



EXPERIMENTO 2: SISTEMAS LINEARES

Gustavo Fraidenraich, Levy Boccato, Max Henrique Machado Costa, Michel Daoud Yacoub

2º Semestre de 2018

Parte Teórica

1 Introdução

Um sistema é definido como uma relação funcional entre o sinal de entrada $x(t)$ e o sinal de saída $y(t)$ tal que:

$$y(t) = f(x(t)), \quad t \in \mathbb{R} \quad (1)$$

Baseado nas propriedades da relação funcional dada em (1), os sistemas podem ser classificados como:

Linear: um sistema é dito linear se o princípio da sobreposição se aplica; isto é, dadas duas saídas $y_1(t) = f(x_1(t))$ e $y_2(t) = f(x_2(t))$ para as respectivas entradas, então

$$f(a_1x_1(t) + a_2x_2(t)) = a_1y_1(t) + a_2y_2(t) \quad (2)$$

em que a_1 e a_2 são constantes quaisquer. Se o princípio da sobreposição não se aplica, então o sistema é chamado de não-linear.

Invariante no tempo: um sistema é dito invariante no tempo se um deslocamento temporal da entrada resulta em um deslocamento temporal correspondente na saída; ou seja, se

$$y(t) = f(x(t)) \implies y(t - t_0) = f(x(t - t_0)), \quad \forall t_0 \in \mathbb{R} \quad (3)$$

Se o sistema não obedece a essa restrição, então ele é dito variante no tempo.

Causal: Um sistema é dito causal se sua resposta não se inicia antes de uma excitação ser aplicada em sua entrada. Em outras palavras, o valor da saída no instante $t = t_0$ depende somente dos valores de entrada $x(t)$ para $t \leq t_0$. Um sistema não-causal é aquele que não satisfaz esta condição.

2 Sistemas Lineares e Invariantes no Tempo

Seja um sistema com entrada $x(t)$, saída $y(t)$ e resposta $h(t)$ ao impulso $\delta(t)$. Sejam $X(f)$, $Y(f)$ e $H(f)$ as respectivas representações no domínio da frequência da entrada, saída e resposta ao impulso. A análise do sistema pode tanto ser feita no domínio da frequência como no domínio do tempo.

2.1 Análise no Domínio do Tempo

Um sistema linear e invariante no tempo é caracterizado no domínio do tempo pela resposta ao impulso, como demonstrado a seguir.

Considere um sinal arbitrário $x(t)$ aplicado na entrada deste sistema. Considere ainda que este sistema impõe uma transformação $g(\cdot)$, fornecendo uma saída $y(t)$, como mostrado na fig. 1, i.e.

$$y(t) = g(x(t)) \quad (4)$$

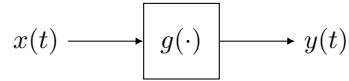


Figura 1: Sistema linear e invariante no tempo.

Imagine que a entrada deste sistema seja um impulso unitário $\delta(t)$ e chamemos a saída correspondente de $h(t)$. Assim $h(t) = g(\delta(t))$. É sabido que um sinal arbitrário $x(t)$ pode ser escrito como

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t - \tau) d\tau \quad (5)$$

Desta forma, a saída $y(t)$ é dada por:

$$y(t) = g\left(\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t - \tau) d\tau\right) \quad (6)$$

Como o sistema é linear, o operador $g(\cdot)$ pode ser incluído no integrando. Além disso, como $x(\tau)$ é constante em relação a t , esse termo pode sair do operador $g(\cdot)$, restando apenas

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)g(\delta(t - \tau)) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau) d\tau = x(t) * h(t) \quad (7)$$

em que é utilizado o fato de o sistema ser invariante no tempo. Portanto, dada uma entrada arbitrária a um sistema linear e invariante no tempo, a saída correspondente será a convolução dessa entrada com a resposta ao impulso do sistema. Na prática, pode-se obter uma aproximação da resposta ao impulso do sistema utilizando-se um sinal de entrada $x(t)$ do tipo pulso, com amplitude finita e largura suficientemente estreita.

2.2 Análise no Domínio da Frequência

No domínio da frequência, um sistema linear e invariante no tempo é caracterizado pela função de transferência $H(f)$, a qual é obtida através da transformada de Fourier da resposta ao impulso. A convolução entre duas funções no domínio do tempo corresponde a uma multiplicação das respectivas transformadas de Fourier no domínio da frequência, i.e.,

$$Y(f) = H(f)X(f). \quad (8)$$

Por ser, em geral, uma função complexa, a função de transferência pode ser expressa como $H(f) = |H(f)|e^{j\angle H(f)}$, em que $|H(f)|$ é a resposta em amplitude e $\angle H(f)$ é a resposta em fase.

Se, por exemplo, a entrada de um sistema linear e invariante no tempo (real) for uma senoide

$$x(t) = A_x \cos(\omega_0 t + \theta_x) \quad (9)$$

em que A_x e θ_x são constantes reais de amplitude e fase, respectivamente, e $\omega_0 = 2\pi f_0$ é a frequência

angular, a saída do sistema linear será

$$y(t) = A_y \cos(\omega_0 t + \theta_y) \quad (10)$$

com

$$A_y = |H(f_0)|A_x \quad (11)$$

$$\theta_y = \theta_x + \angle H(f_0) \quad (12)$$

A função de transferência $H(f)$ associa a cada frequência f um número complexo que depende apenas dos parâmetros do sistema e não da entrada. Note, portanto, que a função $H(f)$ pode ser determinada observando-se o sinal de saída do sistema quando a entrada é uma onda senoidal. Mais especificamente, se a entrada é uma onda senoidal de amplitude unitária e fase nula com frequência f_0 , e a saída, uma senoide de amplitude A e fase θ , então

$$H(f_0) = Ae^{j\theta} \quad (13)$$

2.3 Sistemas Lineares sem Distorção

Um sinal transmitido através de um sistema linear não sofre distorção se a forma de onda do sinal de saída é igual à forma de onda do sinal de entrada, a menos de uma amplificação (ou atenuação) e/ou um deslocamento no tempo. Portanto, para uma transmissão sem distorção com entrada $x(t)$ e saída $y(t)$, exige-se que:

$$y(t) = Ax(t - t_0), \quad (14)$$

em que t_0 é o atraso e A é o fator de amplificação introduzidos pelo sistema. No domínio da frequência, essa relação é escrita como

$$Y(f) = AX(f)e^{-j2\pi ft_0} \implies H(f) = Ae^{-j2\pi ft_0}. \quad (15)$$

Assim, o sistema linear que não introduz distorção possui $|H(f)|$ constante para qualquer frequência e variação linear da fase com relação à frequência. Por outro lado, para o caso geral, a função de transferência $H(f)$ pode não ser constante, apresentando magnitude e fase variáveis com a frequência.

2.4 Tipos de Filtros e Algumas Características

Filtros possuem um grande número de aplicações em comunicações, como, por exemplo, na seleção de uma emissora específica dentre os sinais que chegam à antena de um rádio-receptor. Os principais tipos de filtros são: filtro passa-baixas (FPB), filtro passa-altas (FPA), filtro passa-faixa (FPF), e filtro rejeita-faixa (FRF). Como dito anteriormente, no que diz respeito à sua resposta em amplitude, os filtros ideais deveriam mantê-la constante na faixa das frequências correspondentes. Na prática, isso não acontece, havendo, portanto, distorções. A fig. 2 mostra alguns dos tipos de filtros não-ideais. Nela, as curvas tracejadas representam filtros ideais, enquanto os traços contínuos representam filtros reais. Define-se a faixa de passagem de um filtro como sendo o intervalo de frequências positivas onde $|H(f)|$ é maior ou igual a uma fração $\frac{1}{\sqrt{2}}$ do seu valor máximo. As frequências que limitam esse intervalo são chamadas de frequências de corte do filtro.

No que diz respeito à sua resposta em amplitude, um filtro pode ser construído o mais próximo do ideal possível aumentando-se a sua ordem (número de polos de sua função de transferência).

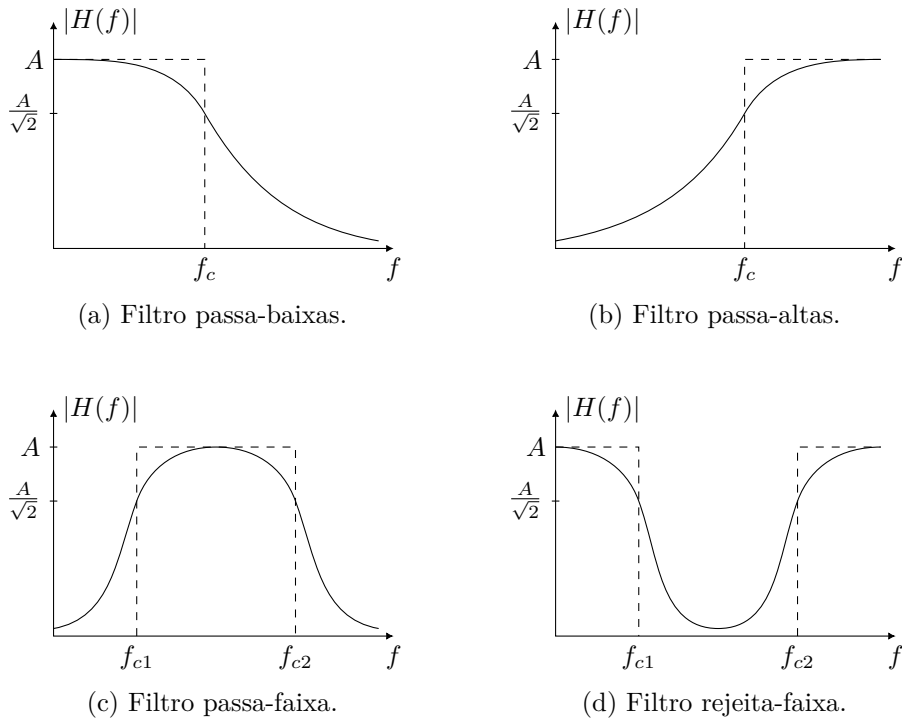


Figura 2: Espectros de magnitude de filtros reais (linhas contínuas) e ideais (tracejadas).

Um modelo típico de FPB de ordem n tem função de transferência dada por:

$$G_n(f) = \left(1 + \frac{f}{f_c}\right)^{-n}, \quad (16)$$

em que f_c é a frequência de corte. Note que para $f \gg f_c$ tem-se

$$20 \log(G_n(f)) \approx -20n \log\left(\frac{f}{f_c}\right) \quad (17)$$

ou seja, plotada em escala logarítmica, a função de transferência do filtro, nessa região do espectro, é uma reta de declividade (*roll-off*) $-20n$ dB por década. Assim, um filtro de ordem 1 terá um *roll-off* de -20 dB por década e um de terceira ordem, -60 dB por década.

O filtro pode ser projetado diretamente para ser de ordem n . Por outro lado, pode-se ainda obter filtros de ordem superior através da conexão em cascata de filtros de ordem menor. (Lembre-se que a função de transferência de filtros em cascata é o produto das funções de transferência individuais. Em escala logarítmica, portanto, é a soma).

Configurações mais sofisticadas de filtros podem ser obtidas convenientemente combinando-se filtros mais simples. Por exemplo, um FPF pode ser obtido ligando-se um FPB e um FPA em cascata. Da mesma forma, um FRF pode ser obtido ligando-se um FPB e um FPA em paralelo. Obviamente, as frequências de corte devem ser devidamente dimensionadas para tal. Além disso, questões como casamento adequado de impedâncias devem ser cuidadosamente estudadas.

2.5 Relação entre Faixa de Passagem com a Velocidade de Resposta do Sistema Linear

A largura da faixa de passagem está ligada à velocidade de resposta de um sistema, isto é, à capacidade de o sistema responder a sinais que variam rapidamente. Um parâmetro utilizado para se medir essa velocidade é o tempo de subida (*rise time*) na saída, isto é, o tempo que a saída leva para ir de 10% a 90% de seu valor de regime quando na entrada se aplica um degrau

unitário. O tempo de subida t_r varia de maneira inversa à largura da faixa de passagem B . Na prática, o produto $t_r B$ é aproximadamente constante. A escolha dos níveis de 10% e 90% é feita em virtude das dificuldades práticas em se determinar o instante exato em que o sistema linear começa a responder a uma excitação de entrada e quando a saída atinge o ponto de regime.

2.6 Medida do *Roll-Off*

O *roll-off* pode ser medido a partir do ganho tomado na escala logarítmica. De uma forma geral, pode-se escrever o ganho em dB em função da frequência como

$$G_{\text{dB}}(f) = K \log(f) + C \quad (18)$$

em que G , K , e C são respectivamente o ganho na frequência f , o *roll-off*, e uma constante.

Na análise de filtros lineares, convencionou-se descrever o *roll-off* nas unidades dB por oitava, ou dB por década, definidas como

$$K_{\text{dB/oit}} = G_{\text{dB}}(2f) - G_{\text{dB}}(f) = K \log\left(\frac{2f}{f}\right) = K \log(2) \quad (19)$$

$$K_{\text{dB/déc}} = G_{\text{dB}}(10f) - G_{\text{dB}}(f) = K \log\left(\frac{10f}{f}\right) = K \quad (20)$$

para frequências $10f$, $2f$ e f na faixa linear de resposta em frequência do filtro. Tomando-se duas frequências f_1 e f_2 nessa faixa, tem-se, a partir de (18):

$$K = \frac{G_{\text{dB}}(f_1) - G_{\text{dB}}(f_2)}{\log\left(\frac{f_1}{f_2}\right)} \quad (21)$$

Assim, aplicando (21) em (19) e (20), pode-se obter $K_{\text{dB/oit}}$ e $K_{\text{dB/déc}}$ a partir de duas frequências quaisquer.

Parte Prática

Quatro tipos de filtros serão testados: FPB, FPA, FPF e FRF. Para o sinal de entrada, utilize o gerador Agilent 33220A, escolhendo uma varredura adequada de frequência entre os pontos START FREQ e STOP FREQ. Utilize amplitude 0,1 V de pico. Além disso, escolha os tempos de varredura SWEEP TIME, tanto no gerador como no analisador.

1 Filtro Passa-Baixas

- Escolha um dos filtros passa-baixas disponíveis, com frequência de corte de 2 MHz ou de 10 MHz. Caracterize, então, o FPB escolhido utilizando o analisador de espectro. (Obtenha a resposta em frequência, a frequência de corte e o *roll-off* em dB por oitava e por década.)
- Repita o procedimento anterior ligando os diversos FPBs (com a frequência de corte escolhida) em cascata.
- Considerando ainda a montagem dos filtros em cascata, injete uma onda quadrada de 100 kHz no filtro e meça o tempo de subida (ou descida) utilizando o osciloscópio.
- Repita o item anterior para uma onda quadrada de 200 kHz. Comente.

- Conjecture sobre o seguinte: imagine uma onda quadrada positiva de frequência bem abaixo da frequência de corte do filtro injetada em sua entrada. O que deve ser observado na sua saída? O que deve acontecer com a saída ao se aumentar a frequência da onda? E se isso for feito para uma frequência bem acima daquela de corte? Verifique isso na prática.
- Obtenha a resposta ao impulso aproximada do FPB escolhido injetando uma onda pulsada. Para o caso do FPB de 2 MHz, a onda deve ser de 100 kHz e *duty cycle* de 1%. Para o filtro de 10 MHz, a onda deve ser de 1 MHz e *duty cycle* de 2%. Observe o sinal no osciloscópio. Idem para o analisador de espectro. Repita o procedimento para o caso do FPB de 2 MHz, com uma onda de 30 kHz e *duty cycle* de 1%. Comente.

2 Filtro Passa-Altas

- Escolha um dos filtros passa-altas disponíveis, com frequência de corte de 500 kHz ou de 5 MHz. Caracterize, então, o FPA escolhido utilizando o analisador de espectro. (Obtenha a resposta em frequência, a frequência de corte e o *roll-off* em dB por oitava e por década.)
- Repita o procedimento anterior ligando os diversos FPAs (com a frequência de corte escolhida) em cascata.
- Considerando ainda a montagem dos filtros em cascata, injete uma onda quadrada de frequência inferior à frequência de corte do filtro e observe a sua saída. O que é esperado? O que você observa? Comente.
- Com o filtro do item anterior, injete uma onda quadrada de frequência superior à frequência de corte do filtro e observe a sua saída. O que é esperado? O que você observa? Comente.

3 Filtro Passa-Faixa

- Utilizando os FPB e FPA disponíveis, monte um FPF.
- Obtenha a resposta em frequência do FPF e as frequências central (f_{central}), de corte inferior (f_{inf}) e de corte superior (f_{sup}). Estime a seletividade Q do filtro: $Q = \frac{f_{\text{central}}}{f_{\text{sup}} - f_{\text{inf}}}$.

4 Filtro Rejeita-Faixa

- Utilizando os FPB e FPA disponíveis, obtenha agora um FRF.
- Obtenha a resposta em frequência do FRF e as frequências central (f_{central}), de corte inferior (f_{inf}) e de corte superior (f_{sup}).

Apêndice

Nesse apêndice, são listados os projetos dos circuitos utilizados na parte prática.

A fig. 3 mostra o filtro passa-baixas normalizado e suas implementações em 2 MHz e 10 MHz. A transformação do protótipo normalizado para a frequência de corte f_c e para uma impedância de entrada e saída R se dá com

$$L_{\text{PB}} = \frac{\ell R}{2\pi f_c} \qquad C_{\text{PB}} = \frac{c}{2\pi f_c R} \qquad (22)$$

em que ℓ e c são os valores normalizados de indutância e capacitância. Todos os filtros empregados no experimento são casados em $R = 50 \Omega$. Assim, para o filtro com corte em 2 MHz (fig. 3b), os valores dos componentes são

$$L = \frac{2 \times 50}{2\pi \times 2 \times 10^6} = 7,96 \mu\text{H} \quad (23)$$

$$C = \frac{1}{2\pi \times 2 \times 10^6 \times 50} = 1,59 \text{ nF} \quad (24)$$

Analogamente, no caso de corte em 10 MHz (fig. 3c),

$$L = \frac{2 \times 50}{2\pi \times 10 \times 10^6} = 1,59 \mu\text{H} \quad (25)$$

$$C = \frac{1}{2\pi \times 10 \times 10^6 \times 50} = 318 \text{ pF} \quad (26)$$

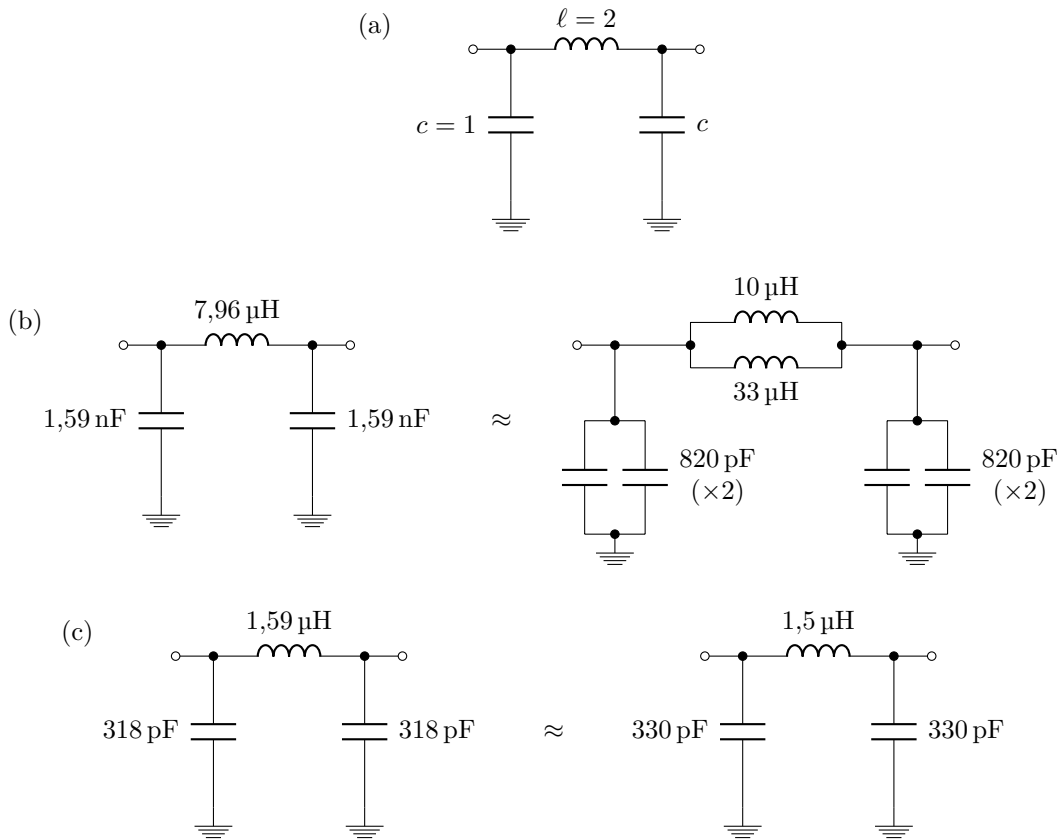


Figura 3: Projeto de filtro passa-baixas do tipo Butterworth de ordem 3. (a) Protótipo normalizado. (b) Implementações para $f_c = 2 \text{ MHz}$ e $R = 50 \Omega$ ideal e com componentes de valores comerciais. (c) Similar a (b) para $f_c = 10 \text{ MHz}$.

As transformações para os filtros passa-altas, apresentados na fig. 4, são

$$L_{\text{PA}} = \frac{R}{2\pi f_c \ell} \quad C_{\text{PA}} = \frac{1}{2\pi f_c c R} \quad (27)$$

Portanto, o filtro com frequência de corte de 500 kHz (fig. 4b) é obtido a partir de

$$L = \frac{50}{2\pi \times 500 \times 10^3 \times 2} = 7,96 \mu\text{H} \quad (28)$$

$$C = \frac{1}{2\pi \times 500 \times 10^3 \times 2 \times 50} = 6,37 \text{ nF} \quad (29)$$

e o filtro com corte em 5 MHz (fig. 4c), a partir de

$$L = \frac{50}{2\pi \times 5 \times 10^6 \times 2} = 796 \text{ nH} \quad (30)$$

$$C = \frac{1}{2\pi \times 5 \times 10^6 \times 2 \times 50} = 637 \text{ pF} \quad (31)$$

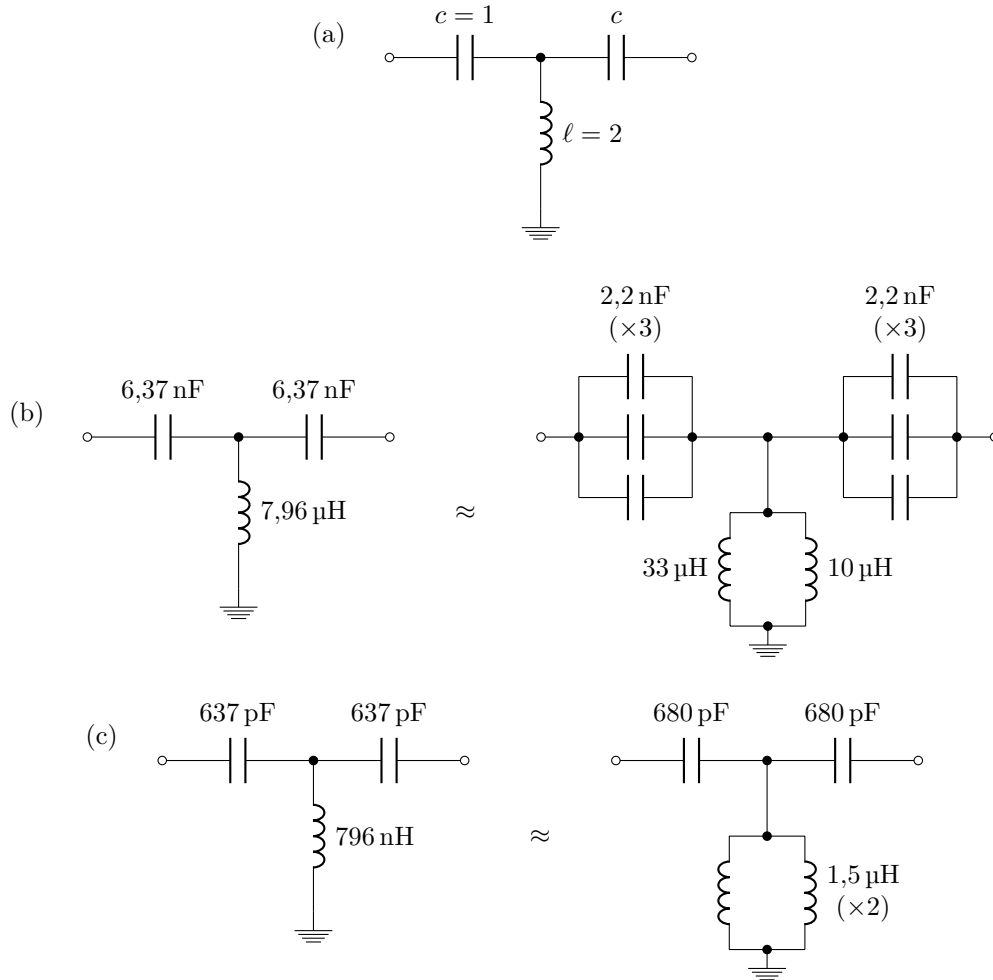


Figura 4: Projeto de filtro passa-altas do tipo Butterworth de ordem 3. (a) Protótipo normalizado. (b) Implementações para $f_c = 500 \text{ kHz}$ e $R = 50 \Omega$ ideal e com componentes de valores comerciais. (c) Similar a (b) para $f_c = 5 \text{ MHz}$.

Por fim, a fig. 5 mostra o circuito do casador de impedâncias utilizado na montagem do filtro rejeita-faixa.

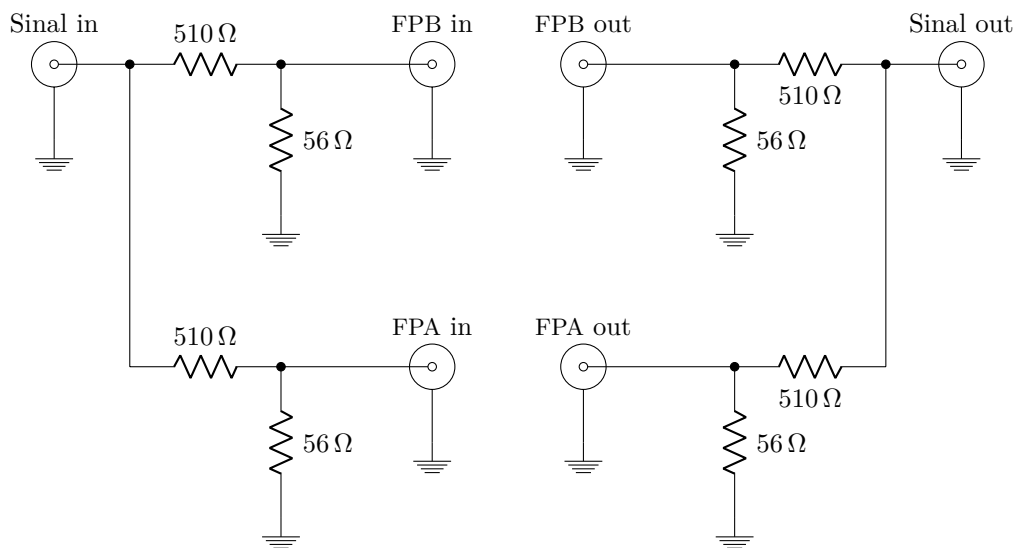


Figura 5: Casador de impedâncias para a montagem do filtro rejeita-faixa.