IA005 - Semiótica e Sistemas Inteligentes - FEEC
Prof.: Ricardo R. Gudwin

Flavio S. Yamamoto

Negação e condicional na lógica de Peirce e em outras lógicas

Resumo

Os conceitos de negação e condicional são elementos centrais na construção de qualquer sistema lógico - seja de natureza *dedutiva*, *abdutiva* ou *indutiva*. Sistemas lógicos são constructos intelectuais, objetos efetivos da lógica (como disciplina) - seja a usual clássica ou a peirceana. Neste texto, estudamos diferentes sistemas lógicos delineados pelos papéis da negação e da condicional, quando regidos por princípios, como, os da identidade, terceiro excluído, não contradição e dupla negação; presentes, direta ou indiretamente, a quaisquer constructos dessa natureza. Nessa apresentação dos diversos sistemas lógicos, destacamos os constructos da lógica (como disciplina) de Peirce: o triádico e dos grafos existenciais.

1 Apresentação

A disciplina IA005 - Semiótica e Sistemas Inteligentes -, trata de diferentes formulações de uma gama variada conceitos, inserida em diversas propostas de teorias. Cada proposta apresentada, de fato, é uma *construção hipotética* - uma *sistematização de conceitos sob certas condições de contorno.* Entendemos, pelo menos neste texto, os *conceitos* como sendo *formulações intelectuais* sobre *objetos concretos* e/ou *abstratos.* As *condições de contorno* são constituídas por tudo o que está envolvido na forja do pesquisador e seu objeto de estudo (entenda-se criador e criatura como unidade), por exemplo, desde convenções para a *boa prática científica* até princípios *assumidos por escolha* ou por algum tipo de necessidade (*p.ex.*, os *princípios nomológicos*).

Não entraremos nos datalhes dos diferentes tópicos abordados na discplina, apenas destacamos que o interesse da disciplina está nas formulações de sistematização de conceitos cujo caráter é *científico*[1]. Isto é, estamos tratando do *conhecimento científico*, conhecimento que muitas vezes confronta o *senso comum*[2]. Desse modo, é de se esperar que a disciplina passe por questões acerca da natureza dos conceitos (*p. ex.*, concreta ou intelectual) e objetos (*p. ex.*, concretos ou abstratos); da postura do investigador e a visão que adota (*p. ex.*, empirísta, realista, fenomenológica ou pragmática); das convenções acerca da prática científica (*p. ex.*, utilitarista ou pragmática); dos critérios de escolhas (*p. ex.*, a navalha de Occam); e dos princípios adotados (*p. ex.*, da identidade ou do *continuum*).

A disciplina percorre um amplo espectro de questões que apesar de imbricadas umas às outras podem ser apresentadas e pensadas (de certo modo) independentemente. Deste intrincado *quebra-cabeças*, de peças imbricadas, escolhemos tratar das questões subjacentes à lógica (como disciplina, como área de estudo) de Peirce com foco em seus sistemas lógicos: o triádico e dos grafos existenciais. Apesar de centrarmos foco em constructos matemáticos, isto é, em objetos abstratos, as questões subjacentes à construção de tais estruturas estão diretamente relacionadas com elementos ligados à natureza do conhecimento científico, como, as noções de verdade, negação e condicional.

Neste texto não tratamos a lógica (como disciplina) de Peirce nem seus sistemas lógicos de forma isolada. Escolhemos dois elementos, a negação e a condicional, que permeiam o processo de construção de qualquer sistema lógico, como fio condutor para situar a lógica (como disciplina) e os constructos de Peirce no cenário, digamos, *padrão* da lógica (como disciplina fora do círculo de especialistas) contemporânea.

1.1 Organização do Texto

O texto segue o formato e roteiro como especificados a seguir. Neste trabalho utilizamos o recurso de notas e observações no final do texto, Seção 8, para não sobrecarregar o discurso central e como apoio para o leitor não habituado ao uso dos jargões das áreas de lógica e matemática. O restante do texto está organizado conforme roteiro a seguir.

Na Seção 2 estabelecemos cenário de nosso discurso, apresentamos o enquadramento dos conceitos envolvidos e a dinâmica que adotamos para a construção dos sistemas que interessam à nossa abordagem (Subseção 2.1).

Uma vez destacados o cenário, o enquadramento e a dinâmica, apresentamos na Seção 3 os personagens envolvidos (Subseção 3.2): a negação o a condicional em suas formas de ocorrência, Subseção 3.1.1. Essas formas de ocorrência estão relacionadas com a noção de verdade, tratadas na Subseção 3.1.2. Encerramos a seção descrevendo como os personagens aqui colocados irão atuar de acordo como a nossa abordagem, Subseção 3.3.

Na Seção 4 colocamos os elementos abordados na seção anterior em seus respectivos lugares e formas de atuação no âmbito das lógicas (como disciplinas): a usual (comum, oridnária) e a de Peirce, contemporâneas. Alguns elementos têm destaque em seus papéis nos respectivos sistemas lógicos que irão atuar: as noções de verdade segundo Tarski e Peirce, Subseção 4.1.1; alguns princípios básicos, Subseção 4.1.2; os mesmos princípios sob a óptica de Peirce, Subseção 4.1.3; a negação, Subseção 4.1.4 e, finalmente, a condicional Subseção 4.1.5.

A Seção 5 trata da internalização dos elementos apresentados na seção anterior como objetos efetivamente formalizados. A forma clássica (usual) da noção de verdade, negação e condicional estão retratadas no Sistema Proposicional Clássico (ou Cálculo Proposicional Clássico), Subseção 5.1. Uma extensão da linguagem do Sistema Proposicional, para aumentar a expressabilidade da linguagem proposicional, é apresentada na Subseção 5.2.

Na Seção 6 apresentamos os sistemas lógicos que não adotam a negação e/ou a condicional, pelo menos em parte, como nos sistemas clássicos. Os sistemas aqui expostos são os intuicionistas (com uma incursão rápida sobre a Lei de Peirce), os paraconsistentes e multi-valorados (dentre eles o sistema triádico peirceano), os modais e dos grafos existenciais de Peirce.

Finalmente, na Seção 7 tecemos nossos comentários finais, propomos estudos futuros e sistemas lógicos (ainda não acabados) específicos para tratar informação espacial em universos digitais persistentes e que incorporam elementos da semiótica de Peirce.

2 Introdução

O *conhecimento científico* mostra-se terreno fértil para *compreender como a compreensão é possível*. Isso se deve, em parte, *a forma como ela própria se interroga sobre sua legitimidade, o que leva, por sua vez, a questionar a legitimidade dessa própria legitimidade*, [Costa, 1993].

Essa natureza do conhecimento científico enriquece o *senso comum*[3], gera um *novo senso comum* distinto do que o procedeu, mas exercendo a mesma função do senso anterior para a compreensão e a comunicação, [Paty, 2003].

Esse círculo virtuoso se articula por meio de *conceitos*, afinal, não há senso (o comum ou da razão) sem conceituação, [Costa, 1997]. A seguir, iniciamos a nossa conceituação. Estabelecemos o cenário de nossa abordagem e apresentamos o enquadramento dos conceitos envolvidos e a dinâmica que adotamos para a construção dos sistemas que nos interessam.

Podemos enxergar o processo de sistematização como *uma forma conveniente de descrever as coisas* - *um modo de ver o mundo* [Weinberg, 1975, pág. 52] -, uma forma de expressar *compreensão sobre algo* (ou *conhecimento de algo*). No nosso caso, estamos interessados em sistematização que carregam em seu núcleo um compromisso com alguma noção de *verdade*, como ocorre com o *conhecimento científico*. Como a noção de verdade e lógica constituem noções interligadas estreitamente, então o conhecimento científico e lógica acham-se imbricados entre si, [Costa, 1997].

Dentre as várias formulações da noção de *verdade*[4], *p. ex.*, decorrente da Teoria da Redundância, da Teoria Coerencial, da Teoria da Correspondência e da Teoria da Verdade Pragmática, ([Lynch, 2001], [Haack, 1978, Cap. 7], [Priest, 2000], [Abe, 1991]), a adotada pela lógica (como disciplina) corrente é a defendida por Tarski, ([Tarski, 1944], [Tarski, 1956a]) - apresentamos maiores datalhes na Subseção 3.1.2.

Apresentamos neste texto apenas as idéias de Tarski e Peirce, já que o objetivo é situar os sistemas lógicos de Peirce entre os sistemas lógicos usuais. De fato, como desejamos comparar tecnicamente sistemas lógicos (oriundos de lógicas (como disciplinas) aparentemente distintas) que tenham subjacente alguma noção de verdade, devemos abordar a versão de Peirce de tal modo que possamos proceder tal comparação. Trata-se de uma abordagem técnica, a idéia não é confrontar aspectos dessas duas teorias da verdade, por exemplo, sob a óptica da filosofia. Desse modo, devemos situar um teoria em outra e, neste caso, situar a noção de verdade de Peirce na formulação de Tarski, fazemos isso através do conceito de *quase-verdade*, ([Mikenberg et al., 1986], [Hifume, 2003], [Krause, 2011a]); idéia originalmente conhecida como *verdade pragmática*, [Peirce, 1965] - apresentamos maiores detalhes na subseção 3.1.2.

Um vez escolhida qual noção de verdade adotar, um próximo passo seria descobrir, em relação ao processo de construção de sistemas lógicos, *qual tipo de objeto possui a propriedade (o atributo) de ser verdadeiro?* A resposta padrão é: uma *proposição* carrega esse tipo de atributo - apresentamos maiores datalhes na subseção 3.1.1.

Os elementos que compõem o cenário deste texto são proposições associadas a uma ou outra noção de verdade, tais elementos estão sob o olhar (o enquadramento) científico: gerar sistematizações de conceitos compromissadas com alguma noção de verdade. A seguir expomos a dinâmica de construção de tais sistematizações, que chamamos de *axiomatizações*.

2.1 Axiomáticas

Entendemos que o ato de axiomatizar uma teoria está em buscar (definir) sua contraparte matemática (sua estrutura), [Henkin et al., 1959]; tentar caracterizar a estrutura matemática a ela subjacente, [Costa, 1997].

Evidentemente, ao se definir o objeto dessa busca (a axiomática de uma teoria), seja de um prisma local, global ou estrutural, não teremos no objeto (na axiomática) as conexões da teoria com o contorno, com a experiência. Mesmo porque, o estudo de tais conexões não pertence propriamente à *axiomatização*[5] em sentido estrito (deve ser analisada à parte), [Costa, 1997].

Adotamos essa dinâmica pois ela serve tanto como lugar de edificação de nossos constructos hipotéticos quanto de investigação do constructo: *nela podemos eliminar ou modificar seus (elementos) axiomas discutindo as variantes da teoria axiomatizada.* O processo de axiomatizar uma teoria pode ser descrito do seguinte modo:

- escolhe-se certo número de noções e de *proposições primitivas*, suficientes para sobre elas edificar a teoria, aceitando-se outras idéias ou outras proposições só mediante, respectivamente, *definições* e *demonstrações*; obtém-se, dessa maneira, uma *axiomática material* da teoria dada;

- deixam-se de lado os significados intuitivos dos *conceitos primitivos*, considerando-os como termos caracterizados implicitamente pelas proposições primitivas;

- procura-se as *conseqüências* do sistema obtido, sem preocupação com a natureza ou com o significado inicial desses termos ou das relações entre eles existentes.

O método axiomático permite submetermos nossos objetos de estudo (os sistemas lógicos) a um escrutínio crítico, revelando quais são as idéias básicas e seus princípios centrais. Desse modo, o método axiomático não se reduz somente a um processo de edificação, é também instrumento de desenvolvimento da própria área a que se aplica. Ou seja, essa forma de abordagem não se afigura unicamente ferramenta de rigor, mas conduz a progressos verdadeiros, funcionando como alavanca heurística, [Costa, 1997].

Neste texto consideramos esse *método de construção de sistemas* como processo base para todos os sistemas lógicos aqui apresentados. Desse modo, os objetos de estudo, os sistemas lógicos, terão em sua base de construção elementos comuns (proposições e suas propriedades) e o mesmo processo de edificação. Não detalhamos esse processo em todos os sistemas aqui expostos, fazemos isso com maior cuidado somente para os sistemas clássicos - Seção 5. Nos sistemas restantes voltamos nossa atenção para discutir as variantes dos conceitos axiomatizados.

3 Preliminares

Delineamos na seção anterior, de forma ampla e pouco precisa, o cenário, enquadramento e a dinâmica em que transcorre nossa abordagem. Nesta seção definimos um pouco mais esse delineamento traçado. Especificamos nesta seção os personagens e as respectivas características que interessam à nossa temática, restritos ao contexto do amplo cenário exposto.

Antes de discorrermos sobre a negação e a condicional, personagens da nossa trama, descrevemos o local e o modo como esses dois conceitos irão atuar: grosso modo, ambos ocorrem em proposições como particulas de construção de frases e quando aplicados sobre uma proposição têm o poder, além do sintático, de modificar ou não o atributo (o valor de verdade) da proposição original.

3.1 Proposições e Verdades

Como mencionado anteriormente, proposições carregam como um dos atributo a noção de verdade. Desse modo, devemos averiguar o que são proposições (ou pelo menos, como são entedidos neste texto) e como interagem com a noção de negação e condicional - sem perder a referência do atributo que carregam. Em seguida, tratamos da noção de verdade.

3.1.1 Proposições

Estamos lidando com *sistematizações de conceitos*, utilizando a forma escrita para nos expressarmos. Logo, devemos esclarecer como expressamos conceitos.

Dentre as várias propostas, a que adotamos, pelo menos neste texto, diz que *conceitos* são as *intensões que estão associadas aos predicados*. O *significado* de um predicado (a sua intensão) determina a sua *extensão*[6]. Isso nos permite agrupar *coisas* (*indivíduos*) num mesmo conjunto usando diferentes conceitos e, portanto, podemos nos referir as mesmas coisas por meio de conceitos distintos, de acordo com os diferentes modos de significação.

Logo, conceito e predicado estão intimamente relacionados. O predicado em expressões da forma *sujeito + predicado* exerce dois papéis: refere ou introduz o conceito na expressão e é também responsável pela conexão predicativa. Há então uma relação de dependência mútua entre sujeito e predicado, funcionam como complemento um do outro. Chamamos de *proposição* o cumprimento dessa *complementaridade*, [Strawson, 1974].

Uma proposição afirma uma relação de termos, a Figura 1 mostra essa relação:

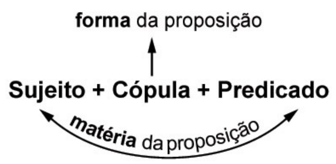


Figura 1: Forma gramatical das proposições.

Evidentemente, essa *definição* para o que seja uma proposição não esgota o assunto. Os termos aqui delineados visam apenas situar o leitor quanto ao seus respectivos usos como jargão das áreas de lógica e matemática, que está longe de ser consenso mesmo entre especialistas das áreas.

De fato, essa caracterização para proposição nos auxilia no questionamento do papel da negação e condicional em sistemas lógicos. Por exemplo, em relação à negação, podemos nos perguntar: *como a negação atua numa proposição?* A negação é uma possibilidade para o predicado mas não para o sujeito? Respondemos, pelo menos em parte, a essas e outras questões na Seção 4, no âmbito dos sistemas lógicos.

3.1.2 Noções de Verdade

A noção usual de verdade assumida para a lógica clássica é a de Tarski que satisfaz o que chamamos de esquema T. Não entraremos nos detalhes técnicos do esquema, mas a idéia pode ser entendida por meio de um exemplo clássico: *a neve é branca* é verdadeira se, e somente se, a $\overline{\textit{a neve é branca}}$. Isto é, uma proposição φ que descreve um dado fato é verdadeira se, e somente se, tem-se o dado fato $\overline{\varphi}$. Não se trata de uma definição propriamente dita, mas fornece condição *sine qua non* que qualquer *definição* (caracterização, esclarecimento) deve satisfazer, [Costa, 1997].

A idéia de Tarski é a de considerar o conceito de verdade como uma relação entre proposições de uma linguagem e a estrutura (modelo) na qual esta linguagem está interpretada. Note-se aqui o comprometimento do conceito de *conseqüência lógica*[7]. Nesse caso, é necessário supor (crer) que tal linguagem possui estrutura bem definida, uma vez que a relação estabelecida pela formulação é no sentido matemático. Desse modo, o uso do esquema T como *definição* de verdade é adequado em estabelecer *relações* entre *linguagens artificiais* e certas *estruturas matemáticas* (*modelos*).

Como destacamos anteriomente, um sistema lógico é uma *linguagem artificial*, uma estrutura lingüístico-formal, desse modo, possui uma componente *sintática*, uma componente *semântica* e um *conjunto de regras* que trata das formas de ocorrências dos elementos sintáticos (*p.ex.*, dos conectores de frases: negações e condicionais). As regras determinam as formas de *composição* e *interpretação* dos elementos das componentes. A *composição* trata das construções sintáticas e das formulações gramaticais sintático-semânticas e a *interpretação* trata dos aspectos semânticos, em geral, via noção de *verdade*.

Deve estar claro que uma tal noção de verdade, subdeterminada pela concepção de Tarski, impõe considerações diferentes das semânticas no sentido normalmente aceito, [Mulligan, 1992]. Ou seja, sob a concepção de Tarski a *semântica* dos sistemas lógicos, pelo menos dos clássicos, é a da Teoria de Modelos - *do estudo de linguagens formalizadas e suas interpretações em estruturas matemáticas* (ou seja a noção de conseqüência lógica é *modelo-teórica*). Nesse caso, verdade é concebida em termos de uma relação entre a linguagem e a realidade (uma realidade capturada em modelos), mas em termos das estruturas em que sentenças são verdadeiras.

Note-se que essa postura de querer *saber se as proposições são verdadeiras em um modelo*[8] *qualquer* é muito distinta daquela em que se deseja *saber se as proposições são verdadeiras no mundo real.* Aliás, a *aprioridade* (ou *anterioridade*), uma das características atribuída à conseqüência lógica (tarskiana ou não) determina a independência da consequência lógica de conhecimentos individuais ou prévios, do grau informacional sobre o mundo (real) ou do significado dostermos, de relações de conteúdo ou qualquer tipo de experiência referente aos fatos expressos pelas premissas e conclusão, [Henkin et al., 1959, pág. 30-37].

Uma outra proposta de teoria da verdade é a *pragmática* de Peirce, [Peirce, 1965]. A verdade pragmática de uma proposição depende de seus efeitos práticos, supondo-se, naturalmente, que esses efeitos sejam aceitos como verdadeiros, ou não verdadeiros, no sentido ordinário do termo verdade. Mikenberg, da Costa e Chuaqui (1986) introduziram uma formulação da noção de verdade pragmática via proposições básicas, de tal sorte que uma asserção (hipótese ou teoria) pode ser tida como pragmaticamente verdadeira se suas conseqüências básicas são verdadeiras, no sentido de uma Teoria da Correspondência (*p.ex.*, a de Tarski), [Abe, 1991].

Para Mikenberg, da Costa e Chuaqui, essa interpretação do *dictum* de Peirce constitui a essência da Teoria da Verdade de Peirce, ([Abe, 1991], [D'Ottaviano and Hifume, 2007]). Ou seja, a verdade pragmática (fundada em suas conseqüências básicas ou efeitos práticos) não se mostra completamente independente no sentido de correspondência com a realidade (no sentido de Tarski). Segundo os autores não se trata de uma exegese da posição peirciana, o fato é que a definição dada por eles capta aspectos relevantes e significativos da doutrina da verdade de Peirce, ([Mikenberg et al., 1986], [Abe, 1991]).

Não enveredamos pelas questõe filosóficas, no entanto, para atender aos nossos objetivos, traçamos um comparativo, digamos, estrutural das noções de verdade tarskiana e peirceana. Essa distinção estrutural destaca a diferença entre os termos *pragmáticamente verdadeiro* e *verdadeiro* (respec., *pragmaticamente não verdadeiro* e *não verdadeiro*) - tratamos essa formalização com maiores detalhes na Subseção4.1.

3.2 Negação e Condicional

A negação é um recurso presente em qualquer forma humana de comunicação, [Horn, 1989]. Em qualquer *linguagem natural*[9] (escrita) a ocorrência da negação é caracterizada pelo uso de algum tipo de *marcador*. De fato, não há linguagem natural (escrita) que *marque sentenças positivas* em lugar das *negativas*, [Dahl, 2010]. Essa estratégia para expressar negação, via marcadores, é também utilizada nas linguagens formais, o resultado, em geral, é uma linguagem-objeto simétrica entre expressões positiva e negativas.

Nas linguagens naturais expressões afirmativas e negativas não ocorrem de forma simétrica, desse modo uma expressão obtida pela *negação aplicada a uma expressão negativa*[10] pode não ter o mesmo *status* da respectiva expressão em sua forma positiva. Ou seja, a negação internalizada em linguagens artificiais torna-a muito distinta da forma como ela atua nas linguagens não artificiais - expomos maiores detalhes na Subseção 4.1.4.

As condicionais são usualmente expressas na forma *se ..., então ...*[11], e, assim como a negação, ocorrem em diferentes formulações e variando quanto à forma e uso. As formulações das frases condicionais, elas podem ocorrer, por exemplo, nas formas *assertativa* (*se chover, eu não irei ao cinema*), *imperativas* (*se o paciente melhorar, troque a medicação*) ou *interrogativas* (*se você sair, irá passar pelo mercado?*) - para uma taxionomia mais detalhada recomendamos [Woods, 1997].

Quanto ao uso, podem servir para a construção de diferentes formas de *decisores* para escolhas, por exemplo, de ações a praticar, atitudes a tomar e crenças a adotar, [Sanford, 1989]. As condicionais também são utilizadas para expressar *argumentos*. Interessa nos essa última forma de uso, pois a lógica (como disciplina) ocupa-se, entre outras coisas, em avaliar *argumentos válidos*.

Por exemplo, no caso da *validade dedutiva* (note-se que essa nomenclatura permite conceituar a classe das *validades não dedutivas*), a propriedade da validade de um argumento está relacionado com o fato de uma ou mais proposições serem *consequência* (*dedutiva*) de outra ou outras. E, apesar da *validade* (de qualquer natureza) não ser a única propriedade interessante de um argumento, é ela que possibilita o, digamos, *início da conversa* - se um argumento não é sequer válido, então não pode ser coisa alguma (em termos lógicos). Tratamos da condicional em maiores detalhes na subseção 4.1.5.

3.3 Lógicas e Sistemas Lógicos

O termo *lógica* é frequentemente usado em várias acepções, as vezes denota uma disciplina (uma área de estudo) e outras vezes é sinônimo de *sistema lógico* (uma *estrutura matemática*). Como disciplina há pelo menos uma que usualmente é chamada de *lógica clássica* e como sistema a estrutura clássica usual é o *Cálculo de Predicados de Primeira Ordem* (CPPO), com ou sem *igualdade*, tendo o *Cálculo Proposicional Clássico* (CPC) como seu subsistema. Doravante utilizamos o termo lógica pra nos referirmos à área de estudo e o termo sistema lógico para nos referirmos tanto à uma ferramenta (vide nota sobre axiomatizaçãoes) de uso prático para estudos dos conceitos aqui porpostos quanto a um dos objetos de estudo da lógica.

A imagem contemporânea da lógica (como disciplina), pelo menos de como ela é vista fora do círculo de especialistas, é a da *lógica matemática* - uma disciplina da matemática. Nesse contexto, o que as pessoas vêem subjacente à lógica são os métodos utilizados pelos matemáticos, que supostamente incorporam a *dedução* como principal ferramenta de *validação de verdades*. De fato, é preciso esclarecer que o matemático em seu exercício profissional diário não está atado ao método dedutivo. Como qualquer profissional de outras áreas do conhecimento faz uso, quando necessário, de experimentos, de métodos abdutivos e indutivos. Porém, a forma como o matemático divulga seus resultados, suas descobertas ou invenções, exibe claramente uso do método dedutivo.

A lógica contemporânea, em seus diferentes papéis, emerge em várias áreas do conhecimento, por exemplo em economia - vide [Tsuji et al., 1988], física - [Weingartner, 2010], biologia - [Duan et al., 2000], linguística - [Moss and Tiede, 2007], computação - [Halpern et al., 2001] e filosofia - [Garson, 2006]. Esse cenário indica que a lógica não está unicamente ligada à matemática (fundindo sua linguagem e métodos à linguagem e métodos da matemática, abarcando entre seus objetos de estudo, por exemplo, a Teoria da Recursão, a Teoria de Modelos e os Fundamentos da Teoria dos Conjuntos).

Essa *intromissão* da lógica em diferentes áreas do conhecimento por intermédio de diferentes sistemas lógicos (sistemas como *estruturas lingüístico-formais*) exibe também a ligação da lógica com a *lingüística* - como instrumento de compreensão e comunicação *no/do* meio da qual emerge. Desse modo, parece natural o interesse da lógica (como disciplina) em ter como objetos de estudo os sígnos, ícones, índices e símbolos, isto é, incorporar (ou ser incorporado) a semiótica de Peirce, ([Peirce, 1965, Chapter 7], [Peirce, 2000]).

A idéia deste texto é a de colocar frente-a-frente os sistemas lógicos correntes e os sistemas lógicos peirceanos para averiguar as diferenças, sejam elas na metateoria dos sistemas (na concepção de conceitos, como, o de sígno, negação e condicional) ou na estrutura interna dos sistemas (tecnicalidades específicas de elementos sintáticos, regras sintáticas e semânticas da linguagem-objeto).

Como já ressaltamos anteriormente, o procedimento comparativo é de caráter técnico, não adentramos nas questões da filosofia das lógicas, [Haack, 1978], o que temos como objetos comparáveis (em seus aspectos formais) são os sistemas lógicos (como estruturas lingüístico-formais) contendo ou não elementos sígnicos (no sentido peirceano). Na Seção 4 discorremos sobre elementos da metateoria e sobre os princípios básicos, associados à negação e condicional, que formam a base das sistematizações em lógica (como disciplina). Os objetos das sistematizações, os sistemas lógicos, digamos, clássicos e não-clássicos, são tratados nas seções 5 e 6, respectivamente.

4 Sistemas Lógicos

Ocupamos esta seção para discorrer sobre alguns aspectos da metateoria da lógicas peirceanas e não-peirceanas (a lógica, digamos, usual), Subseção 4.1. Nas subseções seguintes, cuidamos de elementos mais específicos: as noções de verdade sob as ópticas de Tarski e Peirce, Subseção 4.1.1; alguns princípios básicos, Subseção 4.1.2, e os mesmos princípios sob a interpretação de Peirce, Subseção 4.1.3. Nas subseções 4.1.4 e 4.1.5 especificamos os papéis e delimitações da negação e da condicional, respectivamente.

4.1 Metateorias

Em termos leigos, é óbvio (e vago) dizer que a *construção de um sistema lógico reflete, entre outras coisas, aquilo que o designer entende como sendo lógica.* Nesse sentido, os fundamentos (e suas justificativas) estão fora do sistema lógico, encontram-se na *metateoria*[12].

O estudo de aspectos semânticos de certas teorias (*p.ex.*, a lógica usual ou a de Peirce) via alguma definição de verdade (*p.ex.*, a *correspondencial* de Tarski ou a *pragmática* de Peirce), tem seus fundamentos em alguma teoria de conjuntos (*p.ex.*, na teoria ZFC[13]). Dessa forma, no nível metateórico, é imprescindível que as demonstrações sejam corretas, isto é, se operamos com o símbolo de *pertinência* ($\in$ como elemento primitivo), então sua manipulação deve seguir os postulados conjuntistas que o governam, [Costa, 1997].

De fato, sempre há uma disciplina, a metamatemática, que se ocupa, de modo informal e intuitivo, dos sistemas simbólicos que constituem a contraparte formalizada dos sistemas conceituais (da matemática), [Costa, 1997]. Ou seja, há uma prática inseperável do processo de formalização (seja ela por meio de axiomatização ou não) que não se deixa reduzir à axiomatização. Trata-se de uma atividade, digamos, informal (fora da formalização) que se constitui essencialmente em crítica de idéias, de pressupostos, da linguagem; de natureza estritamente aclaratória, [Costa, 1997].

Para compreendermos como as noções de negação e condicional são entendidas pelas lógicas usual e peirceana devemos estabelecer qual a metamatemática de cada abordagem. No caso da lógica usual podemos tomar a teoria ZFC (aquela na qual se funda a matemática usual), resta-nos esclarecer a contraparte peirceana, fazemos isso na próxima subseção.

4.1.1 Verdades: Tarski e Peirce

Sob a óptica da teoria da verdade de Tarski, as linguagens são interpretadas em estruturas (modelos), isto é, *φ é verdadeira sob uma interpretação* $\mathtt{I}$. Um modelo é composto por um universo (conjunto) U (não vazio) e um conjunto de relações $\mathcal{R}$ sobre U) - se x, $y \in U$ e $R \in \mathcal{R}$, então ou $(x, y) \in R$ ou $(x, y) \notin R$, não ocorrendo nenhuma outra possibilidade. Isso ocorre pela formulação da noção de verdade de Tarski na metateoria, isto é, na linguagem da teoria de conjuntos (neste caso ZFC). A seguir veremos que também a noção de verdade pragmática peirceana, pelo uma versão formalizada, pode ser expressa adequadamente (via definição de relação parcial n-ária) em ZFC.

Na formulação da verdade pragmática peirceana, devida a Mikenberg, Costa e Chuaqui, [Mikenberg et al., 1986], se x, $y \in U$ e $R \in \mathcal{R}$, podemos ter $(x, y) \in R$, $(x, y) \notin R$ ou x e y podem não estar definidos para R.

Para obtermos a terceira alternativa devemos reformular (introduzir) o conceito de *relação parcial* no conjunto $\mathcal{R}$ e delimitar (ou pré-estabelecer) o conhecimento sobre

U. Desse modo, é possível extrapolar a noção de verdade de Tarski de tal forma que a noção resultante, matematicamente precisa, é fiel a uma das noções pragmáticas da verdade. Sob essa formulação a *interpretação* é parcial (isto é, não necessariamente total) e existe a relativização a um conjunto $\Phi \subseteq U$ de sentenças *estabelecidas*.

Uma possível definição para *relação parcial n-ária* seria: seja $R \in \mathcal{R}$ tal que $R = \langle R_1, R2, R3 \rangle$ com $R_i \cap R_j = \emptyset$ para $i \neq j$, i, $j \in \{1, 2, 3\}$ e $\bigcup_{i=1}^{i=3} R_i = U^n$ tal que R_1 é o conjunto de n-uplas que sabemos que pertencem a R; R_2 é o conjunto de n-uplas que sabemos que não pertencem a R e R_3 é o conjunto de n-uplas que não sabemos se pertencem ou não a R - se $R_3 = \emptyset$, então R é uma relação usual, [Hifume, 2003, Def. 3.4.1]. A *parcialidade* de R expressa o *conhecimento incompleto* sobre U.

A partir dessas estruturas parciais $\langle U, \mathcal{R} \rangle$ e de conjuntos de sentenças básicas que expressam proposições de nossa experiência, verdadeiras ou não (via Tarski) e de sentenças mais complexas, expressando proposições aceitas previamente, define-se o conceito de *verdade pragmática* numa determinada região do conhecimento (ou numa estrutura): se tudo se passa nessa região (ou estrutura), como se φ fosse verdadeira de acordo com a noção de Tarski. Segundo os autores, essa formulação satisfaz os principais requisitos a que uma definição de verdade pragmática parece condicionada, [Mikenberg et al., 1986].

Desse modo, podemos tomar como metamatemática da verdade pragmática de Peirce, pelo menos sob a perspectiva da *quase-verdade*, a teoria ZFC. Neste ponto devemos fazer uma ressalva, ao adotarmos ZFC como metateoria para a noção de verdade pragmática (via quase-verdade) estamos deixando de lado questões sobre o conceito de *continuidade* de Peirce; que aparentemente não equivale ao conceito cantoriano de continuidade. Não discutimos neste texto as implicações dessa *violação conceitual*. Aceitemos, pelo menos neste texto, que a teoria ZFC funda a noção de verdade pragmática sem maiores danos. Para o leitor interessado, indicamos os textos de Havenel: [Havenel, 2008] e Rosa: [Rosa, 2004].

4.1.2 Alguns Princípios Básicos

Nesta subseção apresentamos alguns dos princípios que regem os papéis da negação e da condicional. Tais princípios são componentes da metateoria.

Dentre os vários princípios adotados na costrução de sistemas lógicos, escolhemos os mais polulares: os princípios da *identidade* (PI), da *não contradição*[14] (PNC), do *terceiro excluído* (PTE) e da *dupla-negação* (PDN); presentes em qualquer discussão que envolva a negação e a condicional. Observamos que não é possível construir, por exemplo, o sistema lógico clássico, [Krause, 2011b].

O princípio da identidade pode ser formulado dos seguintes modos:

Formulaçõs semânticas: (i) uma proposição verdadeira é sempre verdadeira, e uma não verdadeira, sempre não verdadeira; (ii) toda proposição possui um único valor de verdade; (iii) em qualquer contexto, as ocorrências de um dado símbolo devem sempre ter o mesmo sentido; (iv) x não pode ser, sob o mesmo aspecto e ao mesmo tempo, y e não-y. (v) x *é* P e x *não é* P nunca são simultaneamente verdadeiras; (vi) todo objeto é idêntico a si mesmo; (vii) x *é* x.

As formulações anteriores não são equivalentes, logo a formulação adotada deve ser especificada durante o processo de construção do sistema lógico ou deixar isso bem claro pelo contexto, [Krause, 2011b].

Podemos descrever o princípio da identidade sem envolver conceitos semânticos como *verdade*, *denotação*, *sentido*, etc, ficando restrito aos aspectos sintáticos das linguagens - admitindo que as formulações estão de acordo com as linguagens pré-estabelecidas. Então, temos as seguinte formulações sintáticas:

(i) em uma linguagem proposicional: $p \to p$ ou $p \leftrightarrow p$, com p variável proposicional. Poderíamos ter escrito um *esquema*: $\varphi \to \varphi$[15] ou $\varphi \leftrightarrow \varphi$, neste caso

φ é meta-variável da linguagem proposicional;

(ii) em uma linguagem de primeira ordem: $\forall x(x = x)$, aqui x é variável individual da própria linguagem (evidentemente, estamos numa linguagem de primeira ordem com igualdade);

(iii) em uma linguagem de segunda ordem: $\forall P \forall x(P(x) \leftrightarrow P(x)$ com P uma variável para predicados e x uma variável individual; etc.

O princípio do terceiro excluído tem a seguinte formulação semântica: *dadas duas proposições contraditórias, isto é, uma das quais sendo a negação da outra, uma delas é verdadeira.* As formulações sintáticas se apresentam do seguinte modo:

(i) numa linguagem proposicional: $p \vee \neg p$;

(ii) em uma linguagem de primeira ordem: $\forall x(P(x) \vee \neg P(x))$, com P uma constante para predicados monádica, ou então sendo $P(x)$ uma fórmula qualquer tendo x como variável livre (e podendo conter eventualmente outros parâmetros);

(iii) numa linguagem de ordem superior: $\forall P \forall x(P(x) \vee \neg P(x))$ com x variável individual e P variável para predicados monádica.

O princípio da não-contradição segue do seguinte modo em sua formulação semântica: *dadas duas proposições contraditórias, isto é, uma das quais sendo a negação da outra, uma delas é não verdadeira.* Quanto às formulações sintáticas temos:

(i) numa linguagem proposicional: $\neg(\varphi \wedge \neg\varphi)$;

(ii) em uma linguagem de primeira ordem: $\forall x \neg(P(x) \wedge \neg P(x))$ com x variável individual e P uma constante monádica para predicados (ou então $P(x)$ denota uma fórmula qualquer com x como variável livre, eventualmente contendo outros parâmetros);

(iii) em uma linguagem de ordem superior: $\forall P \forall x \neg(P(x) \wedge \neg P(x))$ com x variável individual e P variável para predicados monádica.

O princípio da dupla negação diz que *uma proposição é equivalente à negação de sua negação.* Sintaticamente, numa linguagem proposicional teríamos: $p \leftrightarrow \neg\neg p$.

Há outros princípios como o da conjunção (*adjunção*) que diz que: *dadas duas proposições quaisquer, sempre se pode formar sua conjunção* - exemplos de sistemas *não-adjuntivas* são os *paraclássicos*, o de Jaśkowski e alguns sistemas propostos por Priest (ver [da Costa et al., 2007].

Como se pode perceber, é preciso algum cuidado quando se afirma que vale algum princípio lógico, pois isso depende de qual formulação estamos considerando e a qual lógica estamos nos referindo, [Krause, 2011b]. Note-se que em todos os princípios aqui mencionados o papel (a *forma de atuar*) da negação e da condicional são estabelecidos como *primitivos*, ou seja, *é suposto absolutamente claro*[16] os respectivos papéis.

4.1.3 Peirce e o PI, PTE, PNC e PDN

A seguir damos a interpretação peirceana para os princípios aqui citados. Em relação ao princípio da identidade, adotamos a versão algébrica (da *Álgebra de Cópula*[17]), sem adentrar nas questões filosóficas dos fundamentos dessa álgebra.

Peirce introduz em sua álgebra a expressão: $[\varphi \prec (\alpha \prec \beta)] \prec [\varphi \prec (\alpha \prec \beta)]$, [Peirce, 2010, Pág.: 423], onde o significado de $\prec$ é descrito pelas seguintes proposições:

(i) se x é falso, $x \prec y$;

(ii) se y é verdadeiro, $x \prec y$;

(iii) se $x \prec y$, ou x é falso ou y é verdadeiro.

Observamos que a expressão disjuntiva em (iii) não é exclusiva, ou seja, a leitura para *ou φ ou psi* é *ou φ ou psi ou ambos.* Ainda, num artigo de 1880 *algebra of the copula* (para tratar sua lógica proposicional) Peirce introduz os *ícones de sua álgebra* e o primeiro desses ícones está na fórmula do princípio da identidade, [Peirce, 1986, Pág.: 170]:

> The first icon of algebra is contained in the formula of identity
>
> $$x \prec x$$
>
> This formula does not of itself justify any transformation, any inference. It only justifies our continuing to hold what we have held.

Entendemos (entedimento deste autor) que, neste caso (pelo uso do ícone), a identidade se confunde com a noção de *identidade do objeto* (do *ser do objeto*), uma vez que um ícone (no sentido peirceano) *denota um objeto partilhando características que existem no objeto denotado* (independente da existência do signo). Como conceito matemático, a identidade (o *ser da coisa*) é necessariamente definida sobre estruturas, desse modo a identidade se resume a *ser é ser um objeto* ou *ser é ser um atributo de um objeto* (sobre estruturas). Isto é, se consideramos fixada uma estrutura, então *ser é ser um objeto de uma estrutura.* A natureza de um objeto está inteiramente determinada pela estrutura em que se encontra imerso, [Béziau, 1996].

Mais precisamente, fixado um domínio U e $\mathcal{R}$ conjunto de relações n-árias (cada $R \in \mathcal{R}$ denota um atributo partilhado entre o objeto e o ícone) sobre U, temos uma estrutura $\langle U, \mathcal{R} \rangle$ em que é possível definir o conceito de identidade de um objeto do seguinte modo: dados um objeto a de U e uma relação $R \in \mathcal{R}$ denotamos a identidade de a por: $Id[\mathsf{a}] = \langle Id_e[\mathsf{a}], Id_d[\mathsf{a}] \rangle$, com $Id_e[\mathsf{a}] = \{x \in U \mid (x, \mathsf{a}) \in R\}$ e $Id_d[\mathsf{a}] = \{x \in U \mid (\mathsf{a}, x) \in R\}$. A definição dada é (nossa) generalização (não comprovada) da versão em [Béziau, 1996]. Essa idéia retrata nosso entendimento de como poderíamos (não foi provado) internalizar a identidade (no sentido peirceano, ou pelo menos como entendemos ser peirceano) num sistema lógico interpretada sobre uma estrutura matemática.

Sobre a perspectiva de Peirce sobre PTE e PNC seguimos ([Lane, 1997], Principles of Excluded Middle and Contradiction - End Note). Peirce expressava seus princípios em dois modos o *material* e o *formal*, como segue:

Chamamos de Princípio Peirceano do Terceiro Excluído (PPTE) a seguinte afirmação:

- Modo material: *para qualquer sujeito (individual) e qualquer propriedade, ou o sujeito possui a propriedade ou o sujeito não possui a propriedade.*
- Modo formal: *para qualquer par de predicados contraditórios φ e não-φ e para qualquer sujeito (individual, não genérico) x, ou x é φ, ou x é não-φ é verdadeiro.*

A leitura de PPTE é sobre *objetos individuais*, PPTE fornece uma *condição necessária* da individualidade. O modo material fica: se s denota um individual, então, para qualquer propriedade P, ou s *é* P ou s *não é* P; similarmente o modo formal fica: se s é um termo individual, então, para qualquer predicado P, ou s *é* P é verdadeiro ou s *não é* P é verdadeiro. Desse modo, expressões (sobre casos gerais) como: *alunos de* IA*005 são estudiosos ou alunos de* IA*005 não são estudiosos* só podem ser consideradas verdadeiras ou não apenas na verificação de casos particulares. Ou seja, PPTE não se aplica a proposições gerais (como decisor), porém isto não significa que proposições gerais não são nem verdadeiras nem falsas. Da forma como PPTE está posta, entende-se que *nenhum par de predicados mutuamente contraditórios de qualquer individual são ambos falsos*, ([CP 5.447], [CP 5.448], [Lane, 1997]).

Chamamos de Princípio Peirceano da Não-Contradição (PPNC) a seguinte afirmação:

- Modo material: *para qualquer propriedade e para qualquer sujeito (individual) definido, não é o caso de ocorrer* *ambos do sujeito possuir a propriedade e do sujeito não possuir a propriedade.*

- Modo formal: *para qualquer par de predicados contraditórios φ e não-φ e para qualquer sujeito (individual) definido x, x é φ e x é não-φ não são ambos verdadeiros.*

Para a leitura de PPNC é preciso fazer uma ressalva, a distinção entre as expressões *não é o caso de* (uma forma de negação) e *é falso quando* (outra forma de negação) - no original em inglês: *does not apply to* e *is false with regard to*, respectivamente, [Lane, 1997]. Isto pois, PPNC não se aplica aos termos vagos (*p.ex.*, *ser careca*: *alguns homens são carecas e alguns homens não são carecas* - a proposição é verdadeira), pois para Peirce não é o caso de cada predicado P e todos os sujeitos indeterminados `s`, que `s` *é* P e `s` *não é* P não ser ambos verdadeiros. Ou seja, PPNC não se aplica ao termo indefinido (vago), porém não significa que *proposições indefinidas (vagas) são verdadeiras e falsas*, [Lane, 1997].

A seguir expomos o papel da negação num sistema lógico. Em particular, a Figura 2 pode ajudar a entender a interpretação diferenciada de Peirce sobre PI, PNC e PTE.

4.1.4 Ocorrências da Negação

A negação é internalizada em sistemas lógicos por meio de um *conectivo verofuncional* (maiores detalhes na Subseção 5.1.2) de tal sorte que a negação de uma proposição, pelo menos em sistemas clássicos, satisfaz as seguintes condições em relação ao conjunto associado à propriedade (atributo) de um dado objeto x (aqui a negação ocorre sobre a propriedade).

- a união do conjunto associado à propriedade de x e do conjunto associado à sua negação devem incluir tudo,
- a intersecção do conjunto associado à propriedade de x e do conjunto associado à sua negação deve ser vazia.

Desse modo é plausível, pelo menos é o que ocorre nos sistemas lógicos clássicos, a adoção de princípios como PNC e/ou PTE e/ou PDN (e/ou as respectivas versões peirceanas). Tais princípios restringem o papel da negação, deixa de atuar como o faz nas linguagens naturais, ao de partícula responsável somente por gerar *oposição* ou *contrariedade*[18].

As tentativas para ampliar o papel da negação, de forma a aproximar o modo como a negação atua nas linguagens naturais, não são recentes, as primeiras alternativas foram propostas pelos estóicos: *modificando o escopo do operador negação*, [Horn, 1989]. No entanto, em sistemas como CPPO a ocorrência de quantificadores causa um problema se o escopo da negação não for restrito: como *decidir qual parte da proposição deverá ser negada pelo operador negação?*. Por exemplo, considere a expressão: *todo mundo ama alguém um pouco às vezes*, não é evidente o que está sendo negado.

Devido a forma diversificada como a negação se manifesta nas linguagens naturais tentou-se um outro modo de delimitar sua atuação: a de *alegar que o papel da negação é o de gerar o equivalente à afirmação da falsidade*[19] - este modo de uso está registrado em textos clássicos como o *Principia Mathematica* (Russell e Whitehead, 1910) e o *Introduction To Logical Theory* (Strawson, 1952), entre outros. Nos dias de hoje, essa alegação não é considerada adequada. *Confundir* (*igualar*) o uso do operador negação (regra sintática) com a *afirmação da não veracidade* (regra semântica).

Há propostas atuais que redefinem a negação em sistemas lógicos (em geral, em dois tipos: uma forma forte e outra fraca - *p.ex.* em [Costa, 1963], [Jaśkowski, 1969], [Reyes et al., 1994]), para que ela (ou elas) se aproxime(m) do modo como ocorre(m) nas linguagens naturais, no entanto a forma padrão dos sistemas em uso é o da negação como ela ocorre em CPPO, muito distinta da negação utilizada nas linguagens do dia-a-dia.

A seguir, Subseção 4.1.5, apresentamos o papel da condicional em sistemas lógicos, com isso completamos o quadro básico. Mostramos o *quadrado das oposições* de Aristóteles, Figura 2, que fornece uma idéia de como condicional e negação estão ligadas.

4.1.5 Ocorrências da Condicional

Tanto a lógica usual quanto a de Peirce utilizaram os silogismos aristotélicos como objetos de estudo, desse modo, é a partir desse ponto comum que iniciamos esta seção.

O *silogismo hipotético* pode ser visto como uma forma de inferir uma proposição condicional da forma *se* φ*, então* ψ das proposições condicionais *se* φ*, então* ς e *se* ς*, então* ψ dadas como premissas. Esquematicamente: $\dfrac{\begin{array}{c} \textit{se } \varphi\textit{, então } \varsigma \\ \textit{se } \varsigma\textit{, então } \psi \end{array}}{\textit{se } \varphi\textit{, então } \psi}$

Um silogismo pode conter quatro tipos de proposições: A (*universal afirmativa* - esquema SaP -, exemplo: "todo S é P"); E (*universal negativa* - esquema SeP -, exemplo: "nenhum S é P"); I (*particular afirmativa* - esquema SiP -, exemplo: "algum S é P"); O (*particular negativa* - esquema SoP -, exemplo: "algum S não é P"). Os nomes dos esquemas A, I, E e O são as vogais das palavras latinas A*ff*I*mo* e *n*E*g*O, surgiram durante a idade média juntamente com palavras mnemônicas para a memorização das várias *figuras dos modos de silogismos.*

O *quadrado das oposições*, Figura 2 - originalmente formulada por Apuleio -, fornece uma idéia de como negação e condicional atuam juntas. No quadrado, o uso dos termos *contrárias* e *contraditórias* ocorre por deficiência da lógica aristotélica, incapaz de explicar *convenientemente* o caso da negação de proposições do tipo A. Tomemos a proposição "todos os homens são mortais". Intuitivamente, segundo a visão aristotélica, a negação (feita de modo *ingênuo*) desta afirmação é "nenhuns homens são mortais". Aristóteles, no entanto, entendeu que tal negação não é a negação completa da proposição original. Por conta disso, chamou as duas proposições (a original e sua suposta negação) de *contrárias*, mas não de *contraditórias.* A *negação completa* da proposição original é "alguns homens não são mortais", para Aristóteles esta é a proposição contraditória à original. Desse modo, proposições contrárias não podem ser ambas verdadeiras, mas podem ser *ambas falsas* e as proposições contraditórias não podem ser ambas verdadeiras, nem falsas (exceto para universais vazios). Ainda, as *subcontrárias* (vide Figura 2) não podem ser ambas falsas, mas podem ser *ambas verdadeiras.*

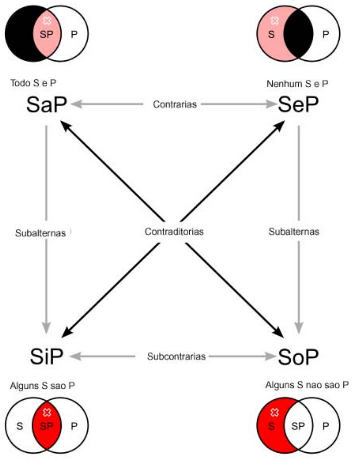


Figura 2: Quadrado das oposições.

A lógica aristotélica explica semanticamente o motivo de "alguns homens não são mortais" ser a a negação completa de "todos os homens são mortais", mas não apresenta uma explicação sintática. Vejamos como isso se procede: note-se que somente a proposição "alguns homens não são mortais" nega simultaneamente a qualidade (substitui a afirmativa original por uma negativa) e a quantidade (substitui "todos" por "alguns") da proposição original. A proposição "nenhuns homens são mortais" nega apenas a qualidade, não a quantidade (não substitui "todos" por "alguns"). Esse tipo de explicação não esclarece o fenômeno sintático do operador de negação.

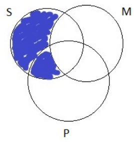
Por outro lado, a lógica clássica permite explicar tal fenômeno sintaticamente.

Definido um universo de coisas onde podemos destacar *coisas que são homens* e *coisas que são mortais*, escrevemos a proposição "todos os homens são mortais" como: $\forall x(H(x) \rightarrow M(x))$, com $H(x)$ denotando *x é homem* e $M(x)$ denotando *x é mortal*. Desse, como o escopo do operador negação quando aplicado a uma proposição é toda a proposição temos que a negação de $\forall x(H(x) \rightarrow M(x))$ é $\neg(\forall x(H(x) \rightarrow M(x)))$ ou seja $\exists x \neg(H(x) \rightarrow M(x))$ que pode ser escrito como: $\exists x(H(x) \wedge \neg M(x))$ cuja tradução é "alguns homens não são mortais".

Além de mostrar como a negação atua nas proposições, o quadrado de oposição revela os modos de silogismos que se referem aos esquemas válidos de inferência. A forma básica de um silogismo é: $\dfrac{\begin{array}{l}\texttt{premissa maior}\\ \texttt{premissa menor}\end{array}}{\texttt{conclusão}}$, *p. ex.*, $\dfrac{\begin{array}{l}\texttt{todo homem é mortal}\\ \texttt{Sócrates é homem}\end{array}}{\texttt{Sócrates é mortal}}$. O termo que se repete na premissa maior e menor é chamado de *termo médio*, os outros são termos *extremos*. Dados `S` e `P` como termos extremos e `M` como termo médio, temos as seguintes quatro combinações possíveis: $\dfrac{\begin{array}{l}\texttt{M - P}\\ \texttt{S - M}\end{array}}{\texttt{S - P}}$, $\dfrac{\begin{array}{l}\texttt{P - M}\\ \texttt{S - M}\end{array}}{\texttt{S - P}}$, $\dfrac{\begin{array}{l}\texttt{M - P}\\ \texttt{M - S}\end{array}}{\texttt{S - P}}$ e $\dfrac{\begin{array}{l}\texttt{P - M}\\ \texttt{M - S}\end{array}}{\texttt{S - P}}$; chamadas de figuras 1, 2, 3 e 4; respectivamente.

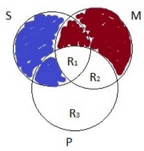
Combinando os quatro tipos de proposições com cada uma das figuras teríamos 64 formas de silogismos, no entanto, nem todas seriam formas válidas. De fato, apenas 19 combinações geram formas válidas, damos aqui dois exemplos de formas de silogismos válidas: AAA-1 (todas as proposições ocorrem na figura 1 e todas são do tipo A) cujo mnemônico é *Barbara* e EIO-1 (as proposições ocorrem na figura 1 e são do tipo E na premissa maior, I na premissa menor e O na conclusão) cujo mnemônico é *Ferio*.

Podemos avaliar a validade do silogismo em Barbara em termos conjuntistas (em ZFC - que é a linguagem que adotamos em nossa metateoria), fazemos isso esquematicamente (via diagramas de Venn):



A partir das premissas "todo S é M"e "todo M é P"podemos eliminar os S*s* que não são P*s*.

Figura 3: Silogismo em Barbara - Passo 1.



E, novamente aplicando a premissa "todo M é P", então podemos eliminar os M*s* que não são P*s*. Restaram três subconjuntos R_1, R_2 e R_3, porém como as premissas não informam sobre os P*s* que não são S*s* ($\mathsf{R}_2 \cup \mathsf{R}_3$) ou M*s* ($\mathsf{R}_3$), devemos ignorar tais conjuntos. Restando apenas o conjunto dos S*s* que são M*s* e também P*s* (R_1). Portanto, segue a conclusão: "todo S é P".

Figura 4: Silogismo em Barbara - Passo 2.

Na Seção 6, damos exemplos do tentativas de sistematizar o raciocínio diagramático.

A forma Barbara é a figura central dos modos silogíticos tanto para a lógica clássica quanto para a peirceana. Peirce, a partir de *variantes* de Barbara, monta os esquemas para a *abdução* e ratifica suas idéias sobre a *indução*. Para Peirce, Barbara é a forma representativa da dedução. No entanto, nem tudo se reduz à dedução, como proceder com as outras formas de argumentação? Por exemplo, argumentos baseados em casos (*amostras*)?

Tomemos a forma Barbara: de "todo M é P" e "todo S é M" tem-se que "todo S é P", com M proposição que diz sobre *ser uma bola - numa população de bolas - numa dada urna*. Considere P a proposição que diz sobre *ser uma bola vermelha - na mesma população de bolas - na mesma urna* e, finalmente, P a proposição sobre *ser uma bola de uma amostra randômica da população de bolas, da urna original.* O silogismo em Barbara toma a seguinte forma: "todas as bolas da urna são vermelhas", "todas as bolas desta particular amostra randômica pertencem à urna", portanto, "todas as bolas desta particular amostra randômica são vermelhas". Para Peirce, a premissa maior faz o papel de uma *regra*, a premissa menor o de *caso* particular e a conclusão o de *resultado* do argumento. Um argumento, que neste caso, é, digamos, parte de uma dedução, [Burch, 2010, Seção 3].

Efetuando uma troca entre a conclusão (*resultado*) e premissa maior (*regra*), temos a forma não válida AAA-3 (Barbara na figura 3). Aplicando o argumento baseado em amostra obtemos: "todas as bolas desta particular amostra randômica são vermelhas", "todas as bolas desta particular amostra randômica pertencem à urna", portanto "todas as bolas da urna são vermelhas". Este tipo de argumento - baseado em amostra de uma dada população - é o que Peirce entende ser o cerne dos *argumentos indutivos*, [Burch, 2010, Seção 3]. Apesar de ser um tipo de inferência não necessária, pois mesmo que as premissas sejam verdadeiras a conclusão pode ser falsa (já que AAA-3 é forma inválida); ela (se for, digamos, uma *inferência indutiva confiável*[20]) nos fornece uma boa razão para aceitar a conclusão como verdadeira.

Uma outra situação ocorre se trocarmos conclusão (*resultado*) e premissa menor (*caso*), temos a forma não válida AAA-2 (Barbara na figura 2), isto é, temos o esquema: de "todo M é P" (*regra*) e "todo S é P" (*resultado*) tem-se que "todo S é M" (*caso*). Retomando o exemplo das bolas temos: "todas as bolas da urna são vermelhas", "todas as bolas desta particular amostra randômica são vermelhas", portanto "todas as bolas desta particular amostra randômica pertencem à urna". Note-se que esta forma não é propriamente um *argumento baseado em amostra*, sua forma está mais próxima a de uma *conjectura*. Peirce chamou e esta forma de *argumento abdutivo*, [Burch, 2010, Seção 3].

Na Seção 5, apresentamos os sitemas clássicos que fazem uso da negação e condicional conforme a leitura clássica do exposto na Figura 2. Na Seção 6, apresentamos sistemas lógicos não clássicos em que a negação e/ou condicional ou não atuam de forma clássica, ou se atuam diferem dos clássicos em outros aspectos. A Lei de Peirce será revisitada no âmbito do sistema intuicionista.

5 Sistemas Clássicos

Nesta seção internalizamos os elementos apresentados nas seções anteriores como objetos efetivamente formalizados.

Apresentamos o Sistema Proposicional Clássico (ou Cálculo Proposicional Clássico - CPC) e sua extensão o Sistema de Predicados de Primeira Ordem (ou Cálculo de Predicados de Primeira Ordem CPPO). Nesses dois sistemas negação e condicional atuam de acordo como o entendimento clássico do comportamento delineado na Figura 2.

Qualquer lógica (seja como discplina ou sistema) envolve a fixação de família de linguagens, sem as quais ela não poderia expressar seus conceitos, suas regras, que são, no fundo, cânones lingüísticos. Desse modo, qualquer lógica possui, pelo menos, duas dimensões: a sintática e a semântica, [Costa, 1997]. Nas próximas sebseções apresentamos CPC e CPPO atráves de suas respectivas dimensões: sintática e semântica.

5.1 O Sistema Proposicional

Seguindo os conceitos apresentados nas seções anteriores, definimos o conjunto Φ de *proposições primitivas* referente a um certo domínio. As proposições primitivas tratam dos objetos de um dado universo, Φ contém proposições sobre aquilo que o observador (do mundo real) deseja *tratar por meio da lógica*.

A construção de CPC serve de base para

fixar a notação, nomenclatura e termos comuns a todos os outros sistemas, incluindo os de Peirce.

5.1.1 Sintática de CPC

Construimos o cálculo proposicional clássico sobre Φ definindo a parte sintática como segue: Φ é um conjunto enumerável de símbolos proposicionais $p, p_0, p_1, p_2, \ldots$, q, q_0, $\ldots$, r, $\ldots$; adicionamos os conectivos $\neg$ e $\rightarrow$; e os símbolos auxiliares: parênteses à esquerda e à direita.

Uma *fórmula atômica* é um elemento de Φ. $\mathsf{CPC}(\Phi)$ é o menor conjunto contendo todas as atômicas e tal que se φ e ψ são elementos de $\mathsf{CPC}(\Phi)$, então $(\neg\varphi)$ e $(\varphi \rightarrow \psi)$ também o são. Chamamos de *fórmula* às expressões em $\mathsf{CPC}(\Phi)$, as únicas expressões que nos interessam são as fórmulas de CPC.

As formas de manipulação das fórmulas seguem *esquemas de axiomas* e uma única *regra condicional*. Para quaisquer fórmulas φ, ψ e χ temos os seguintes *esquemas de axiomas* em CPC: A_1: $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$; A_2: $(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$; A_3: $(\neg\psi \rightarrow \neg\varphi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)$.

A regra *modus ponens* (*MP*) é dada por: se φ e $\varphi \rightarrow \psi$, então ψ, para φ e ψ em $\mathsf{CPC}(\Phi)$. Esquematicamente: $\dfrac{\varphi \quad \varphi \rightarrow \psi}{\psi}$.

Uma substituição τ é uma função que associa a cada elemento de Φ uma fórmula em $\mathsf{CPC}(\Phi)$. Escrevemos $\tau[\varphi]$ para indicar o resultado da substituição de cada proposição primitiva p_j que ocorre na fórmula φ por $\tau(p_j)$. Note que se τ é uma substituição e $\vdash \varphi$, então $\vdash \tau[\varphi]$.

Há um processo, que chamamos *prova*, pelo qual podemos obter fórmulas de um determinado tipo em CPC. Uma prova em CPC é uma seqüência finita de fórmulas de $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ tal que para cada j, $1 \leq j \leq m$:

- φ_j é um axioma de CPC ou
- φ_j é obtido por modus ponens a partir de fórmulas anteriores.

Se $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m$ é uma prova em CPC e $\varphi_m = \varphi$, então $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m$ é uma prova de φ em CPC.

Um *teorema* de CPC é uma fórmula φ em CPC tal que existe uma prova para φ em CPC. Se φ é um teorema de CPC denotamos este fato por $\vdash_{\mathsf{CPC}} \varphi$, e quando não houver problemas de ambigüidade escrevemos $\vdash \varphi$.

Colocamos aqui, sem demonstração, alguns teoremas (de fato, esquemas de teoremas) em CPC:

- PI: $\varphi \rightarrow \varphi$;
- PNC: $\neg(\varphi \wedge \neg\varphi)$;
- PTE: $\varphi \vee \neg\varphi$
- PDN: $\neg\neg\varphi \rightarrow \varphi$ e sua recíproca;
- as *Leis de De Morgan*: $\neg(\varphi \wedge \psi) \rightarrow (\neg\varphi \vee \neg\psi)$ e sua recíproca;
- a *Lei de Peirce*: $((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \varphi) \rightarrow \varphi$;
- a *Lei de Scotus*: $(\varphi \wedge \neg\varphi) \rightarrow \psi$.

Não examinaremos esses teoremas, cada um deles tem um efeitos interessante (na metateoria) sobre a negação, a condicional e os princípios básicos. Por exemplo, PNC e PTE expressam, por definição, noções distintas, porém pela lei de De Morgam estes princípios se confundem em CPC. Uma relação menos óbvia (tecnicamente) é a da lei de Peirce com o PTE, apesar da negação não constar explicitamente na lei de Peirce. Neste texto, utilizamos esses teoremas clássicos como indicadores de ocorrências ou não de certas de propriedades associadas à negação, condicional e princípios básicos nos diferentes sistemas lógicos apresentados na seqüência.

5.1.2 Semântica de CPC

A semântica para os elementos sintáticos de CPC estabelece-se com base no conceito de verdade de Tarski, regido pelos princípios PI, PNC, PTE e PDN estabelecido na metateoria, via noção de *interpretação*. Cada um desses princípios internalizado em CPC é uma *tautologia* de CPC: PI: $\varphi \rightarrow \varphi$; PNC:

$\neg(\varphi \wedge \neg\varphi)$; PTE: $\varphi \vee \neg\varphi$ e PDN: $\neg\neg\varphi \to \varphi$ (e sua recíproca).

Na prática, quando nos referimos à *verdade já temos implicitamente* uma *interpretação* (um significado) pré-fixada que *correlaciona* elementos de Φ a $\top$ (*verdadeiro*) ou $\perp$ (*não verdadeiro*). Desse modo, a verdade de uma proposição φ, de uma linguagem, é função de como se interpreta esta linguagem (no *como* elaboramos a sua semântica).

Na construção de sistemas lógicos cada um dos elementos sintáticos, inclusive as regras, tem pré-estabelecido um *significado*, que deve estar de acordo com a noção de verdade de Tarski. Essa correlação possibilita definir a noção de *conseqüência semântica* ($\models$) que permite tratar os conceitos de *verdade* e *validade*. Um dos objetivos da construção de um cálculo como CPC é obter uma descrição sintática de $\models$ construindo um sistema cuja teoria da prova tenha bem definida a relação *conseqüência sintática* ($\vdash$) e tal que suas propriedades operacionais espelham as de $\models$.

Um sistema lógico assim construído é uma *linguagem artificial* que utilizamos para falar sobre as coisas, delineada por princípios (PI), PNC, PTE e PDN) pré-estabelecido na metateoria e atrelada a uma noção de verdade (no caso a de Tarski). Esta noção de verdade *admite oposto* (ou o *contrário*), adequada a sistematizações que consideram o uso de negação (e possivelmente outros conectivos lingüísticos) como recurso para comunicação. O procedimento usual para efetivar tais linguagens artificiais, sistemas lógicos, como formas de comunicação para tratar inferências válidas é o de incorporar à parte sintática os chamados *conectivos de formação de frases verofuncionais*[21] ou *não verofuncionais*[22], [Newton-Smith, 1985].

Mais precisamente, a semântica das fórmulas em CPC(Φ) toma como base uma *função de valoração* ν de Φ em $\{\top, \perp\}$. A função ν pode ser ampliada para qualquer fórmula de CPC(Φ), pois os conectivos de formação de frases são verofuncionais, isto é, basta aplicar em ν o *critério da composicionalidade*. Por exemplo, a semântica de $(\varphi \to \psi)$ depende unicamente da semântica atribuídas a φ e ψ. Dessa forma, podemos tratar em CPC os conceitos de verdade, validade e *conseqüência lógica*.

Eis uma das conseqüências de assumirmos a negagação e a condicional em CPC sob a noção de verdade de Tarski regidos pelo PNC, PTE e PDN: a *interdefinibilidade* da conjunção ($\wedge$) e disjunção ($\vee$), isto é, ambos são definidos como abreviações a partir de $\neg$ e $\to$. Para quaisquer φ e $\psi \in$ CPC(Φ), $\varphi \vee \psi$ e $\varphi \wedge \psi$ são abreviações de $\neg\varphi \to \psi$ e $\neg(\varphi \to \neg\psi)$, respectivamente.

Note-se que, se I_Φ é o *conjunto de todas as valorações de* Φ, I um elemento de I_Φ e φ uma fórmula de CPC, dizemos que φ *é verdadeiro sob uma valoração* I se $\mathrm{I}(\varphi) = \top$ e denotamos por $\mathrm{I} \models \varphi$. Uma fórmula φ *é válida na classe* I_Φ se $\mathrm{I} \models \varphi$ para todo I em I_Φ, e a denotamos por $I_\Phi \models \varphi$. Desse modo, podemos dizer que CPC possui dois níveis de verdade: o de *verdade a partir de uma valoração* e o de *validade lógica* - que no caso de CPC, corresponde a *tautologias*.

As regras fundamentais na análise entre $\vdash$ e $\models$ são as que *preservam a verdade* ou as que *preservam a validade*. Grosso modo, nas regras que preservam a verdade está fixada uma interpretação e nas preservam a validade nada está fixado (tratam de todas as interpretações possíveis). Mais precisamente, dada ψ expressão obtida pela aplicação de uma regra a partir de φ, temos que:

- regras que preservam a verdade são tais que para toda substituição τ a veracidade de $\tau[\varphi]$ leva a veracidade de $\tau[\psi]$, isto é, para toda interpretação I de um conjunto específico I ($I \subseteq I_\Phi$) e para todas as substituições τ, se $\mathrm{I} \models \tau[\varphi]$, então $\mathrm{I} \models \tau[\psi]$.
- regras que preservam a validade são tais que para todo conjunto I de I_Φ e para toda substituição τ a validade de $\tau[\varphi]$ implica na validade de $\tau[\psi]$, isto é, para qualquer substituição τ se $I \models \tau[\varphi]$, então $I \models \tau[\psi]$.

Uma regra que preserva a verdade é *MP*. Podemos entender *MP* em CPC não como *a forma de uma inferência*, mas como um método explícito de enumerar as verdades de CPC. De fato, qualquer regra em um sistema S (formulada em sua *metalinguagem*) que assegure que se as premissas são teoremas de S, então a conclusão (obtida pela aplicação dessa regra) também é teorema de S, é chamada de *regra de inferência* em S. Em CPC, regras que preservam validade preservam a verdade, isto é, as relações geram o mesmo conjunto de fórmulas, portanto os dois tipos de relações são idênticos (estamos usando aqui as propriedades conjuntistas da metateoria).

Eis outra conseqüência da negação e condicional como assumidos em CPC: vale o esquema da *Redução ao Absurdo* que diz que: para provarmos uma proposição φ, é suficiente mostrarmos que a sua negação, $\neg\varphi$, conduz a duas proposições contraditórias, ψ e $\neg\psi$. Como os princípios básicos (em conjunto) não permitem que nenhuma proposição verdadeira pode implicar duas proposições contraditórias, a negação de φ é não verddeira. Portanto, φ é verdadeira. Esquematicamente: $\frac{\neg\varphi \to \psi, \quad \neg\varphi \to \neg\psi}{\varphi}$.

Visto por fora, um sistema assim construído, como CPC, deve possuir propriedades que, digamos, são desejáveis por quem o projetou. Por exemplo, em CPC justifica-se a prática usual de se obter *deduções*, isto é, de manipular condicionais: $\alpha \to \beta$ - assumindo-se α podemos obter β. Mais precisamente: sejam Γ um conjunto de fórmulas, α e β fórmulas quaisquer. Então,se $\Gamma, \alpha \vdash \beta$, tem-se que $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$. Com isso, devemos verificar como se associam os efeitos da manipulação sintática (conseqüência sintática) como a semântica (conseqüência lógica), isto é, temos os metateoremas da correção e completeza. A correção diz que *todo teorema de* CPC *é uma tautologia*, ou seja, se $\vdash \alpha$, então $\models \alpha$. A completeza diz que *toda tautologia é um teorema de* CPC, isto é, *todas as deduções corretas que podem ser expressas no sistema podem de fato ser feitas utilizando uma combinação das regras de inferência fornecidas*, ou ainda, se $\models \alpha$, então $\vdash \alpha$.

Como conseqüência dos metateoremas temos a *consistência de* CPC. Lembrando que: um *sistema* cuja linguagem contenha um símbolo de negação ($\neg$) é *consistente* se não houver fórmula α tal que α e $\neg\alpha$ sejam ambas teoremas em tal sistema. Ou seja, no caso de CPC, tem-se para cada fórmula α, que $\nvdash_{\mathsf{CPC}} \alpha$ ou *not* $\vdash_{\mathsf{CPC}} \neg\alpha$. Caso isso não ocorra, o sistema é dito ser *inconsistente*. Nessas condições, podemos afirmar que CPC é consistente, isto é, nenhuma dedução incorrecta pode ser feita a partir das regras de inferência.

CPC é decidível, isto é, *para qualquer fórmula φ de* CPC *existe um processo construtivo (executável num número finito de passos), para determinar se existe uma demonstração de φ em* CPC. Note-se, o teorema não fornece pista alguma sobre a demonstração de φ, só diz que ela existe.

Esse roteiro de produção do CPC é seguido nos outros sistemas, não vamos repetir o processo em cada um deles, apenas apontar as diferenças, alguns na metateoria outros de natureza interna aos sistemas.

5.2 O Sistema de Predicados

Seguindo o mesmo esquema de CPC apresentamos o CPPO. Na linguagem de CPPO podemos exprimir de forma rigorosa a teoria aristotélica da inferência, podemos traduzir as proposições declarativas categóricas aristotélicas em sintaxe CPPO e interpretá-las em modelos adequados. A seguir expomos a sintaxe e a semântica de CPPO.

5.2.1 Sintática de CPPO

A parte sintática do sistema CPPO é uma extensão do sistema CPC. Os elementos sintáticos de LFO são definidos como segue: um conjunto enumerável de símbolos de variáveis (x, x_1, x_2, ..., y, y_1, y_2, ...); um conjunto enumerável (possivelmente vazio) de símbolos de constantes ($\mathtt{a}$, $\mathtt{a}_1$, $\mathtt{a}_2$, ..., $\mathtt{b}$, $\mathtt{b}_1$, $\mathtt{b}_2$, ...); um conjunto enumerável (possivelmente vazio) de símbolos de predicados (P, P_1^1, P_1^2, P_1^3, ..., P_2^1, P_2^2, ...); um conjunto enumerável (possivelmente vazio) de símbolos de função (f, f_1^1, f_1^2, f_1^3, ...,

f_2^1, f_2^2, ..., g, g_1^1, g_1^2, ...); símbolos para os conectivos: $\neg$, $\wedge$, $\vee$ e $\rightarrow$; símbolos de quantificação: $\forall$ (*quantificador universal*) e $\exists$ *quantificador existencial*; e símbolos de auxiliares de pontuação (,), ,.

Em CPPO, um *termo* é uma expressão que pode ser entendidas como *se referindo a objetos* (*coisas* - sobre as quais fazemos afirmações), Mais precisamente, um termo em CPPO é definido como segue: variáveis e constantes são termos; se f_i^n é um símbolo de função e $t_1, \ldots, t_n$ são termos, então $f_i^n(t_1, \ldots, t_n)$ é um termo; o conjunto de todos os termos é gerado pelos itens anteriores.

A partir da noção de termo, podemos definir o conceito de *fórmula atômica* de CPPO como segue: se P_j^k é um símbolo de predicado e $t_1, \ldots, t_k$ são termos em CPPO, então $P_j^k(t_1, \ldots, t_k)$ é uma fórmula atômica de CPPO. As fórmulas atômicas são *expressões* que podem ser entendidas como as *afirmações básicas*, por exemplo, afirmações sobre certas propriedades de certos objetos. Uma fórmula em CPPO é definida como segue: toda fórmula atômica é uma fórmula em CPPO; se α e β são fórmulas em LFO, então $(\neg\alpha)$, $(\alpha \wedge \beta)$, $(\alpha \vee \beta)$, $(\alpha \rightarrow \beta)$, $(\forall x_i)\alpha$ e $(\exists x_i)\alpha$, com x_i variável qualquer, são fórmulas; o conjunto de todas as fórmulas é gerado pelos itens anteriores.

Assim como em CPC, temos a interdefinibilidade: $(\exists x_i)\alpha$ é uma abreviação para $(\neg\forall x_i)(\neg\alpha)$, com x_i variável qualquer. Note-se que na definição do quantificador $\exists$ está implicito o escopo da negação. A interdefinibilidade da conjunção e disjunção em CPC.

Continuam valendo todas as tautologias e regras caracterizadas em CPC, *mutatis mutandis*, e incluímos a *regra de generalização* (*RG*) dada esquematicamente por: $\frac{\varphi}{\forall x_i \varphi}$, para φ fórmula de CPPO e x_i é qualquer variável. As definições de *prova*, *teorema* são como em CPPO.

5.2.2 Semântica de CPPO

A construção de uma semântica para os elementos sintáticos de CPPO ocorre como em CPC, a partir da noção de *interpretação*. Porém, as noções de verdade necessitam ser redefinidas, isto é feito a partir de um terceiro conceito que não ocorre em CPC: a *satisfação* (aqui entra a necessidade de uma estrutura). Analogamente à CPC, os princípios básicos estão internalizados em CPPO e são todas *tautologias* de CPPO: PI: $\forall x(x = x)$; PNC: $\forall x\neg(P(x) \wedge \neg P(x))$; PTE: $\forall x(P(x) \vee \neg P(x))$; e PDN: $\forall x(\neg\neg P(x) \rightarrow P(x))$ (e sua recíproca); nos útimos três casos P é uma constante para predicados monádica, ou então $P(x)$ é uma fórmula qualquer tendo x como variável livre (podendo conter eventualmente outros parâmetros). E, todas as tautologias em CPC são tautologias em CPPO.

Vejamos como entendemos tais diferenças. Suponha que $\rho_1(x)$ equivale a dizer que "*x é branco*". A instanciação de x por uma constante a nos fornece uma proposição $\rho_1(\mathtt{a})$ que em CPC pode ser classificada como sendo verdadeira ou não. E, como vimo, o valor-verdade correspondente depende da constante a que se estabelece por métodos extra-lógicos.

Desse modo, para dizer se a proposição $\rho_1(\mathtt{a})$ é verdadeira ou não, no caso de qualquer sistema do tipo CPPO, não podemos simplesmente associar uma *interpretação* ao predicado e um *objeto* à constante. Parte do problema está em saber *como* o predicado está associado ao objeto ou em saber com quais objetos está associado. O conjunto dos objetos eleitos por tal associação é dito ser o *domínio da interpretação*.

Considere a seguinte situação: tome como domínio o *conjunto dos humanos*, e o predicado $\rho_2(xy)$ como sendo "x ama y" e sejam b e c as constantes denotando "Beto" e "Carla", então $\rho_2(\mathtt{bc})$ significa "Beto ama Carla". Veja que a ordem dos argumentos pode alterar o valor do predicado, isto é $\rho_2(\mathtt{bc})$ e $\rho_2(\mathtt{cb})$ podem não ter o mesmo valor-verdade. Logo, não é o conjunto dos objetos (associados ao predicado) que determina o valor-verdade, mas a seqüência em que ela está associada ao predicado. Dizemos então que $\rho_2(xy)$ é *satisfatível pela seqüência* bc, mas pode não o ser por cb. Como pode não valer para toda seqüência não é nem uma verdade, nem algo logicamente válido.

Agora, considere $\rho_3(xyz)$ como sendo $''x$, y e z são mortais$''$, desde que todos os humanos são mortais o predicado é satisfeito para qualquer seqüência do domínio. E $\rho_3(xyz)$ é *verdadeira*, pois existe de uma interpretação na qual o predicado é satisfeito para qualquer seqüência sob a interpretação fixada, mas $\rho_3(xyz)$ não é logicamente válida.

Por fim, tomemos o predicado $\rho_3(xyz) \rightarrow \rho_3(xyz)$. Esta expressão é *logicamente válida*, pois é verdadeira não só para a seqüência de todos os humanos mas para qualquer seqüência de quaisquer objetos em qualquer domínio.

Resumindo, uma fórmula φ é *satisfatível* se e somente se existe uma interpretação na qual há uma seqüência de objetos no domínio tal que φ se verifica. Uma fórmula φ é *verdadeira* por alguma interpretação se e somente se para toda seqüência de objetos no domínio da interpretação φ é satisfeita. E, φ é *válida* (ou é uma *tautologia*) se é verdadeira para toda interpretação. Desse modo, a regra de *generalização universal* é exemplo de $''$regras de inferência$''$ em que as verdades (como são) não são preservadas, porém preserva a validade.

Finalmente, sem entrar em maiores detalhes, valem para CPPO os metateoremas da correção, completeza e consistência. A decidibilidade, que vale para CPC, não vale para CPPO. Note-se que embora existam processos de decisão para uma série de casos especiais de CPPO, não existe um processo geral de decisão para todo o cálculo de predicados de primeira ordem. Isto é, não existe um processo construtivo para determinar, para qualquer fórmula φ de CPPO, se existe uma demonstração de φ em CPPO.

A *expressividade* de CPC está restrita a afirmações que podem ser verdadeiras ou não (ou que tomam algum valor numa álgebra, como a de Boole). Isto é, CPC não da conta de tratar a maior parte dos objetos matemáticos, se consideramos como universo de discurso as estruturas matemáticas, tais como o conjunto dos números naturais, números reais, números complexos, etc. Para tratar desses objetos matemáticos fazemos uso da linguagem de CPPO.

Por outro lado, CPPO não deve ser encarado como se fosse apenas um sistema para escrever e verificar mecanicamente demonstrações formais de um domínio particular da matemática. CPPO pode ser interpretada numa classe bastante geral de estruturas matemáticas, e a teoria de tais estruturas é uma espécie de teoria algébrica generalizada, que se aplica igualmente bem a grupos, anéis, campos e muitas outras estruturas familiares, [Kaye, 2007, Pág. 116].

Tratamos os outros sitemas com menos detalhes, uma vez que a base de construção é similar aos sistemas CPC e CPPO.

6 Sistemas Não-Clássicos

Podemos identificar (não se trata de uma definição) um sistema lógico como não clássico se satisfaz pelo menos uma das condições a seguir ([Costa, 1997]): (i) a linguagem utilizada difere basicamente dos sistemas clássicos, especialmente pela sua interpretação semântica - por exemplo: o sistema modal com a semântica de Kripke e o sistema triádico de Peirce; (ii) alguns dos princípios da lógica tradicional (*p. ex*, PI, PTE, PNC e PDN) não valem - por exemplo: no sistema intuicionista PTE não é tautologia e qualquer sistema que considere subjacente os princípios citados sob a óptica de Peirce. Nesta seção apresentamos alguns sistemas lógicos não clássicos.

Nesta seção apresentamos alguns sistemas que não adotam a negação e/ou a condicional conforme entendimento clássico. Inciamos com os sistemas intuicionistas e a partir deles construímos um dos sistemas paraconsistentes, prosseguimos como os multivalorados e o triádico de Peirce, passamos para os sistemas modais e finalizamos com os sistemas dos grafos existenciais de Peirce.

Não nos aprofundamos em cada um dos sistemas, apenas apresentamos sua estrutura inicial para exibir as diferentes formas de atuação da negação e condicional sob a regências dos princípios básicos estabelecidos nas respectivas metateorias.

Sistemas Intuicionistas

A *suposição intuicionista* para a verdade de uma proposição é baseada em *provas construtivas*[23] para a dada proposição. A proposição φ será *verdadeira* (no sentido intuicionista) se houver uma prova construtivai para φ e será *falsa* (no sentido intuicionista) se houver uma prova construtiva para $\neg\varphi$ (isto é, $\neg\varphi$ é verdadeira no sentido intuicionista). Um condicional $\varphi \rightarrow \psi$ é verdadeiro (intuicionisticamente) se temos um método construtivo tal que, de uma prova construtiva para φ, podemos obter uma prova construtiva para ψ. Note-se que estes conectivos não são verofuncionais (logo, não existem *tabelas-verdade*), desse modo não ocorre a interdefinibilidade de conectivos ou quantificadores como em *cpc* e *cppo*, respectivamente. Isto é, os conectivos de conjunção e disjunção necessitam ser definidos da mesma forma que a negação e a condicional.

A veracidade (intuicionista) da *conjunção* de duas proposicões é dada em termos de suas componentes, isto é, $\varphi \wedge \psi$ é verdadeira se, e somente se, há uma prova construtiva para ambas φ e ψ; a conjunção será falsa se houver uma prova construtiva para $\neg\varphi$ ou $\neg\psi$. Analogamente, para a *conjunção* temos que $\varphi \vee \psi$ é verdadeira se, e somente se, há uma prova construtiva para φ ou ψ (ou para ambas); será falsa se houver uma prova construtiva para ambas $\neg\varphi$ e $\neg\psi$.

A lógica intuicionista (como disciplina) em oposição à clássica rejeitam o PTE - que está intimamente relacionado com o *princípio da bivalência* (PB: *que diz que uma proposição só tem dois valores possíveis: ou é verdadeira ou não* - e as provas não construtivas, como as *reduções ao absurdo*.

Os sistemas intuicionistas têm como primitivos os conectivos $\neg$, $\rightarrow$, $\wedge$ e $\vee$, como definidos anteriormente, e *modus ponens* como única regra de inferência. Como todos os conectivos são primitivo (não são interdefeníveis), devemos inserir para cada um deles um grupo de axioma correspondente. Nessas condições, o primeiro sistema que apresentamos é *proposicional implicativo intuicionista* que é composto pelos dois seguintes esquemas de axiomas (relacionados ao condicional): I_1) $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$ e I_2) $(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varsigma)) \rightarrow (\varphi \rightarrow \varsigma))$.

Se incluirmos no sistema anterior os esquemas de axiomas (relacionados à conjunção): I_3) $(\varphi \wedge \psi) \rightarrow \varphi$, I_4) $(\varphi \wedge \psi) \rightarrow \psi$ e I_5) $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow (\varphi \wedge \psi))$; obtemos o *sistema proposicional implicativo conjuntivo intuicionista*.

Se incluirmos os esquemas de axiomas (relacionados à disjunção): I_6) $\varphi \rightarrow (\psi \vee \varphi)$, I_7) $\psi \rightarrow (\psi \vee \varphi)$ e I_8) $(\varphi \rightarrow \varsigma) \rightarrow ((\psi \rightarrow \varsigma) \rightarrow ((\varphi \vee \psi) \rightarrow \varsigma))$; obtemos o *sistema proposicional intuicionista positivo* (SPIP). Note-se que até este momento não ocorre a inclusão da *negação* em nenhum dos três sistemas. Um fato curioso, a lei de Peirce $(((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \varphi) \rightarrow \varphi)$ que não exibe explicitamente o sinal da negação não é teorema em SPIP, para a sua prova (construtiva) é necessário ter $\neg\neg\varphi \rightarrow \varphi$ como teorema em SPIP (o que não ocorre).

O axioma seguinte é chamado de *axioma da negação ao absurdo intuicionista*: I_9) $(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow \neg\varphi)$ geramos o *sistema proposicional implicativo clássico*. Com a inclusão desse axioma ao SPIP temos o *sistema intuicionista minimal de Kolmogorov-Johansson*, conhecido como *sistema* K. Nesse sistema PNC é teorema, porém não vale a lei de Scotus. Isto é, de duas fórmulas contraditórias não se segue qualquer fórmula $((\varphi \wedge \neg\varphi) \rightarrow \psi$ - que é teorema em CPC), mas a negação de qualquer fórmula - $(\varphi \wedge \neg\varphi) \rightarrow \neg\psi)$.

O próximo axioma é a Lei de Scotus: I_{10}) $(\varphi \wedge \neg\varphi) \rightarrow \psi)$ A inclusão desse axioma ao sistema anterior gera o *sistema intuicionista de Brower-Heyting* ou *sistema* BH, [Miraglia, 1987]. Dados dois sistemas, podemos (quando possível) traduzir expressões de um sistema em outro de modo que a propriedade (*p. ex.*, *ser demonstrável*) que a expressão carrega num sistema é interpretada no outro e vice-versa. Desse modo, conforme Glivenko (1929), (*i*) se φ é demonstrável em CPC, então $\neg\neg\varphi$ é teorema em BH (isto é, em BH podemos provar qualquer tautologia de CPC) e (*ii*) se $\neg\varphi$ é demonstrável em CPC, então $\neg\varphi$ é demonstrável em em BH, [Miraglia, 1987].

Se acrescentarmos a BH o terceiro excluído I_{11}) $\varphi \vee \neg\varphi$ obtemos CPC. Com isso, temos $\neg\neg\varphi \to \varphi$ como teorema e segue a lei de Peirce. Essa construção passo-a-passo, a partir da inclusão de esquemas de axiomas, de um sistema minimal até obtermos CPC revela um pouco da natureza metateórica dos sistemas intuicionistas.

O Sistema Paraconsistente C_1

Podemos dizer, informalmente, que um sistema lógico é *paraconsistente* se, e somente se, a *linguagem associada for inconsistente* e *nãotrivial* em relação a um *operador de negação* (p.ex., $\neg$). Isto é, se existir uma *interpretação* $\mathcal{I}$ para a linguagem tal que para alguma fórmula φ da linguagem φ e $\neg\varphi$ são *satisfeitas* por $\mathcal{I}$ (*inconsistência*) e existe fórmula ψ da linguagem tal que ψ não é *satisfeita* por I. Dizemos que uma interpretação $\mathcal{I}$ é *inconsistente* se, e somente se, satisfaz φ e $\neg\varphi$ para alguma formula φ da linguagem dada. E, $\mathcal{I}$ é dita ser *não-trivial* se existe alguma formula φ da linguagem dada tal que φ não é *satisfeita* por $\mathcal{I}$. Desse modo, o PNC não é válido em sistemas paraconsistentes.

Assim como fizemos nos sistemas intuicionistas, não adentraremos nos meandros de cada sistema aqui apresentado. Relatamos como negação e condicionais são internalizados mediante os princípios básicos estabelecidos e tecemos alguns comentários a respeito. Nessas condições, expomos um dos sistemas paraconsistentes C_n, ([Costa, 1963], [Costa, 1974], [da Costa et al., 2007]), o C_1 - *sistema proposicional paraconsistente*.

A linguagem de C_1 possui os conectivos conforme definidos na construção de SPIP, inclusive os axiomas que caracterizam SPIP. Note-se que SPIP é um sistema positivo (não há nenhum símbolo explícito de negação). Definiremos a seguir os operadores que caracterizam C_1: $\circ$, $\neg^*$.

- $\circ$: $\varphi^\circ \stackrel{\text{def}}{=} \neg(\varphi \wedge \neg\varphi)$ e
- $\neg^*$: $\neg^*\varphi \stackrel{\text{def}}{=} \neg\varphi \wedge \varphi^\circ$ (*negação forte*).

O operador $\circ$ trata da possibilidade de aceitarmos ou não o PNC, isto é, φ° diz que φ é *bem comportada* em relação ao PNC. Porém, se este não for o caso, ou seja, vale que $\varphi \wedge \neg varphi$, então φ não é bem comportada. Os axiomas que regem o *bom comportamento* das fórmulas, no sentido do operador $\circ$, são: $\varphi^\circ \wedge \psi^\circ \to (\varphi \wedge \psi)^\circ \wedge (\varphi \vee \psi)^\circ \wedge (\varphi \to \psi^\circ)$ e $\varphi^\circ \to ((\psi \to \varphi) \to ((\psi \to \neg\varphi) \to \neg\psi))$. Ainda, seguindo a idéia sobre o *bom comportamento* das fórmulas de C_1, isto é, de esquemas que não vão contra a intuição paraconsistente temos: $\varphi \wedge \neg\varphi$ e $\neg\neg\varphi \to \varphi$ (ou seja, ambos são xioma de C_1.

Com os axiomas acima e as regras de CPC, temos que os seguinte esquemas NÃO são metateoremas em C_1.

- $\neg\varphi \to (\varphi \to \psi)$;
- $\neg\varphi \to (\varphi \to \neg\psi)$;
- $\varphi \wedge \neg\varphi \to \psi$;
- $\varphi \wedge \neg\varphi \to \neg\psi$;
- $\varphi \to \neg\neg\psi$;
- $(\varphi \leftrightarrow \neg\varphi) \to \psi$;
- $(\varphi \leftrightarrow \neg\varphi) \to \neg\psi$;
- $\neg(\varphi \wedge \neg\psi)$;

Vale em C_1 a seguinte versão da *redução ao absurdo*: se $\Gamma, \varphi \vdash \psi$, $\Gamma, \varphi \vdash \neg\psi$, $\Gamma \vdash \psi^\circ$, então $\Gamma \vdash \neg\varphi$. E, se incluirmos $\neg(\varphi \wedge \neg\psi)$ como axioma em C_1, então teremos CPC. Ainda, em C_1, os conectivos $\to$, $\wedge$, $\vee$ e $\neg^*$ satisfazem todos os esquemas e regras de CPC; também em C_1 vale a lei de Peirce.

Novamente, essa forma de construção de C_1 mostra que é possível obtermos CPC, pela inclusão de certos axiomas a C_1, assim como foi feito com os sistemas intuicionistas. Ou seja, podemos compará-las tecnicamente e enxergar como a negação e condicional são afetados pelos princípios básicos. O estudo técnico (interno aos sistemas) da dicas sobre os conceitose estabelecidos na metateoria.

Sistemas Multivalorados

Durante a idade média, encontramos registros de abordagens multivalorados nos trabalhos de Duns Scotus, William de Ockham e Peter de Rivo. Efetivamente, temos as construções de lógicas trivalentes (trivalorados) devidas a MacColl e Peirce (final do século XIX). No entanto, os sistemas de lógicas polivalentes, como hoje são conhecidos, são devidos a Jan Łukasiewicz (1876-1956). Foi concebido como uma tentativa para investigar as *proposições modais*, isto é, estudar as noções de *possibilidade* e *necessidade* intimamente relacionadas com tais proposições.

As proposições modais investigadas por Łukasiewicz são proposições construídas tendo como modelo uma das seguintes expressões: *é possível que* φ, *não é possível que* φ, *é possível que não* φ - (isto é, *é contingente que* φ) e *não é possível que não* φ - (ou seja, *é necessário que* φ). Łukasiewicz toma a frase *é possível que* φ como *primitiva* e expressa seu significado através de três proposições modais, também consideradas elementares, por razões intuitivas e históricas.

Para Łukasiewicz não é possível uma interpretação, através das tabelas-verdade clássicas, para o *operador possibilidade*, compatível com as três propriedades básicas por ele enunciadas. Desse modo, ele mostra que para dar uma possível interpretação da tabela-verdade para o conectivo proposicional de possibilidade, seria necessário considerar uma semântica para o CPC na qual as proposições pudessem admitir mais valores-verdade que os clássicos verdadeiro e falso [D'Ottaviano and Feitosa, 2003].

Para uma dada proposição φ, Łukasiewicz atribuiu um valor de verdade $\nu(\varphi)$ intermediário entre o valor *verdade* (1) e o valor *falso* (0), o qual denotou 1/2. Desse modo, Łukasiewicz introduz seu *cálculo proposicional trivalente* L_3 cujo comportamento dos operadores é descrito nas figuras 5 e 6.

φ	$\neg\varphi$
0	1
1/2	1/2
1	1

φ	$M\varphi$
0	0
1/2	1
1	1

Figura 5: Tabelas dos operadores *negação* e *possibilidade*, com ($M\varphi =_{def \neg\varphi\to\varphi}$).

$\to$	0	1/2	1
0	1	1	1
1/2	1/2	1	1
1	0	1/2	1

Figura 6: Tabela do operador *condicional*.

Neste sistema vale a interdefinibilidde, isto é, os conectivos de *disjunção*, *conjunção*, *necessidade* e *equivalência* podem ser definidos a partir dos anteriores.

Em CPC o PTE é tautologia, no entanto neste sistema trivalorado $\varphi \vee \neg\varphi$ assume valor 1/2. Isto é, PTE não vale pois há uma terceira possibilidade. Interessante observar que Łukasiewicz em seus estudos, apesar de assumir a existência de um terceiro valor-verdade, distinto dos clássicos, não rejeitou PNC e PTE. Entretanto, sua solução está relacionada com a *negação do princípio metalógico da bivalência*. O leitor poderá encontrar maiores detalhes em [Tarski, 1956a, pág. 38-59].

O Sistema Triádico de Peirce

Peirce concebe o sistema triádico como forma de tratar proposições que não eram nem verdadeiras nem não verdadeiras, ([Fisch and Turquette, 1966], [Lane, 1999]), isto é, Peirce (assim como Łukasiewicz) rejeitava o PB. Os estudos de Peirce sobre sistemas multivalorados são anteriores às publicações de Łukasiewicz (1920) e Post (1921), [Fisch and Turquette, 1966]. Como veremos, alguns dos operadores lógicos de Peirce são exatamente como os de Łukasiewicz e Post, apesar de Łukasiewicz e Post terem desenvolvidos seus estudos de forma independente, [Fisch and Turquette, 1966].

Vejamos como Peirce estabelece a semântica de seu sistema triádico, Peirce define quatro conectivos monádicos e seis diádicos. Os monádicos são ():

φ	$\overline{\varphi}$	$\mathring{\overline{\varphi}}$	$\grave{\varphi}$	$\acute{\varphi}$
V	F	L	F	L
L	L	L	V	F
F	V	L	L	V

Figura 7: Operadores monádicos de Peirce: V = *verum*, L = *limit* e F = *falsum*.

O operador da primeira coluna ($\overline{\mathtt{X}}$) é exatamente o operador negação de Łukasiewicz, os operadores $\grave{\mathtt{X}}$ e $\acute{\mathtt{X}}$ tem seus iguais em Post. A seguir definimos os operadores diádicos:

Θ	V	L	F
V	V	V	V
L	V	L	L
F	V	L	F

Z	V	L	F
V	V	L	F
L	L	L	F
F	F	F	F

Figura 8: Operadores diádicos de Peirce: disjunção e conjunção.

O operador Θ assemelha-se à disjunção de CPC: Θ toma o valor máximo dentre os valores das variáveis a que se aplica, note-se que F < L < V. Analogamente, o operador Z assemelha-se à conjunção de CPC: Z toma o valor mínimo dentre os valores das variáveis a que se aplica.

O operador Y assemelha-se à disjunção de CPC nos casos em que os valores das variáveis são clássicos, nos outros casos assume L. Analogamente, o operador Ω assemelha-se à conjunção de CPC nos casos em que os valores das variáveis são

Y	V	L	F
V	V	L	V
L	L	L	L
F	V	L	F

Ω	V	L	F
V	V	L	F
L	L	L	L
F	F	L	F

Figura 9: Operadores diádicos de Peirce: variantes da disjunção e conjunção

clássicos, nos outros casos assume L.

Φ	V	L	F
V	V	V	V
L	V	L	F
F	V	F	F

Ψ	V	L	F
V	V	V	F
L	V	L	F
F	F	F	F

Figura 10: Operadores diádicos de Peirce

Em uma análise de Turquette, [Turquette, 1972], esses operadores foram introduzidos por motivos de completude (e dualidade), não fica exatamente claro os reais papéis (se atuam ou não como variantes da disjunção e conjunção, respectivamente) desses operadores na lógica triádica.

A lógica triádica é para Peirce ([Hilpinen, 2004, pág. 643]):

> *that logic which, though not rejecting entirely the Principle of Excluded Middle, nevertheless recognizes that every proposition,* S *is* P*, is either true, or false, or else* S *has a lower mode of being such that it can neither be determinately* P*, nor determinately not-*P*, but is at the limit between* P *and not* P. [MS 339, 344r]

Há várias leituras (não concordantes) para os fundamentos do sistema triádico, são três variantes que surgem pela interpretação de L: como *limite*, como *vago* ou como *valor* para tratar proposições modais. Em todos os casos as divergências estão em torno da leitura de confrontados com os princípios PPTE e/ou PPNC (leituras de Peirce acerca de PTE e PNC, respectivamente).

Parece que Peirce não afirma que PPTE não se aplica a proposições que assumem um terceiro valor verdade, ([Fisch and Turquette, 1966], [Lane, 1999]). De fato, o sistema triádico parece feito exatamente para acomodar tais proposições amparados pela negação de PPTE: isto é, se PPTE não é verdadeiro em relação a "S é P", então "S" faz referência a um particular e "S é P"não é verdadeiro nem falso. Logo, o particular a que "S"refere não necessita nem carrega o atributo representado por "P". Esse cenário estpa de acordo com o que Peirce diz sobre *proposições nem verdadeiras nem falsas*, isto é *proposições que aparentemente esperam ser acomodados a conectivos com um terceiro valor verdade.*

A seguir apresentamos uma outra forma de lidar com proposições modais, alterando a semântica atrelada à estrutura lingüístico-formal.

Sistemas Modais

Os sistemas modais exibem várias faces, conforme a leitura dada aos seus operadores podem tratar de epistemologia (servem de ferramenta para a filosofia), de conceitos deônticos (servem de instrumento para o direito), de conceitos temporais (úteis para uso em computação), etc. Uma dessas faces ressurge, com C. I. Lewis (1883 - 1964) que questiona o tratamento da *implicação* (ou *implicação russeliana*: o *condicional material*) que reduz toda sentença da forma *se* φ*, então* ψ para a disjunção $\neg\varphi$ *ou* ψ, com o resultado paradoxal de que se um destes disjuntos é verdadeiro, a implicação como um todo também é verdadeira.

Lewis conjecturou que a *interpretação correta* de *se* φ*, então* ψ é: *é impossível que* φ *seja verdadeiro e* ψ *falso*, empregando assim essencialmente a noção modal de possibilidade. Para axiomatizar a noção de implicação em um *sentido estrito*, Lewis introduziu não um, mas cinco diferentes sistemas ($\mathsf{S1} - \mathsf{S5}$), colocando dessa maneira a pluralidade de sistemas lógicos dedicados a axiomatizar a mesma noção, [D'Ottaviano and Feitosa, 2003]. Uma outra variante para se evitar os paradoxos da implicação é de construir sistemas relevantes (expomos tais sistemas mais adiante). No momento, não tratamos especificamente dos sistemas de Lewis, apenas expomos alguns dos sistemas modais vigentes para mostrar suas estuturas linguístico-formais.

Os operadores modais costumam ser caracterizados como *operadores de necessidade e possibilidade* por serem estas as modalidades mais investigadas, os símbolos usuais para representar tais modalidades são $\Box$ e $\Diamond$, respectivamente. Tais operadores não são verofuncionais, pois, em geral, não se pode determinar a semântica de uma expressão da forma $\Box\varphi$ ou $\Diamond\varphi$, unicamente a partir da semântica atribuída a φ. São exceções: *se* φ *é verdadeira, então* $\Diamond\varphi$ *também é verdadeira*, e *se* φ *é falsa, então* $\Box\varphi$ *também é.* Logo, os operadores modais não podem ser caracterizados a partir dos conectivos clássicos e sua semântica difere da do cálculo proposicional clássico.

Definimos os elementos sintáticos de um sistema modal proposicional (LMP) como extensão de $\mathsf{CPC}(\Phi)$. Considerando a linguagem de CPC e o operador $\Box$ definimos $\mathsf{LMP}(\Phi)$ como sendo o menor conjunto contendo $\mathsf{CPC}(\Phi)$ e tal que se $\varphi \in \mathsf{LMP}(\Phi)$, então $(\Box\varphi) \in \mathsf{LMP}(\Phi)$.

Os esquemas de axiomas de LMP são: todas as tautologias de CPC e $\Box(\varphi \to \psi) \to (\Box\varphi \to \Box\psi)$, para $\varphi, \psi \in \mathsf{LM}(\Phi)$. Além da regra *MP* (adequada a LMP) temos a *regra de generalização modal* (*GM*): $\frac{\varphi}{\Box\varphi}$. Esta regra pode ser entendida como *tudo que é derivável de verdades necessárias é necessariamente verdadeiro*, isto é, *teoremas são verdades necessárias*. Os conceitos de *teorema*, *prova* e *consistência*, em LMP, são introduzidos *mutatis mutandis* como feito em CPC.

Em geral, adota-se a *semântica dos mundos possíveis*[24] (ou *semântica de Kripke*) para as diversas aplicações da lógica modal proposicional, por ser mais intuitiva e oferecer recursos tais que qualquer mudança na axiomática pode ser capturada pelas diferentes leituras do termo *mundo possível.*

Basicamente, a semântica atribuída aos

elementos sintáticos de LMP deve preservar as características de CPC e ser adequada ao operador $\Box$. Entende-se que um dado fato é *necessariamente verdadeiro* se, e somente se, este fato se verifica sob qualquer interpretação. Em termos de *mundo possível* dizemos que $\Box\varphi$ é verdadeiro num mundo w se, se e só se, φ é verdadeiro em todos os mundos w' acessíveis a partir de w. Graficamente:

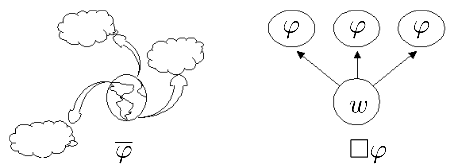


Figura 11: Segue-se o esquema de Tarski: φ descreve $\overline{\varphi}$ e φ será verdadeiro no mundo w se, e só se, φ é verdadeiro em todas as interpretações possíveis, a partir de w. Ou seja, $\Box\varphi$ é verdadeiro em w se, se e só se, φ é verdadeiro sob qualquer interpretação, a partir de w.

A formalização dessa semântica, portanto das noções de *satisfatibilidade* e *validade*, se dá por meio das estruturas de Kripke.

Uma *estrutura de Kripke* M é uma 3-upla $\langle W, \pi_W, \mathcal{R}\rangle$, com π_W *conjunto de todas as interpretações modais referentes aos mundos em* W e $\mathcal{R}$ relações sobre W. A *relação de satisfatibilidade* ($\models$), em LM, associa uma fórmula a uma estrutura e um mundo do seguinte modo:

1) $(\mathrm{M}, w) \models \varphi$ com $\varphi \in \Phi$ se, e só se, $\pi_w(\varphi) = \top$,

2) $(\mathrm{M}, w) \models \neg\varphi$ se, e só se, $(\mathrm{M}, w) \not\models \varphi$,

3) $(\mathrm{M}, w) \models \varphi \to \psi$ se, e só se, $(\mathrm{M}, w) \not\models \varphi$ ou $(\mathrm{M}, w) \models \psi$,

4) $(\mathrm{M}, w) \models \Box\varphi$ se, e só se, $(\mathrm{M}, t) \models \varphi$ para todo t tal que $(w, t) \in \mathcal{R}$.

Para caracterizar as propriedades do operador modal defimos o conceito de fórmulas *válidas em relação a uma estrutura* M e fórmulas *válidas em relação a uma classe* $\mathcal{M}$ de estruturas. Fixado Φ denotamos por $\mathcal{M}$ a *classe de todas as estruturas de Kripke* sobre Φ sem nenhuma restrição sobre as relações $\mathcal{R}$. Assim, dizemos que uma fórmula φ é *satisfeita em* (M, w) se, e só se, $(\mathrm{M}, w) \models \varphi$. Uma fórmula φ é dita ser *satisfatível em relação a* M se $(\mathrm{M}, w) \models \varphi$, para algum mundo w em W de M. Uma fórmula φ é *satisfatível em relação a uma classe* $\mathcal{M}$ se φ é satisfatível em alguma estrutura M de $\mathcal{M}$ ($(\mathcal{M}, \mathrm{M}) \models \varphi$). Dizemos que φ é *válida em relação a uma estrutura* M ($\mathrm{M} \models \varphi$), se $(\mathrm{M}, w) \models \varphi$, para todo w ($w \in W$). A validade de uma fórmula φ em relação a uma classe $\mathcal{M}$ ($\mathcal{M} \models \varphi$), ocorre se φ for válida em todas as estruturas M de $\mathcal{M}$.

A semântica de LMP, caracterizada pela noção de mundo possível (uma *estrutura relacional* ou *grafo*) engloba a semântica de CPC. Nos sistemas modais os problemas de *model-checking* e validade são decidíveis. O que é um tanto quanto surpreendente, tendo em conta que os sistemas considerados, a despeito de sua sintaxe proposicional, é essencialmente uma linguagem como a de CPPO, leve-se em conta que os problemas mencionados para esta linguagem são problemas computacionalmente difíceis (a indecidibilidade da linguagem de primeira ordem é robusta).

O Sistema dos Grafos Existenciais

Uma das finalidades dos *Grafos Existencias* (GEs) de Peirce está em representar iconicamente as operações do pensamento. A *iconicidade* não decorre apenas do fato do sistema dos GEs utilizar representação pictórica e nem por utilizar notação de tipo algébrico (por exemplo, as álgebras que o próprio Peirce criou - tal notação é icônica). A iconicidade dos GEs é reflexo do privilégio atribuído por Peirce à geometria por relação à álgebra [CP. 4.368], [Rosa, 2004, pág. 70].

O sistema dos GEs divide-se em três partes: (*i*) a parte *alfa* que corresponde a CPC; (*ii*) a parte *beta* que corresponde a CPPO; e a (*iii*) a parte *gama* que abarca as linguagens de ordem superior, a *lógica das abstrações*, considerações metateóricas das partes alfa e beta e, finalmente, a lógica modal. Peirce não completou a parte gama, desse modo não consegiu estabelecer completamente a relação entre lógica e continuidade geométrica, [Rosa, 2004, pág. 73].

Um grafo é um diagrama numa superfície, composto por uma folha (chamada de *Folha de Asserção - FA*, cada plano da folha é considerado um grafo) sobre a qual são escritos *spots* ou algo equivalente, linhas de conexão e, se necessário, cortes, [CP. 4.419]. A parte alfa está restrita ao uso de letras, correspondem às variáveis proposicionais de CPC; são os grafos atômicos. Note-se que o primeiro grafo é a folha, se escrevermos uma letra na folha esta inscrição também é um grafo. Se considerarmos somente a letra escrita teremos um grafo parcial, onde o todo é a folha com a inscrição. Um *corte* divide o plano da *FA* em duas *regiões distintas*, a região no interior do corte é chamada de *área do corte*, que é um grafo. O corte (a curva fechada - vide Figura 12) em si *não* é um grafo. Finalmente, um corte na área de um corte é um *duplo corte*. Estes formam os *sígnos primitivos* do sistema alfa.

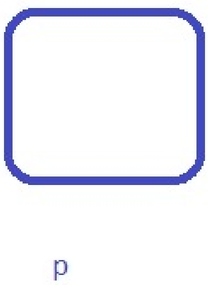


Figura 12: Exemplo: grafo existencial alfa.

As regras da parte alfa que definem um grafo são ([Rosa, 2004, pág. 76]):

- podemos escrever não importa que grafo diretamente sobre *FA*;
- podemos escrever não importa que grafo numa superfície circundada por um número ímpar de cortes;
- podemos apagar não importa que grafo circundado por um número par de cortes;
- podemos iterar um grafo na mesma superfície que o grafo inicial, assim como o podemos iterar numa superfície circundada por um número superior de cortes. O processo inverso (apagar aquilo que foi anteriormente iterado) é igualmente permitido;
- o duplo corte pode ser inserido ou apagado.

As regras acima correspondem a regras gramaticais, como as regras de formação de fórmulas em CPC.

A semântica, a interpretação dos grafos (quanto a valores verdade), é baseada na *FA*: o signo fundamental da parte alfa dos GEs, o contínuo bidimensional; o *universo de discurso*. Em particular, *FA* é um grafo que denota de forma geral e indefinida a *verdade*, pois o verdadeiro é representado por um contínuo, ([Rosa, 2004, pág. 77], [Roberts, 1973, págs. 31-46]). As convenções que estabelecem a semântica são:

- a *FA* é um grafo. Tudo o que está sobre a *FA* é verdadeiro no universo representado pela *FA*;
- os grafos parciais sobre diferentes partes da *FA* podem ser considerados como se cada um fosse um grafo total. Cada um denota o que o outro denota;
- a voluta representa a implicação material;
- o corte vazio designa o absurdo e o corte nega o grafo que ele encerra;
- o duplo corte pode ser inserido ou apagado.

Vejamos alguns exemplos de aplicação das regras, destacamos os eventos relacionados à negação e condicional.

Na Figura 13 mostra duas *FA*s, a *FA* da esquerda contém um grafo que representa iconicamente a equivalência entre $\neg(\neg p \wedge \neg q)$ e $p \rightarrow q$ (note-se o uso da negação), a *FA* da direita contém um grafo que representa iconicamente a disjunção $p \vee q$ (novamente, note-se o uso da negação).

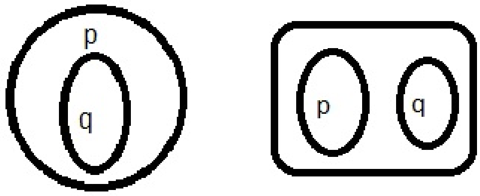


Figura 13: Exemplo de voluta (implicação) e disjunção.

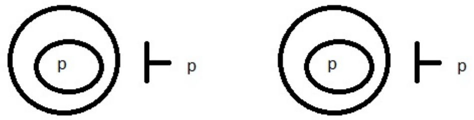


Figura 14: Exemplo de dedução.

Na Figura 14 mostra duas *FA*s, a *FA* da esquerda contém uma dedução via apagamento do duplo corte e a *FA* da direita contém uma dedução via inserção de um duplo corte.

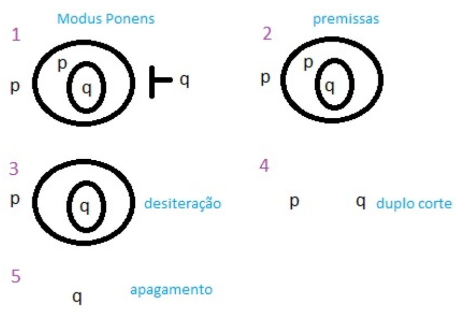


Figura 15: Exemplo de modus ponens.

Na Figura 15 mostra o uso do *modus ponens*: a numeração indica a seqüência de manipulação da *FA*. Em (1) temos a situação inicial $\frac{p, p \to q}{q}$ da *FA*; em (2) a prova tem início; em (3) ocorre a desiteração das premissas; em (4) o apagamento do duplo corte e, finalmente, em (5) o apagamento de q. O sistema alfa é correto, completo e consistente, no mesmo sentido de CPC, [Roberts, 1973, págs. 139-140, 146-151].

O sistema beta é uma extensão de alfa, análogo a CPPO em relação a CPC. Em termos sintáticos beta contém *linhas de identidade* (*LI*).

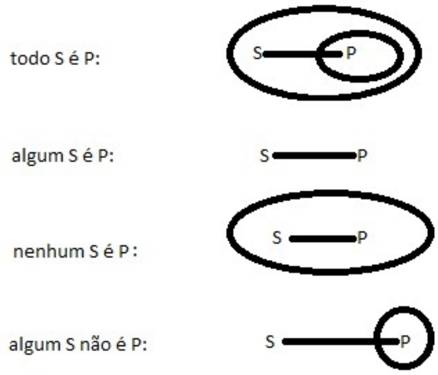


Figura 16: Quantificadores: silogismos.

Na Figura 16 exibe o uso da linha de identidade para expressar os silogismos que constam no quadrado de oposições.

As regras de inferência beta são:

- inserção: (*i*) todo o grafo pode ser inserido num número ímpar de cortes; (*ii*) despecificamente de beta: podemos unir duas extremidades livres de *LI* numa superfície encerrada por um número ímpar de cortes. Esta regra torna duas *LI*s contínuas;
- iteração e desiteração: (*i*) todo grafo pode ser iterado, seja numa mesma superfície que o primeiro grafo seja numa superfície encerrada por um número superior de cortes; (*ii*) pode unir-se a *LI* do grafo original à *LI* iterada; (*iii*) pode prolongar-se uma extremidade de *LI* para uma superfície encerrada por um número superior de cortes; (*iv*) pode enxertar-se uma *LI* numa *LI* já existente numa mesma superfície; (*v*) os processos inversos são possíveis em todos os casos referidos;
- duplo corte: o duplo corte pode ser escrito e apagado em qualquer grafo.

As convenções seguem o esquema dado na parte alfa juntamente com o que se segue:

- a *LI* denota a existência de um indivíduo no universo considerado, sendo permitido escrever a *LI* sobre a *FA*;

- a parte não analisada de um rema é chamada de *spot* e uma parte não visível no bordo de um *spot* é chamada de *hook*;

- uma *LI* que bifurca é um rema triádico que significa a identidade de três indivíduos. Em geral, uma *LI* com n bifurcações representa a identidade de n indivíduos.

Vejamos alguns exemplos de aplicação das regras, destacamos um evento relacionado à negação e condicional e a Barbara. A Figura 17 as condições iniciais de Barbara, as premissas. O passo seguinte é a iteração (vide regras de inferência da parte beta).

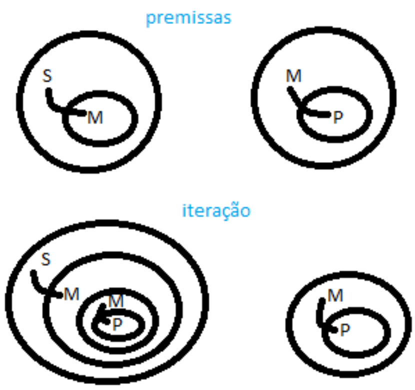


Figura 17: Barbara.

O procedimento em Barbara prossegue na Figura 18. Ocorre o apagamento de um grafo parcial, a interação segudo de uma inserção: torna duas *LI*s contínuas e segue uma desiteração. Os passos seguintes são exibidos na Figura 19: um duplo corte e um apagamento. Obtemos a conclusão em Barbara, [Rosa, 2004, págs: 100-101].

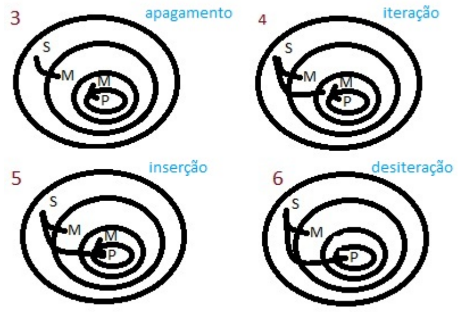


Figura 18: Barbara.

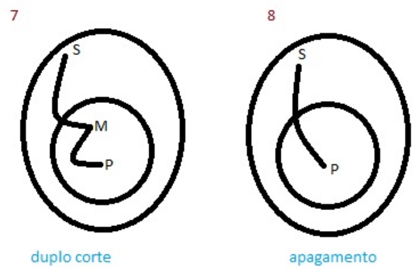


Figura 19: Barbara.

Novamente, a correção, consistência e completude da parte beta estão demonstrados em [Roberts, 1973, págs. 139-140, 146-151]. Como mencionamos, Peirce não finalizou a parte gama desse modo não temos como apresentar a parte técnica desse sistema. No entanto, podemos especular que a parte gama seria aquela que comportaria diagramações que acomodariam proposições como aquelas tratadas pelo sistema triádico, de acordo com PPTE e PPNC.

7 Considerações Finais

Como vimos a negação e a condicional, regidas pelos princípios básicos são elementos centrais em todos os sistemas lógicos, mesmo em sistemas positivos como os intuicionistas acrescidos da lei de Peirce (que não exibe explicitamente a negação) a negação está presente.

Apresentamos uma base comum para as lógicas (como disciplina) usuais e de Peirce (via noção de quase-verdade), nesta base os conceitos referentes à negação e à condicional podem ser traduzidas para alguma teoria dos conjuntos, no caso ZFC. Essa base comum permite comparar os sistemas formalizados, pelo menos em seus aspectos técnicos (e não diretamente nos conceitos). E, como percebemos esse estudo comparativo remete à questões no nível da metateoria. Isto é, estudo das tecnicalidades envolvendo tanto a negação quanto a condicional nos diversos sistemas lógicos em que ocorrem remetem à problemas sobre suas respectivas naturezas.

Neste texto fizemos apenas uma rápida passagem por diferentes lógicas (como disciplinas - a usal, a intuicionista e a de Peirce) e alguns de seus respectivos sistemas lógicos, sem maiores detalhamentos. Fica como projeto futuro um aprofundamento tanto nos aspectos conceituais como no detalhamento das comparações técnicas.

8 Notas e Observações

As notas desta seção servem para situar o entorno, pelo menos em parte, do conteúdo principal deste texto. Cada nota contém um brevíssimo comentário acerca de um dado conceito (como jargão da área de lógica e matemática) e cita diferentes fontes de leitura. Evidentemente, tudo que é aqui colocado está fixado sob um determinado ponto de vista (o do autor deste texto), parte do conteúdo bibliográfico utilizado pelo autor está listado em Referências.

[1]Neste texto, não promovemos nenhuma discussão sobre a distinção entre ciência e não ciência, ao leitor interessado indicamos, em meio a vasta literatura existente, [Costa, 1997]. A indicação se deve à compatibilidade entre o conteúdo deste texto e a abordagem ao tema (Conhecimento Científico) feita por da Costa.

[2]É conveniente notar que se por um lado uma invenção ou descoberta científica (um conhecimento novo), de um certo valor, para ser considerado *conhecimento cinetífico* de fato deve, muitas vezes, ultrapassar o senso comum (romper com ele), por outro lado não podemos conceber a compreensão ou a comunicação sem fazer referência ao senso comum. Este é, muitas vezes, o caminho de propostas de teorias científicas *novas*: *conciliar duas exigências, aparentemente contraditórias*, ([Paty, 2003], [Costa, 1997]).

[3]Grosso modo, o *senso comum* está relacionado tanto aos sentidos, por levar em conta dados dos órgãos sensoriais, quanto à capacidade de raciocínio, de reflexão sobre os elementos de uma situação, [Paty, 2003].

Para alguns, *senso comum* equivale à *opinião comum*, sujeita a influência cultural, e, neste caso, se opõe à razão crítica e ao espírito científico. Para outros, o *senso comum* estaria associada a noção de *bom senso*, declarada em [Descartes, 2006, pág. 13], entendido como razão.

O leitor interessado poderá se entreter, sem fugir ao tema, com alguns testes utilizados para avaliar, digamos, noções de senso comum em escolhas, por exemplo, o teste de Wason e o Framing the Epidemic. Testes como esse têm estreita relação com o modo como interpretamos cenários envolvendo CONDICIONAIS e NEGAÇÃO.

[4]Filosoficamente, verdade é *conceito último, indefinível por meio de outros mais simples, se utilizamos o termo definição na acepção de proposição que caracteriza e esclarece, sem petição de princípio, um conceito. A própria sentença expressando a definição, em sentido estrito, de verdade teria de ser "verdadeira"*, [Costa, 1997, pág. 115]. Evidentemente, essa colocação não encerra a discussão sobre a noção de verdade, é necessário buscar uma compreensão maior sobre a natureza da verdade.

Ao leitor interessado recomendamos [Lynch, 2001], uma coletânea de textos sobre a natureza da verdade sob diferentes perspectivas. Ainda, no livro intitulado *Theories of Truth*, [Kirkham, 1977], tenta desfazer certas confusões e ambigüidades que permeiam a nocção de verdade. Nesse texto, o autor distingue três grandes projetos que constituem a bibliografia sobre a verdade: o projeto da justificação, projeto dos atos-de-fala e o projeto metafísico. No projeto da justificação há uma tentativa em estabelecer um critério para a verdade. Kirkham alinha a este projeto, por exemplo, os filósofos F. H. Bradley e B. Blanshard (coerentistas) e William James (instrumentalismo).

No projeto dos atos-de-fala as declarações são o objeto de estudo. O autor considera duas propostas (i) do *ato ilocucionário* (vide observação - OBS.(i) - no final desta nota): *que procura descrever o que fazemos quando declaramos algo*, seguido pelos filósofos P. F. Strawson (teoria performativa) e H. Price (teoria darwiniana) - ambos consideram que as declarações não têm propósito ilocucionário; (ii) do assertivo: *que busca descrever o que dizemos quando declaramos algo*, seguido por F.P. Ramsey (teoria da redundância) e Alan White (teoria avaliativa) -

estão convencidos de que as declarações têm um propósito locucionário.

No projeto metafísico tenta-se identificar em que consiste a verdade. Divide-se em (*i*) a linha *extensional* (vide observação - OBS.(*ii*) - no final desta nota), que busca fixar a referência, a denotação do predicado *é verdadeiro*, são alinhados a essa idéia Alfred Tarski e Saul Kripke (teoria semântica); (*ii*) a linha *naturalista*, que procura encontrar condições que sejam individualmente necessárias e conjuntamente suficientes para uma afirmação ser verdadeira (em algum mundo natural possível); (*iii*) a linha *essencialista*, que tenta encontrar condições que sejam individualmente necessárias e conjuntamente suficientes para uma afirmação ser verdadeira (em algum mundo possível), são alinhados a essa concepção C. S. Peirce (pragmatismo), William James (instrumentalismo), Bertrand Russell e J. L Austin (teoria da correspondência), B. Blanshard (coerentista) e Paul Horwich (minimalista).

OBS. (*i*) - *ilocucao*: O uso das palavras permite, entre outras coisas, fazer declarações de intenções em geral (*promessas*). Por exemplo, quando alguém diz *prometo lhe devolver o livro que me emprestou*, o falante faz algo com as palavras que não é do domínio estritamente linguístico, [Austin, 1962]. Ressaltamos que, dentre os vários tipos de atos ilocutórios, somente nos assertivos o falante se compromete (ou simula comprometer-se, se estiver mentindo) com a veracidade do que afirma.

OBS. (*ii*) - *extensional*: Nos sistemas lógicos usuais as proposições têm caráter extensional. Na antigüidade, os gregos consideravam distintas a *estrela da manhã* (que chamavam de *Phosphorus*) da *estrela da tarde* (que chamavam de *Hesperus*). Isto é, desconheciam o fato do planeta Vênus assumir esses dois papéis. Agora, considere as seguintes proposições: (1) *Hesperus é o segundo planeta do sistema solar* e (2) *Phosphorous é o segundo planeta do sistema solar*. Ambas se referem às mesmas coisas, então podemos dizer que: *são as mesmas proposições*? *Extensionalmente* (em relação à *referência* ou *denotação*), a resposta é afirmativa: as duas proposições são equivalentes. Porém, *intensionalmente* (em relação ao *sentido* ou *conotação*), a resposta seria *não necessariamente*.

Ou seja, duas proposições podem ser extensionamente equivalentes mas intensionalmente distintas, porém se duas proposições são intensionalmente equivalentes, então elas são extensionalmente equivalentes. Ou seja, proposições são individualizadas por suas intensões. Tecnicamente, a distinção entre termos extensionais e intensionais se verifica pela *regra da substituição* - definimos esta regra na Subseção 5.1.2.

[5]Neste texto não abordamos sobre as teorias não axiomatizáveis, para o leitor interessado recomendamos [Henkin et al., 1959, pág: 30-37].

[6]Grosso modo, chamamos de *extensão* ao conjunto das coisas designado por um predicado e de *intensão* (ou *compreensão*) o *traço* (a *característica*, *propriedade*) expressa por um predicado. Desse modo, predicados com mesma extensão serão considerados distintos se tiverem diferentes intensões.

[7]Informalmente, a consequência lógica pode ser vista como uma *inferência* ou uma *relação*. Como inferência, a conseqüência lógica pode tratada como um processo, uma passagem de um conjunto proposições, possivelmente finito, de premissas para a conclusão. Como relação, a a conseqüência lógica é um emparelhamento fixado entre premissas e conclusão, de tal sorte que fornece uma garantia inalienável oferecida pelas premissas à conclusão, [Henkin et al., 1959, pág: 30-37].

Evidentemente, a formulação de conseqüência lógica tarskiana (uma concepção *modelo-teórica*) sofre de críticas, no entanto, pelo menos neste texto, não entramos nesse campo de discussão. Ao leitor interessado recomendamos [Tarski, 1956b] e [Etchemendy, 1999].

[8]Desde os tempos mais remotos o homem elabora *modelos* para capturar a realidade ou parte dela, através deles procura expressar o conhecimento e a capacidade de manipular esse saber. Um *modelo* (ou *teoria*) *matemático* é essencialmente fruto da observação, o processo de construção e as análises sobre um modelo acabado (ou não) permite, entre outras coisas, enxergar o que não se pode ver (tratar o imaginável não observável) ou o observável não percebido. Evidentemente, a construção de modelos segue um *ritual* para que o resultado final seja algo *bem-estruturada* de modo que o todo não seja meramente uma *colagem inconsistente* das partes observadas.

[9]Um texto interessante sobre as diversas *línguas* do mundo é o *Concise Encyclopedia of Languages of the World*, [Brown and Ogilvie, 2008]. Cabe aqui uma observação, há *linguagens artificiais* que são *livres de negação*, [Kurtonina and de Rijke, 1997]. São linguagens de especial interesse para *programação de computadores* sob o *paradigma declarativo*.

[10]O uso da negativas duplas é permitido na língua portuguesa, no entanto são gramaticalmente incorretas, por exemplo, na língua inglesa - apesar de encontrarmos expressões como *we don't need no education* (frase encontrada na música *Another brick in the wall*, *Pink Floyd*. Ressaltamos que há pelo menos duas outras estratégias para *negar* distintas da forma como efatuada na língua portuguesa, a saber: uma como feita em *evenki* (língua falada na Sibéria) e outra como efetuada em *tongan* (língua falada na Polinésia), [Zeijlstra, 2004].

[11]Uma condicional pode ocorrer em outros formatos, por exemplo, considera-se que as formas abaixo expressam o mesmo que *se* φ, *então* ψ

- φ *somente se* ψ
- φ *só se* ψ
- φ *implica* ψ
- φ *só no caso de* ψ
- φ *só na condição de* ψ
- φ *é condição suficiente para* ψ
- ψ *é condição necessária para* φ
- φ *só no caso de* ψ
- ψ *se* φ
- *só se* ψ *é que* φ

Além dessas variantes que podemos citar aquelas que não contém a partícula *se*, como as frases condicionais que contêm termos como *a não ser que* (*p.ex.*, *a não ser que faça sol, o jogo será cancelado*) e construções adverbiais como *eu sairei no caso dela sair*, *eu sairei somente no caso dela sair* e *eu sairei em qualquer circunstância em que ela saia*, [Lycan, 2005]. Não tratamos neste texto dessas variantes, para o leitor interessado recomendamos o texto [Lycan, 2005].

[12]É necessário fazer uma distinção entre a linguagem *da qual* falamos (a *linguagem objeto* ou *linguagem artificial*) da linguagem *na qual* falamos (a *meta-linguagem* - linguagem da metateoria).

Saber esse tipo de distinção não é mero preciosismo, é fundamental para evitar equívocos provocados por formulações de *problemas que confundem expressões da linguagem-objeto com os da meta-linguagem*. Por exemplo, um caso clássico, é o *Paradoxo de Richard*.

Considere a expressão: *o menor número natural não nomeável com menos de vinte e sete sílabas*, ela nomeia, com vinte e seis sílabas, um número natural que, por definição, não pode ser nomeado com menos de vinte e sete sílabas. A contradição ocorre se o leitor entender que a *sentença de Richard* está internalizada na linguagem objeto, oa que não é o caso. Note-se que a sentença está na meta-linguagem da teoria elementar dos números (um exemplo de um sistema aritmético formalizado é o de Peano) e não internalizada na teoria. No caso, se considerarmos o sistema de Peano, a sentença de Richard está fora deste sistema.

Note-se que o uso do termo *sentença* é no sentido de *expressão bem-formada de uma linguagem objeto fixada*. Nesse caso, dizer que uma dada expressão é um sentença significa dizer que a expressão pertence a uma dada linguagem-objeto. Eis, outro exemplo de equívoco como o da sentença richardiana. Tome a seguinte afirmação: *todo número par maior que três é igual a soma de dois números primos*, conhecida como *Conjectura de Goldbach*. Agora, considere a conjunção das seguintes asserções: (i) A resposta para a Conjectura de Goldbach é negativa. (ii) Se a resposta para a Conjectura de Goldbach é negativa, então existe um número par (maior que três) que não pode ser expresso como soma de dois primos. (iii) Exatamente uma destas três asserções é verdadeira. É evidente que (ii) é verdadeira, logo (iii) não pode ser verdadeira (caso contrário, haveria pelo menos duas asserções verdadeiras). Portanto, (iii) é não verdadeira, e não é o caso que *exatamente* uma das três asserções seja verdadeira. Isto é, ou nenhuma delas é verdadeira (o que náo é o caso), ou duas delas são verdadeiras, a saber: (i) e (ii). Concluímos então que: a resposta para a Conjectura de Goldbach é negativa.

Este *esquema de argumento* é universal, isto é, permite provar qualquer asserção em lugar de (i). Pergunta: qual o *erro* com este esquema de raciocínio? O equivoco está em tratar as três expressões (todas bem-formadas) como sendo elementos de uma mesma linguagem. As duas primeiras poderiam, de fato, pertencer a uma mesma linguagem, porém, neste caso, a terceira expressão não seria uma sentença - não pertenceria à mesma linguagem das duas primeiras.

OBS. (i) cabe aqui uma comentário sobre um resultado de Gödel (1931), [Gödel, 1931]. Gödel, como formalista, conduziu seu trabalho supondo que os *significados* de sentenças em uma dada teoria axiomática estão restritos *a priori* apenas pela sua sintaxe (aqui ocorre a visão fomalista), desse modo, poderia procurar uma construção sintática que produzisse, em interpretações possíveis, um conflito entre sua *consistência* e sua *demonstrabilidade*.

Como ele já conhecia paradoxos como o de Richard, que ocorrem fora do formalismo - isto é, na meta-linguagem -, o que Gödel precisava era uma antinomia semântica com esta mesma característica. Ou seja, encontrar uma teoria axiomática da matemática onde coubesse sintaticamente uma descrição do paradoxo de Richard. A teoria encontrada por Gödel foi a Teoria dos Números (a Aritmética de Peano), nomeou a de S e elaborou um esquema para representar cada sentença da meta-teoria por um objeto elementar de S (aplicou um método de enumeração). Por fim, inspirado no método de diagonalização de Cantor, traduziu para S a sentença que descreve na meta-teoria o predicado *x é demonstração de y em S*. Isto é, construiu em S uma *sentença richardiana* de S cuja leitura na meta-teoria é *não existe sentença em S que seja demonstração de* mim mesma. Sobre a *prova de Gödel* recomendamos [Nagel and Newman, 1971].

OBS. (ii) uma teoria diz-se *inconsistente* se nela pudermos demonstrar uma fórmula φ e, também, sua negação $\neg\varphi$. Uma teoria diz-se *trivial*, se todas as suas fórmulas da teoria forem *demonstráveis*. Evidentemente, se o sistema lógico subjacente à teoria em questão for clássico, a teoria inconsistente se, e somente se, for trivial. No entanto, a adoção de sistemas lógicos apropriados permite (sob certas condições) a construção de teorias inconsistentes e não triviais.

[13]A teoria dos conjuntos, nascente no início do século XX (nos trabalhos de Cantor e Dedekind), tem como representante, digamos, clássico o sistema ZF (sem o axioma da escolha) ou o ZFC (ZF + Axioma da Escolha), resultado dos trabalhos de Zermelo (1908), Fraenkel (1922) e Skolem (1923), entre outros. Há outros sistemas menos conhecidos, o NGB de von Neumann (1925-1929), Bernays (1937-1954) e Gödel (1940), o NF de Quine e o sistema de Kelley-Morse-Tarski. O leitor interessado encontrará em [Krause, 2002] uma visão geral sobre esses sistemas.

Complementamos esta nota com comentários sobre alguns axiomas em ZF, o interesse está não está tanto nos aspectos matemático-conjuntistas desses axiomas, mas pelo pelo uso dos termos *extensão*, *infinito*, *substituição* e *regularidade* que são utilizados em diversos tópicos (no curso IA005 e, por conseguinte, neste texto).

- O axioma da compreensão diz que dado um *conjunto* x e dada uma *propriedade*, existe um conjunto y cujos elementos são exatamente os elementos de x que satisfazem a propriedade dada.
- O axioma da extensionalidade diz que dois conjuntos são *iguais* se, e somente se, possuem os mesmos *elementos*.
- O axioma do *infinito* diz que existe um conjunto x que tem o *conjunto vazio* como elemento e para cada conjunto y elemento de x tem-se que a *união* de y com $\{y\}$ *está em* x.
- O axioma da substituição diz que a *imagem* de um conjunto por uma *função* é um conjunto.
- O axioma da regularidade diz que todo conjunto x não-vazio possui um conjunto y como elemento tal que a *intersecção* de x com y é vazia.

Eis as observações:

(*i*) note-se que no enunciado dos axiomas os conceitos dos termos em itálico: *conjunto*, *propriedade*, *igualdade*, *ser elemento*, *infinito*, *união*, *estar em*, *função* e *intersecção* que estão na meta-teoria.

(*ii*) sobre o axioma da compreensão: considere uma *constante individual* `s` (*p.ex.*, denotando `Sócrates` - é um *termo singular* que indica um *indivíduo* e suponha um *predicado unário* C representando uma *propriedade* (*p.ex.*, *ser careca* - é um *termo geral* que permite expressar características ou propriedades que um indivíduo singular pode ter) em uma dada *interpretação* $\mathcal{I}$ (*p.ex.*, podemos tomar uma interpretação cujo domínio é o conjunto das pessoas). Então, podemos escrever *Sócrates é careca* como $C(\mathtt{s})$. Desse modo, sob $\mathcal{I}$ podemos determinar em que condições $C(\mathtt{s})$ será verdadeira, neste caso: *se e somente se há no domínio da interpretação um subconjunto correspondendo à coleção das pessoas carecas e que tenha como elemento o indivíduo denotado por* `s`. Ou seja, *existe um objeto que é* C se e somente se o subconjunto do domínio que corresponde à *extensão* de C (conjunto dos objetos que satisfazem x *é* C - o conjunto das coisas designado por um predicado) é não vazio. Esse caráter *extensional* do axioma da separação é, digamos, complementado pelo axioma da extensionalidade.

(*iii*) O axioma da extensionalidade diz que um conjunto é determinado unicamente por seus elementos. Note-se que esse axioma faz uso essencial da noção de *identidade*: *dois conjuntos são idênticos quando têm os mesmos elementos*. Desse modo, podemos explicitar um conjunto utilizando um predicado (vid (*ii*)) ou por *exaustão* (listando todos os elementos, quando possível) - veja que o conjunto $\{1, 2, 1, 2, 2, 2, 1\}$ possui exatamente dois elementos.

(*iv*) O axioma da substituição, proposto Fraenkel e Skolem (1922), independentemente, é utilizado para *separar* o *conjunto imagem* de uma função; quando não se tem pré-especificado um contra-domínio natural.

(*v*) O axioma da regularidade, proposto por von Neumann (1925), tem caráter técnico-estrutural: *impedir que ocorram no universo certas patologias*, tais como $x = \{x\}$, $x \in x$, $x \in y \in x$, etc.

(*vi*) Enunciamos aqui o Axioma da Escolha, sem maiores detalhes: seja u uma família de conjuntos não vazios e dois a dois disjuntos, então existe um conjunto v contendo exatamente um elemento de cada $x \in u$. Historicamente, o axioma da escolha jáa era utilizado de forma intuitiva antes de ser enunciado por Zermello (1908), [Herrlich, 2006].

[14]A contradição é a crença de que não é verdade que se possa predicar e não predicar ao mesmo sujeito a mesma propriedade ao mesmo tempo (*cf.*, Aristóteles), [Lukasiewicz and Wedin, 1971]. Em um artigo intitulado *on the principle of contradiction in Aristotle*, [Lukasiewicz and Wedin, 1971], Lukasiewicz propõe três versões aristotélicas do princípio de contradição: uma formulação ontológica (*é impossível que a mesma coisa pertença e não pertença à mesma coisa ao mesmo tempo e na mesma condição*); uma formulação lógica (*o mais certo de todos os princípios básicos é que proposições contraditórias não são verdadeiras simultaneamente*) e uma formulação psicológica (*ninguém crê que a mesma coisa (ao mesmo tempo) possa ser e não ser*). Nesse artigo, Lukasiewicz rejeita a formulação psicológica e faz equivaler a formulação lógica à ontológica (propõe uma única formulação lógico-ontológica), [Abe, 2011, pág: 24].

[15]Há sistemas lógicos *não-reflexivos*, isto é, sistemas em que o princípio da identidade (em alguma

de suas formas) ou não vale ou atua de forma restrita. Por exemplo, no sistema lógico da *implicação causal*, que interpretam $\varphi \to \psi$ como φ *causa* ψ, em geral, não aceitam que *algo posssa ser a causa dela mesma.*

[16]Toda construção abstrata possui em sua base um conjunto de *elementos primitivos*, por exemplo, para a construir a sua *teoria elementar dos números* Peano tomou como elemento primitivo o conceito de *número natural*, isto é, ele *considerou como absolutamento claro o que é um número natural e quais são eles.* Para o leitor interessado, recomendamos [Milies and Coelho, 2000].

O *método axiomático*, que remonta a Euclides, tem sua importância principalmente na filosofia da matemática. Porém, pode ser ferramenta interessante para examinar obras como as de Aristóteles (fundamental para a compreensão de alguns dos problemas básicos da lógica). Para uma introdução sobre os conceitos dos *sistemas axiomáticos*, recomendamos [Mortari, 2001, Seção 13.4].

[17]O termo *cópula* em lógica ocorre em proposições. Uma proposição, em geral, é formada pela união de dois termos (sujeito e predicado) através de uma cópula (usualmente o verbo *ser*). O sujeito é o termo de que se enuncia alguma coisa e o predicado é aquilo que se enuncia, como em: *Ana é bailarina.*

[18]As proposições podem ser classificadas segundo *quantidade* e *qualidade.*

Pela quantidade (isto é, pela extensão do sujeito considerada) podemos classificar as proposições em *universais*: *quando o sujeito da proposição é tomado em toda a sua extensão - p.ex., todos os brasileiros são sul-americanos*; *particulares*: *quando o sujeito da proposição é tomado apenas numa parte da sua extensão - p.ex., alguns brasileiros são sul-americasnos* e *singulares*: *quando o sujeito da proposição está reduzido a um indivíduo - p.ex., Ana é brasileira.* Note-se que as singulares são um caso particular das universais (toda a sua extensão está reduzida a um único termo-singular).

Segundo a qualidade (isto é, segundo o predicado convém ou não convém ao sujeito), as proposições podem ser *afirmativas*: *quando o predicado convém ao sujeito* (não há ocorrência de negação na cópula) - *p.ex, os brasileiros são sul-americanos*; *negativas*: *quando o predicado não convém ao sujeito* (há ocorrência de negação na cópula) - *p.ex, os brasileiros não são norte-americanos.*

Diz-se que duas proposições são *opostas*: *quando têm o mesmo sujeito e o mesmo predicado, diferindo na qualidade ou na quantidade ou na quantidade e na qualidade*, então temos quatro casos de oposição (duas proposições são): *contraditórias*: *quando diferem ao mesmo tempo pela qualidade e pela quantidade*, isso nos casos em que (*i*) uma é universal afirmativa e a outra, particular negativa - *p.ex., todos os brasileiros são sul-americanos e alguns brasileiros não são sul-americanos* e (*ii*) uma é universal negativa e a outra, particular afirmativa - *p.ex., nenhum brasileiro é sul-americano e alguns brasileiros são sul-americanos*; *contrárias*: *quando sendo ambas universais, diferem apenas pela qualidade - p.ex., todos os brasileiros são sul-americanos e nenhum brasileiro é sul-americano*; *subcontrárias*: *quando sendo ambas particulares, diferem apenas pela qualidade - p.ex., alguns brasileiros são sul-americanos e alguns brasileiros não são sul-americanos*; *subalternas*: *quando diferem apenas pela quantidade*, isso nos casos em que (*i*) uma é universal afirmativa e a outra, particular afirmativa - *p.ex., todos os brasileiros são sul-americanos e alguns brasileiros são sul-americanos* e (*ii*) uma é universal negativa e a outra, particular negativa - *p.ex., nenhum brasileiro é sul-americano e alguns brasileiros não são sul-americanos.*

[19]Há estudos interessantes sobre negação e falsidade, por exemplo, em [Sanz, 2008]. O leitor interessado irá encontrar diversos textos sobre negação no volume (23) intitulado: Aspectos Lógico-Filosóficos da Negação, da revista O que noz faz pensar.

[20]Para se adotar uma teoria da probabilidade (existem várias) como suporte à lógica devemos esclarecer qual é a *interpretação de probabilidade.* Matemáticamente é bem definida, qualquer função de probabilidade tem como domínio uma sigma álgebra - intuitivamente pode ser interpretada como um conjunto de eventos reais. Porém, como determinamos essa *álgebra de eventos possíveis*? Por exemplo, no jogo de cara e coroa, o que significa *a probabilidade de se obter cara é* $0,5$? A atribuição desse valor para a probabilidade de se obter cara *reflete uma crença* de que a moeda não é viciada? A resposta é NÃO, basta considerar a seguinte seqüência de arremessos de uma moeda na qual temos como resultado (0 indica cara e 1 cora): 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1. Estamos falando de *crenças*, e em relação a isso: essa seqüência diz que a moeda é *não viciada*? A resposta a essa pergunta merece atenção, pois para adotarmos uma teoria de probabilidade como suporte à lógica o que desejamos não é meramente uma *garantia matemática do comportamento da função de probabilidade.*

[21]Qualquer partícula que possamos acrescentar a uma ou mais frases para formar outra frase pode ser chamada de *conectivo de formação de frases.* Os *conectivos de formação de frases* estudados pela lógica clássica são os *verofuncionais.* Um conectivo (*operador*) é *verofuncional* se, e somente se, o valor de verdade da proposição sem o operador determina inteiramente o valor de verdade da proposição com o operador. Desse modo acredita-se poder capturar o comportamento, por exemplo, da negação e do condicional, pelo menos em parte.

Por exemplo, a negação como operador verofuncional permite, mesmo que não se saiba qual o valor de verdade de uma dada proposição, saber que a negação dessa poposição tem exatamente o *valor contrário* (ou *valor oposto*) da proposição original.

Tratamento similar ocorre com o condicional interpretado como operador verofuncional, por exemplo, a expressão condicional *se* φ*, então* ψ não é verdadeira no caso em que φ é verdadeira e ψ não o é. Este caso parece ser consenso, o que não ocorre com as outras três possíveis combinações. Na abordagem verofuncional a expressão condicional é verdadeira nos outros três casos, no entanto os proponentes da abordagem não verofuncional não concordam que a expressão seja sempre verdadeira em cada um desses três casos.

[22]No caso dos operadores verofuncionais, mesmo que não saibamos o valor de verdade da frase de partida, sabemos em que circunstâncias a frase de chegada será verdadeira (ou não verdadeira). Este fato não ocorre com operadores não verofuncionais, por exemplo, com os operadore (modais) para *necessidade* e *conhecimento* - maiores detalhes na Seção 6.

[23]Entende-se por prova construtiva um processo que exibe explicitamente o objeto e/ou propriedade desejada. Provas via *redução ao absurdo* não são aceitas pelos intuicionistas. Um exemplo clássico é o de Euclides para provar a existência de infinitos números primos.

Suponha por absurdo que existam finitos números primos (um número primo é um número inteiro maior do que 1 e que é *divisível* unicamente por ele mesmo e pela unidade). Seja $\mathtt{p}$ o maior número primo, por hipótese esse número existe, e $m = (2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot \mathtt{p}) + 1$. Evidentemente, m é maior que $\mathtt{p}$ e, se for primo teremos o nosso *absurdo* (já que por hipótese $\mathtt{p}$ é o maior primo existente).

Pelo PTE ou m é primo ou não é primo (ou equivalentemente, é composto ou não) Se m não é primo, então é composto, portanto divisível por algum primo menor do que ele. Note-se que ao dividirmos m pelos primos que o compõem 2, 3, ..., $\mathtt{p}$ o resto é 1, logo m não é composto, isto é m é primo. Portanto, obtivemos que m é um primo estritamente maior que $\mathtt{p}$. Absurdo!

Brouwer não aceitava esse tipo de demonstração, o motivo seria o de que para aceitarmos que uma prova de $\neg\neg\varphi$ fornecesse uma prova de φ temos que aceitar que ou sempre se tem uma prova para φ ou para a sua negação, $\neg\varphi$. Como não chegamos a uma prova construtiva de $\neg\varphi$ (isto é, que não existem finitos números primos), somos obrigados a reconhecer que φ é que tem que ser o caso (ou seja, que existem infinitos deles). Porém essa suposição é exatamente o PTE que Brouwer não aceitava. Isso se deve à crença de Brower na impossibilidade de se admitir o *infinito atual*, que o conduzia a supor que, uma vez que não podemos "esgotar" um conjunto infinito, nunca saberemos se φ é ou não o caso. Portanto, o PTE não pode valer, [Krause, 2003].

[24]Sistemas modais podem ser interpretados sobre abertos topológicos, [McKinsey and Tarski, 1944], isto é, podemos expressar propriedades topológicas via linguagens modais.

A primeira tentativa de *construção de sistemas lógicos formais que capturam noções espaciais* foi apresentada por McKinsey e Tarski [McKinsey and Tarski, 1944]. Trata-se de uma álgebra baseada no operador fecho e que considera $\mathsf{F}(\cdot)$ um *elemento primitivo* adicionado a uma *álgebra booleana*. Analogamente, pode-se construir uma álgebra baseada no operador interior $\mathsf{I}(\cdot)$.

Para um dado espaço topológico $\mathcal{T} = (X, \Omega)$, relacionamos uma *função de valoração* $\nu(\cdot)$ que leva letras proposicionais em subconjuntos de $\mathcal{T}$. Dizemos que $\Box\beta$ *é verdadeira num ponto p se, e somente se,* β *é verdadeira em todos os pontos de alguma vizinhança de p*. Uma *interpretação topológica* é um par $(\mathcal{T}, \nu)$ tal que: $\nu(\perp) = \emptyset$, $\nu(\top) = X$, a *conjunção* e interpretada como *intersecção* em $\wp(X)$, a *disjunção* como *união* em $\wp(X)$, a *negação* como *complemento* e $\Box$ como *interior* (isto é, $\nu(\Box\varphi) = \mathsf{I}(\nu(\varphi))$).

Um espaço topológico $\mathcal{T} = (X, \Omega)$ é definido a partir de um conjunto não vazio X e de uma coleção Ω de seus subconjuntos ($\Omega \subseteq \mathcal{P}(X)$) tal que:

1) $\emptyset \in \Omega$ e $X \in \Omega$,
2) Se $O_1,\ O_2 \in \Omega$, então $O_1 \cap O_2 \in \Omega$,
3) Se $O_i \in \Omega$, então $\bigcup_{i \in I} O_i \in \Omega$, para todo $i \in I$ com I conjunto de índices;

Dado um espaço topológico $\mathcal{T} = (X, \Omega)$, denotamos por I e F os operadores interior e fecho em $\mathcal{T}$ se satisfizerem as seguintes condições para quaisquer $A,\ B \subseteq X$:

$$\mathsf{I}(X) = X$$
$$\mathsf{I}(A) \subseteq A$$
$$\mathsf{I}(A \cap B) = \mathsf{I}(A) \cap I(B)$$
$$\mathsf{I}(\mathsf{I}(A)) = \mathsf{I}(A)$$

Referências

[Abe, 1991] Abe, J. M. (1991). Verdade pragmática.

[Abe, 2011] Abe, J. M. (2011). Aspectos de lógica e teoria da ciência.

[Austin, 1962] Austin, J. L. (1962). *How to do Things with Words*. Oxford: Clarendon Press.

[Brown and Ogilvie, 2008] Brown, K. and Ogilvie, S. (2008). *Concise Encyclopedia of Languages of the World*. Elsevier Science.

[Burch, 2010] Burch, R. (2010). Charles sanders peirce.

[Béziau, 1996] Béziau, J. Y. (1996). Identity, logic and structure. *Bulletin of the Section of Logic*, 25:89–94.

[Costa, 1963] Costa, N. C. A. d. (1963). *Sistemas Formais Inconsistentes*. Editora da Universidade Federal do Paraná.

[Costa, 1974] Costa, N. C. A. d. (1974). On the theory of inconsistent formal systems. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 15:497–510.

[Costa, 1993] Costa, N. C. A. d. (1993). *Lógica Indutiva e Probabilidade*. Hucitec-EdUSP.

[Costa, 1997] Costa, N. C. A. d. (1997). *O Conhecimento Científico*. Discurso Editorial.

[da Costa et al., 2007] da Costa, N. C. A., Krause, D., and Bueno, O. (2007). *Paraconsistent logics and paraconsistency*, volume 5 of *Philosophy of Logic, Handbook of the Philosophy of Science*, pages 655–781. Elsevier.

[Dahl, 2010] Dahl, . (2010). *Typology of negation*, pages 9–38. The Expression of Negation. Edited by Laurence R. Horn. De Gruyter Mouton.

[Descartes, 2006] Descartes, R. (2006). *Discurso do Método*. Editora Escala.

[D'Ottaviano and Feitosa, 2003] D'Ottaviano, I. M. L. and Feitosa, H. A. (2003). Sobre a história da lógica, a lógica clássica e o surgimento das lógicas não-clássicas.

[D'Ottaviano and Hifume, 2007] D'Ottaviano, I. M. L. and Hifume, C. (2007). *Peircean Pragmatic Truth and da Costa's Quasi-Truth*, volume 64 of *Model-Based Reasoning in Science, Technology, and Medicine Studies in Computational Intelligence*, pages 383–398. Springer.

[Duan et al., 2000] Duan, Z., Holcombe, M., and Bell, A. (2000). A logic for biological systems. *Bio Systems*, 55(1-3):93–105.

[Etchemendy, 1999] Etchemendy, J. (1999). *The Concept of Logical Consequence*. CSLI - Stanford University.

[Fisch and Turquette, 1966] Fisch, M. and Turquette, A. R. (1966). Peirce's triadic logic. *Transactions of the Charles S. Peirce Society - Texas Tech University*, 2(2):284–311.

[Garson, 2006] Garson, J. W. (2006). *Modal logic for philosophers*. Cambridge University Press.

[Gödel, 1931] Gödel, K. (1931). On formally undecidable propositions of principia mathematica and related systems. *Monatshefte fur Mathematik und Physik*, 38:173–198.

[Haack, 1978] Haack, S. (1978). *Philosophy of Logics*. Cambridge University Press.

[Halpern et al., 2001] Halpern, J. Y., Harper, R., Immerman, N., Kolaitis, P. G., Vardi, M. Y., and Vianu, V. (2001). On the unusual effectiveness of logic in computer science.

[Havenel, 2008] Havenel, J. (2008). Peirce's clarifications of continuity. *Transactions of the Charles Sanders Peirce Society*, 44(1):86–133.

[Henkin et al., 1959] Henkin, L., Suppes, P., and Tarski, A. (1959). *Axiomatic Method with Special Reference to Geometry and Physics.*, volume 27 of *Henkin, L. and Suppes, P. and Tarski, A. (Editor) - Studies in Logic and the Foundations of Mathematics*. North-Holland Publishing Company.

[Herrlich, 2006] Herrlich, H. (2006). *Axiom of Choice*. Springer.

[Hifume, 2003] Hifume, C. (2003). Uma teoria da verdade pragmatica : a quase-verdade de newton c.a. da costa. Master's thesis, Instituto de Filosofia e Ciências Humanas - IFCH - da Unicamp, Brasil - São Paulo.

[Hilpinen, 2004] Hilpinen, R. (2004). *Peirce's Logic*, volume 3 of *Handbook of the History of Logic - The Rise of Modern Logic: from Leibniz to Frege*, pages 611–658. North-Holland Publishing Company.

[Horn, 1989] Horn, L. R. (1989). *A natural history of negation*. University Of Chicago Press.

[Jaśkowski, 1969] Jaśkowski, S. (1969). Propositional calculus for contradictory deductive systems. *Studia Logica*, 24:143–157.

[Kaye, 2007] Kaye, R. W. (2007). *The Mathematics of Logic: A Guide to Completeness Theorems and their Application*. Cambridge University Press.

[Kirkham, 1977] Kirkham, R. L. (1977). *Theories of Truth*. MIT Press.

[Krause, 2002] Krause, D. (2002). *Introdução aos Fundamentos Axiomáticos da Ciência*. EPU.

[Krause, 2003] Krause, D. (2003). Notas de aula.

[Krause, 2011a] Krause, D. (2011a). A filosofia da quase-verdade.

[Krause, 2011b] Krause, D. (2011b). Tópicos em ontologia analítica.

[Kurtonina and de Rijke, 1997] Kurtonina, N. and de Rijke, M. (1997). Simulating without negation. *Journal of Logic and Computation*, pages 501–522.

[Lane, 1997] Lane, R. (1997). Peirce's entanglement with the principles of excluded middle & contradiction. *Transactions of the Charles S. Peirce Society*, 33:680–703.

[Lane, 1999] Lane, R. (1999). Peirce's triadic logic revisited. *Transactions of the Charles S. Peirce Society - Indiana University Press*, 35(2):284–311.

[Lukasiewicz and Wedin, 1971] Lukasiewicz, J. and Wedin, V. (1971). On the principle of contradiction in aristotle. *The Review of Metaphysics*, 24(3):485–509.

[Lycan, 2005] Lycan, W. G. (2005). *Real Conditionals*. Oxford University Press.

[Lynch, 2001] Lynch, M. P. (2001). *The nature of truth: classic and contemporary perspectives*. The MIT Press.

[McKinsey and Tarski, 1944] McKinsey, J. C. and Tarski, A. (1944). The algebra of topology. *Annals of Mathematics*, 45:141–191.

[Mikenberg et al., 1986] Mikenberg, I., da Costa, N. C. A., and Chuaqui, R. (1986). Pragmatic truth and approximation to truth. *The Journal of Symbolic Logic*, 51:201–221.

[Milies and Coelho, 2000] Milies, C. P. and Coelho, S. P. (2000). *Números - Uma Introdução à Matemática*. Editora Edusp.

[Miraglia, 1987] Miraglia, F. (1987). *Cálculo proposicional: uma interação da álgebra e da lógica*. Centro de Lógica, Epistemologia e História da Ciência - Coleção CLE - N.1.

[Mortari, 2001] Mortari, C. (2001). *Introdução à lógica*. Editora UNESP.

[Moss and Tiede, 2007] Moss, L. S. and Tiede, H. J. (2007). *Applications of modal logic in linguistics*, pages 1031–1076. Handbook of Modal Logic. Elsevier Science Publishers.

[Mulligan, 1992] Mulligan, K. (1992). *Language, Truth and Ontology*. Springer.

[Nagel and Newman, 1971] Nagel, E. and Newman, J. R. (1971). *Gödel's Proof*. Routledge.

[Newton-Smith, 1985] Newton-Smith, W. H. (1985). *Logic: An Introductory Course*. Routledge.

[Paty, 2003] Paty, M. (2003). A ciência e as idas e voltas do senso comum. *Scientiae Studia*, 1(1):9–26.

[Peirce, 1965] Peirce, C. S. (1965). *Philosophical Writings of Peirce*. Editor: Buchler, J. - Dover Publications.

[Peirce, 1986] Peirce, C. S. (1986). *Writings of Charles S. Peirce - A Chronological Edition - Vol. 4, 1879-1884*. Peirce Edition Project.

[Peirce, 2000] Peirce, C. S. (2000). *Semiótica*. Perspectiva.

[Peirce, 2010] Peirce, C. S. (2010). *Writings of Charles S. Peirce - A Chronological Edition - Vol. 8, 1890-1892*. Peirce Edition Project.

[Priest, 2000] Priest, G. (2000). Truth and contradiction. *The Philosophical Quarterly*, 50(200):305–319.

[Reyes et al., 1994] Reyes, M. L.-P., Macnamara, J., Reyes, G., and Zolfaghari, H. (1994). The non-boolean logic of natural language negation. *Philosophia Mathematica*, 3:45–68.

[Roberts, 1973] Roberts, D. (1973). *Existential Graphs of Charles s Peirce*. Mouton De Gruyter.

[Rosa, 2004] Rosa, A. M. (2004). *O Conceito de Continuidade em Charles S. Peirce*. Calouste Gulbenkian.

[Sanford, 1989] Sanford, D. (1989). *If P, Then Q: conditionals and the foundations of reasoning*. Routledge.

[Sanz, 2008] Sanz, W. C. (2008). Negação e falsidade.

[Strawson, 1974] Strawson, P. F. (1974). *Subject and Predicate in Logic and Grammar*. Harper & Row Publishers.

[Tarski, 1944] Tarski, A. (1944). The semantic conception of truth and the foundations of semantics. *Philosophy and Phenomenological Research*, 4.

[Tarski, 1956a] Tarski, A. (1956a). The concept of truth in formalized languages. In *A. Tarski, Logic, Semantics and Metamathematics*, pages 152–278. Oxford.

[Tarski, 1956b] Tarski, A. (1956b). On the concept of logical consequence. In *A. Tarski, Logic, Semantics and Metamathematics*, pages 409–420. Oxford.

[Tsuji et al., 1988] Tsuji, M., da Costa, N., and Doria, F. (1988). The incompleteness theories of games. *Journal of Philosophical Logic*, 27:553–568.

[Turquette, 1972] Turquette, A. R. (1972). Dualism and trimorphism in peirce's triadic logic. *Transactions of the Charles S. Peirce Society - Indiana University Press*, 8(3):131–140.

[Weinberg, 1975] Weinberg, G. M. (1975). *An Introduction to General Systems Thinking*. John Wiley and Sons.

[Weingartner, 2010] Weingartner, P. (2010). Basis logic for application in physics and its intuitionistic alternative. *Foundations of Physics.*, 40(9-10):1578–1596.

[Woods, 1997] Woods, M. (1997). *Conditionals*. Oxford.

[Zeijlstra, 2004] Zeijlstra, H. H. (2004). *Sentential Negation and Negative Concord*. PhD thesis, Universiteit van Amsterdam.