quantificadores.

Reposição:

Se Φ' é idêntica a Φ exceto por conter uma ocorrência de Ψ' onde Φ contém uma ocorrência de Ψ e ainda $\Vdash \Psi \leftrightarrow \Psi'$ então:

a) $\Vdash \Phi \leftrightarrow \Phi'$

b) $\Vdash \Phi$ se e somente se $\Vdash \Phi'$

Negação:

Seja Φ uma fórmula que não contém "$\rightarrow$" nem "$\leftrightarrow$" e uma fórmula Φ' que é obtida de Φ da seguinte forma:

- Intercambiando & e $\vee$;
- Intercambiando quantificadores existenciais e universais;
- Substituindo fórmulas atômicas por suas negações.

Então Φ' é equivalente a $-\Phi$.

Dualidade:

Se $\models \Phi \leftrightarrow \Psi$ e os conectivos "$\rightarrow$" e "$\leftrightarrow$" não ocorrem nem em Φ nem em Ψ;
Se Φ^* e Ψ^* são obtidas a partir de Φ e Ψ pelos intercâmbios:
& e $\vee$
(•) e (∃•)
Então:
$\models \Phi^* \leftrightarrow \Psi^*$
Analogamente:
Se $\models \Phi \rightarrow \Psi$ então $\models \Psi^* \rightarrow \Phi^*$

Forma Normal Prenex:

Para qualquer fórmula Φ, existe uma fórmula Ψ, na forma normal prenex, que é equivalente a Φ.

Procedimentos para obtenção da Forma Normal Prenex

a) Eliminar "$\leftrightarrow$" e " $\rightarrow$" utilizando equivalências definicionais.

b) Aplicar o teorema da negação de modo que os sinais de negação apareçam somente antes de letras de predicado.

c) Reescrever os quantificadores e variáveis de modo que duas ocorrências de quantificadores não contenham a mesma variável e nenhuma variável ocorra ao mesmo tempo livre e ligada.

d) Deslocar todos os quantificadores para o começo da fórmula, na ordem em que ocorrem.

Correção e Consistência

Um sistema de regras de inferência é **correto** se toda conclusão derivada de seu uso é consequência lógica das premissas a partir das quais ela é obtida.

Um sistema de regras de inferência é **consistente** se não existe nenhuma sentença F tal que Φ e -Φ sejam deriváveis a partir do conjunto vazio de premissas.

Se um sistema é correto então ele é consistente (mas a recíproca não é verdadeira).

O sistema de regras de inferência proposto para a linguagem L é correto.

Completude

Um sistema de regras de inferência é **completo** se e somente se é possível derivar a partir de um conjunto de sentenças todas as consequências daquele conjunto, ou seja:
se Φ é consequência de Γ então Φ é derivável a partir de Γ.

Para provar este metateorema, é fundamental o seguinte conceito (L. Henkin):

Um conjunto de sentenças Γ é **consistente com respeito à derivabilidade** ou simplesmente **d-consistente** se e somente se a sentença P&-P não é derivável a partir dele.

Uma sentença Φ é derivável a partir de um conjunto Γ se e somente se $\Gamma \cup \{-\Phi\}$ não é d-consistente.

Um conjunto de sentenças Γ é **d-consistente maximal** se e somente se ele é d-consistente e não é propriamente contido em nenhum outro conjunto d-consistente Δ.

Propriedades:
Se Δ é um conjunto d-consistente maximal e Φ é uma sentença qualquer:
1) $\Phi \in \Delta$ se e somente se $-\Phi \notin \Delta$
2) $\Phi \in \Delta$ se e somente se Φ é derivável a partir de Δ.

Consequências de 1) e 2):

3) $(\Phi \vee \Psi) \in \Delta$ se e somente se $\Phi \in \Delta$ ou $\Psi \in \Delta$;
4) $(\Phi \mathbin{\&} \Psi) \in \Delta$ se e somente se $\Phi \in \Delta$ e $\Psi \in \Delta$;
5) $(\Phi \rightarrow \Psi) \in \Delta$ se e somente se $\Phi \notin \Delta$ ou $\Psi \in \Delta$ ou ambos;
6) $(\Phi \leftrightarrow \Psi) \in \Delta$ se e somente se $\Phi, \Psi \in \Delta$ ou $\Phi, \Psi \notin \Delta$

Um conjunto de sentenças Γ é w-**completo** se e somente se ele satisfaz a seguinte condição:
Para qualquer fórmula Φ e variável α, se $(\exists\alpha)\Phi$ pertence a Γ, então existe uma constante β tal que $\Phi\alpha/\beta \in \Gamma$

Se Δ é um conjunto d-consistente maximal e ω-completo, então, além das propriedades 1) a 6), são também válidas:

7) $(\alpha)\Phi \in \Delta$ se e somente se para toda constante individual β: $\Phi\alpha/\beta \in \Delta$;
8) $(\exists\alpha)\Phi \in \Delta$ se e somente se para alguma constante individual β: $\Phi\alpha/\beta \in \Delta$.

Prova do Metateorema da Completude
(Gödel/Henkin)

Lema 1:
Para qualquer conjunto de sentenças Γ, se Γ é d-consistente então Γ é consistente.

$\boxed{\text{Lema 1} \Rightarrow \text{Completude}}$

Lema 1’:
Para qualquer conjunto de sentenças Γ, se Γ é d-consistente e todos os índices das constantes individuais que ocorrem nas sentenças de Γ são pares, então Γ é consistente.

$\boxed{\text{Lema 1'} \Rightarrow \text{Lema 1}}$

Lema 2:
Para qualquer conjunto de sentenças Γ, se Γ satisfaz as hipóteses do lema 1’, então existe um conjunto de sentenças Δ que inclui Γ e que é d-consistente maximal e ω-completo.

Lema 3:
Todo conjunto de sentenças d-consistente maximal e ω-completo é consistente.

Estrutura da prova: