



EXPERIMENTO 4: MODULAÇÃO ANGULAR

Gustavo Fraidenraich, Levy Boccato, Max Henrique Machado Costa, Michel Daoud Yacoub

2º Semestre de 2018

Parte Teórica

1 Introdução

A modulação angular ou modulação exponencial consiste em um esquema no qual a informação modula o ângulo (frequência ou fase) da portadora, cuja amplitude é mantida constante. De uma forma geral, a onda modulada pode ser escrita como

$$x_c(t) = A_c \cos \theta_c(t) = \Re \left\{ A_c e^{j\theta_c(t)} \right\} \quad (1)$$

em que A_c é a amplitude da portadora e $\theta_c(t)$ é a fase instantânea, variando com o sinal modulante, ou informação, $x(t)$. (\Re representa a parte real de um número complexo.) Define-se $\theta_c(t)$ como

$$\theta_c(t) = \omega_c t + \phi(t) = 2\pi f_c t + \phi(t) \quad (2)$$

em que f_c é a frequência da portadora e $\phi(t)$ é o desvio de fase. A frequência angular instantânea ω_i é definida como

$$\omega_i(t) = \frac{d\theta_c}{dt} = \omega_c + \frac{d\phi}{dt} \quad (3)$$

O desvio da frequência instantânea do sinal modulado é definido como

$$\Delta f_i = \frac{1}{2\pi} \frac{d\phi}{dt} \quad (4)$$

O desvio de fase $\phi(t)$ da portadora varia com o sinal modulante $x(t)$. Dependendo da relação entre $\phi(t)$ e $x(t)$, surgem duas formas de modulação angular: Modulação em Fase (PM) e Modulação em Frequência (FM). Em PM, o desvio de fase instantâneo da portadora é proporcional ao sinal modulante, ou seja

$$\phi(t) = k_p x(t) \quad (5)$$

em que k_p é a constante de desvio de fase (expressa em rad/V). Em FM, o desvio de frequência da portadora é proporcional ao sinal modulador, isto é,

$$\Delta f_i = \frac{1}{2\pi} \frac{d\phi}{dt} = k_f x(t) \iff \quad (6)$$

$$\iff \phi(t) = 2\pi k_f \int_{t_0}^t x(\tau) d\tau + \phi(t_0) \quad (7)$$

em que k_f é a constante de desvio de frequência (em Hz/V) e $\phi(t_0)$ é o ângulo inicial no instante t_0 . Em geral, considera-se $t_0 \rightarrow -\infty$ e $\phi(t_0) = 0$. Combinando (5) e (7) com (1), tem-se

$$x_c(t) = A_c \cos(\omega_c t + k_p x(t)) \quad (\text{PM}) \quad (8)$$

$$x_c(t) = A_c \cos\left(\omega_c t + 2\pi k_f \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau\right) \quad (\text{FM}) \quad (9)$$

As equações anteriores revelam que os sinais modulados em fase ou frequência são similares em suas representações funcionais com exceção da integração da mensagem $x(t)$ em FM. A fig. 1 ilustra formas de ondas PM e FM para uma modulação tonal e outra digital. De (6), tem-se que a frequência instantânea em FM é dada por

$$f_i = f_c + k_f x(t) \quad (10)$$

A fig. 2 ilustra a dependência de $f_i(t)$ em função de $x(t)$. Note que a constante k_f é o coeficiente angular da reta. A tabela 1 resume a dependência da fase e frequência instantânea com relação à informação.

Tabela 1: Formatos da fase e frequência em função da mensagem $x(t)$.

	$\phi(t)$	$f_i(t)$
PM	$k_p x(t)$	$f_c + \frac{k_p}{2\pi} \frac{dx}{dt}(t)$
FM	$2\pi k_f \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$	$f_c + k_f x(t)$

2 Modulação Tonal

A modulação angular é um processo não-linear. Uma descrição exata do espectro de um sinal modulado arbitrário pode ser bastante intrincada. Entretanto, se a informação $x(t)$ é uma onda senoidal, então o desvio de fase instantâneo do sinal modulado (FM ou PM) é também senoidal e o espectro pode ser obtido. Seja

$$x(t) = A_m \cos(\omega_m t) \quad (11)$$

O desvio de fase instantâneo do sinal modulado é dado por

$$\phi(t) = k_p A_m \cos(\omega_m t) \quad (\text{PM}) \quad (12)$$

$$\phi(t) = \frac{2\pi k_f A_m}{\omega_m} \sin(\omega_m t) \quad (\text{FM}) \quad (13)$$

e o sinal modulado

$$x_c(t) = A_c \cos(\omega_c t + \beta \cos(\omega_m t)) \quad (\text{PM}) \quad (14)$$

$$x_c(t) = A_c \cos(\omega_c t + \beta \sin(\omega_m t)) \quad (\text{FM}) \quad (15)$$

em que o parâmetro β é chamado de índice de modulação, definido apenas para modulação tonal como

$$\beta = k_p A_m \quad (\text{PM}) \quad (16)$$

$$\beta = \frac{2\pi k_f A_m}{\omega_m} = \frac{k_f A_m}{f_m} \quad (\text{FM}) \quad (17)$$

O índice de modulação β representa o desvio máximo de fase produzido pelo tom modulante.

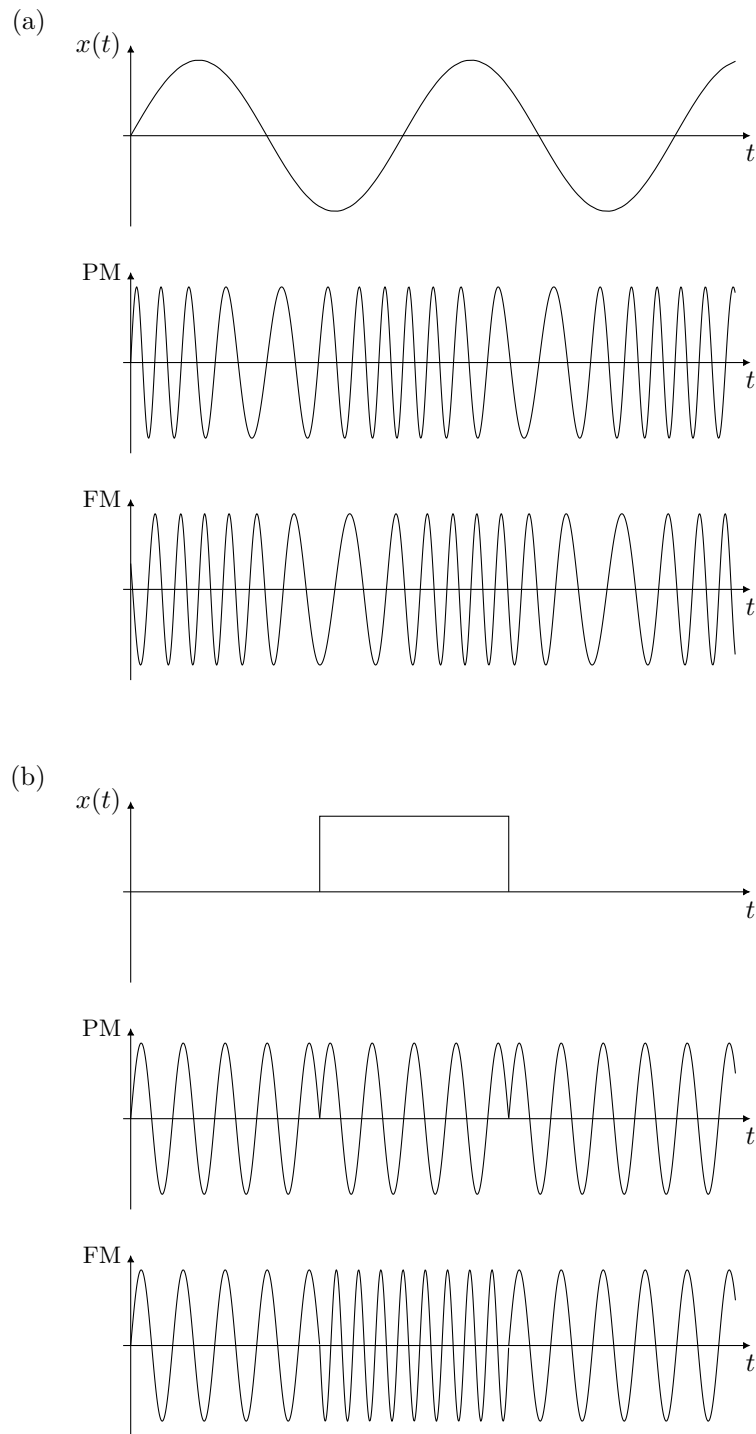


Figura 1: Formas de ondas PM e FM: (a) onda modulante senoidal e (b) onda modulante quadrada.

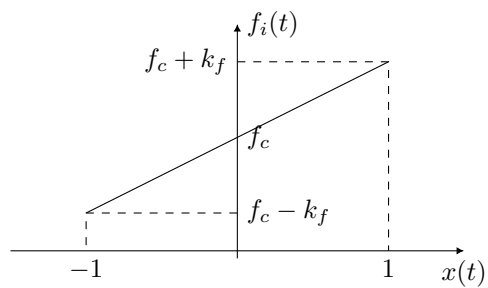


Figura 2: Modulador FM ideal.

Expandindo-se o cosseno em (15), obtém-se

$$x_c(t) = A_c [\cos(\omega_c t) \cos(\beta \sin(\omega_m t)) - \sin(\omega_c t) \sin(\beta \sin(\omega_m t))] \quad (18)$$

As funções $\cos(\beta \sin(\omega_m t))$ e $\sin(\beta \sin(\omega_m t))$ têm período $\frac{1}{f_m}$ e podem, portanto, ser representadas pelas respectivas séries de Fourier

$$\cos(\beta \sin(\omega_m t)) = J_0(\beta) + 2 \sum_{\substack{n=2 \\ n \text{ par}}}^{\infty} J_n(\beta) \cos(n\omega_m t) \quad (19)$$

$$\sin(\beta \sin(\omega_m t)) = 2 \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ ímpar}}}^{\infty} J_n(\beta) \sin(n\omega_m t) \quad (20)$$

em que $J_n(\beta)$ é a função de Bessel da primeira espécie e de ordem n dada por

$$J_n(\beta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \exp(j[\beta \sin(\lambda) - n\lambda]) d\lambda \quad (21)$$

Os valores de $J_n(\beta)$ são calculados em softwares com ferramentas matemáticas (MatLab, Mathematica, Maple), ou podem ser encontrados na literatura especializada sob a forma de tabelas. Uma pequena listagem de $J_n(\beta)$ em função de β e de n é dada na tabela 2. Note que

$$J_{-n}(\beta) = (-1)^n J_n(\beta) \quad (22)$$

Tabela 2: Valores de $J_n(\beta)$.

n	β						
	0,1	0,2	0,5	1,0	2,0	5,0	8,0
0	0,998	0,990	0,938	0,765	0,224	-0,178	0,172
1	0,050	0,100	0,242	0,440	0,577	-0,328	0,235
2	0,001	0,005	0,031	0,115	0,353	0,047	-0,113
3			0,003	0,020	0,129	0,365	-0,291
4				0,002	0,034	0,391	-0,105
5					0,007	0,261	0,186
6					0,001	0,131	0,338
7						0,053	0,321
8						0,018	0,223
9						0,006	0,126
10						0,001	0,061
11							0,026
12							0,010
13							0,003
14							0,001

Combinando (18), (19) e (20), obtemos

$$\begin{aligned} x_c(t) &= A_c J_0(\beta) + 2A_c \left[\sum_{\substack{n=2 \\ n \text{ par}}}^{\infty} J_n(\beta) \cos(n\omega_m t) \cos(\omega_c t) - \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ ímpar}}}^{\infty} J_n(\beta) \sin(n\omega_m t) \sin(\omega_c t) \right] \\ &= A_c J_0(\beta) + A_c \sum_{n=1}^{\infty} J_n(\beta) [\cos((\omega_c + n\omega_m)t) + (-1)^n \cos((\omega_c - n\omega_m)t)] \end{aligned} \quad (23)$$

A fig. 3 mostra um exemplo do espectro de linha $x_c(t)$ para $\beta = 5$, $A_c = 1$ e $f_c \gg f_m$.

O espectro de um sinal FM possui as seguintes propriedades:

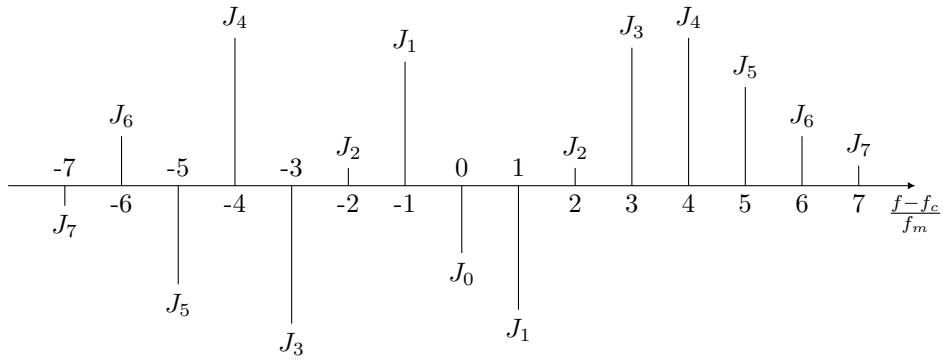


Figura 3: Espectro de linha do sinal FM para modulação tonal com $\beta = 5$, $A_c = 1$.

1. O espectro FM consiste de uma portadora mais um número infinito de componentes laterais nas frequências $f_c \pm n f_m$ ($n = 1, 2, \dots$).
2. A amplitude relativa das componentes espectrais de um sinal FM depende dos valores de $J_n(\beta)$. A amplitude relativa da portadora depende de $J_0(\beta)$ e seu valor varia com o sinal modulante.
3. As componentes ímpares de frequências menores que f_c possuem suas fases invertidas em relação às suas correspondentes componentes maiores que f_c .
4. O número de componentes espectrais significativas é uma função de β (veja a tabela 2). Quando $\beta \ll 1$, somente J_0 e J_1 são significativas. Neste caso, o espectro consistirá apenas da portadora e de duas componentes laterais, ficando, portanto, muito parecido com o espectro AM a menos de uma reversão de fase na componente em $f_c - f_m$.
5. Valores grandes de β implicam em maior largura de faixa, uma vez que haverá muitas componentes significativas. Uma regra prática para definir a faixa de frequência B_T onde as componentes laterais do espectro FM são significativas é dada pela fórmula de Carson $B_T = 2f_M(\beta + 1)$, onde f_M é a máxima frequência do sinal modulante.

O estudo do esquema FM pode ser dividido em dois casos: FM de faixa estreita e FM de faixa larga. Define-se FM de faixa estreita como sendo o sistema que opera com valores $\beta \ll 1$. Assim, a faixa de passagem B_T do FM de faixa estreita é aproximadamente igual a $2f_M$. Neste caso, como já destacado, apenas as duas primeiras raias laterais a f_c são significativas, o que torna o FM de faixa estreita similar ao AM. O sinal FM de faixa estreita não possui nenhuma vantagem sobre o AM em termos de imunidade ao ruído, sendo este um dos principais motivos de sua pouca utilização prática. Entretanto, os esquemas FM de faixa larga fazem uso do sinal FM de faixa estreita como um estágio intermediário na geração do sinal de faixa larga. Quando $\beta \gg 1$ e, portanto, B_T é grande se comparada com a largura de faixa do sinal modulador, diz-se que o sinal FM é de faixa larga. Note que B_T é praticamente independente da largura de faixa do sinal modulador, isto é, $B_T \approx 2\beta f_M$ pois f_M aparece no denominador da expressão de β . Sabendo-se que $\beta = \frac{D}{f_M}$, então, nesse caso, $B_T \approx 2D$.

3 Geração de Sinais FM

Existem basicamente dois métodos de geração de sinais FM: método direto e método indireto. O método direto faz uso de um dispositivo chamado oscilador controlado por voltagem (VCO) cuja frequência de oscilação depende linearmente da amplitude do sinal modulado. No método indireto, um sinal FM de faixa estreita é produzido usando primeiro um modulador de fase. Este sinal FM

é então convertido para um sinal FM de faixa larga por uma multiplicação em frequência. Nesta experiência, estudaremos apenas a modulação feita pelo método direto, ilustrada na fig. 4.



Figura 4: Método direto de modulação FM.

Parte Prática

1. Ajuste o gerador de funções Agilent 33220A para que em sua saída haja uma onda senoidal (portadora) com amplitude A_c igual a $1 V_{pp}$ e frequência $f_c = 1$ MHz. Ajuste o sinal modulante (informação) para 10 kHz. Use a própria modulação FM interna do gerador. Sabendo-se que o índice de modulação é $\beta = \frac{D}{f_m}$, onde f_m é a frequência do sinal modulante e D é o desvio de frequência do modulador:
 - (a) Ajuste D para que o sinal FM seja de faixa estreita ($\beta = 0,2$). Compare os valores obtidos no analisador de espectro com os valores teóricos esperados.
 - (b) Ajuste D para que o sinal FM seja de faixa larga ($\beta = 2,0$). Compare os valores obtidos no analisador de espectro com os valores teóricos esperados.
2. Com a onda modulante quadrada de frequência 1 kHz, ajuste a frequência de portadora f_c para 100 kHz e o desvio de frequência para 40 kHz. Meça as frequências instantâneas da portadora no osciloscópio. Explique o porquê de o espectro possuir mais de duas raias de frequência. Diminua progressivamente o desvio de frequência e veja o que ocorre. Conjecture sobre a relação entre banda de transmissão, taxa de bit, e taxa de erro de bit.
3. Com a onda modulante senoidal e sua frequência adequada para a versão FM de faixa estreita para $D = 2$ kHz, use uma portadora quadrada com $1 V_{pp}$ e frequência $f_c = 1$ MHz. Visualize o sinal no osciloscópio. Idem para o analisador de espectro utilizando um SPAN de 9 MHz. Sintonize cada uma das frequências harmônicas da portadora quadrada e use um SPAN adequado para visualizar as raias laterais. Por que a primeira harmônica da portadora se comporta como uma modulação de faixa estreita e as demais não?
4. Usando a portadora senoidal em 1 MHz e desvio D de frequência igual a 100 kHz, utilize o gerador de funções 33120A para injetar um sinal modulante senoidal externo de $4 V_{pp}$, com varredura de 100 Hz a 4 kHz e com duração de 50 s, na entrada externa do gerador de funções 33220A. Trace o espectro deste sinal modulado. Explique a diferença entre a faixa de frequência do sinal gerado pelo gerador 33120A e aquela do sinal FM. Diminua a tensão do sinal modulante pela metade e observe o que ocorre com a faixa do sinal. Explique.
5. Na configuração do item 4, substitua o gerador de funções 33120A por um equipamento que gere algum sinal de áudio, e.g., saída de áudio do computador ou um celular. O objetivo é fazer uma transmissão FM a ser sintonizada por um rádio portátil comercial. Conecte a saída do gerador de funções 33220A em uma antena externa e ajuste essa saída para potência máxima. Atente para o seguinte fato: as emissoras FM comerciais operam na faixa de 88 MHz a 108 MHz. O gerador de funções 33220A, por sua vez, opera com uma frequência máxima de 20 MHz. Assim, a montagem solicitada não é óbvia. Conjecture sobre como esse problema pode ser resolvido e teste a sua solução na prática. Teste algumas das várias configurações possíveis.