



## EA 044 Planejamento e Análise de Sistemas de Produção

# Programação Não Linear Restrita

# Modelos de Programação Não Linear

$$\max (\min) \quad f(x)$$

$$\text{s. a.} \quad x \in D = \mathbb{R}^n$$

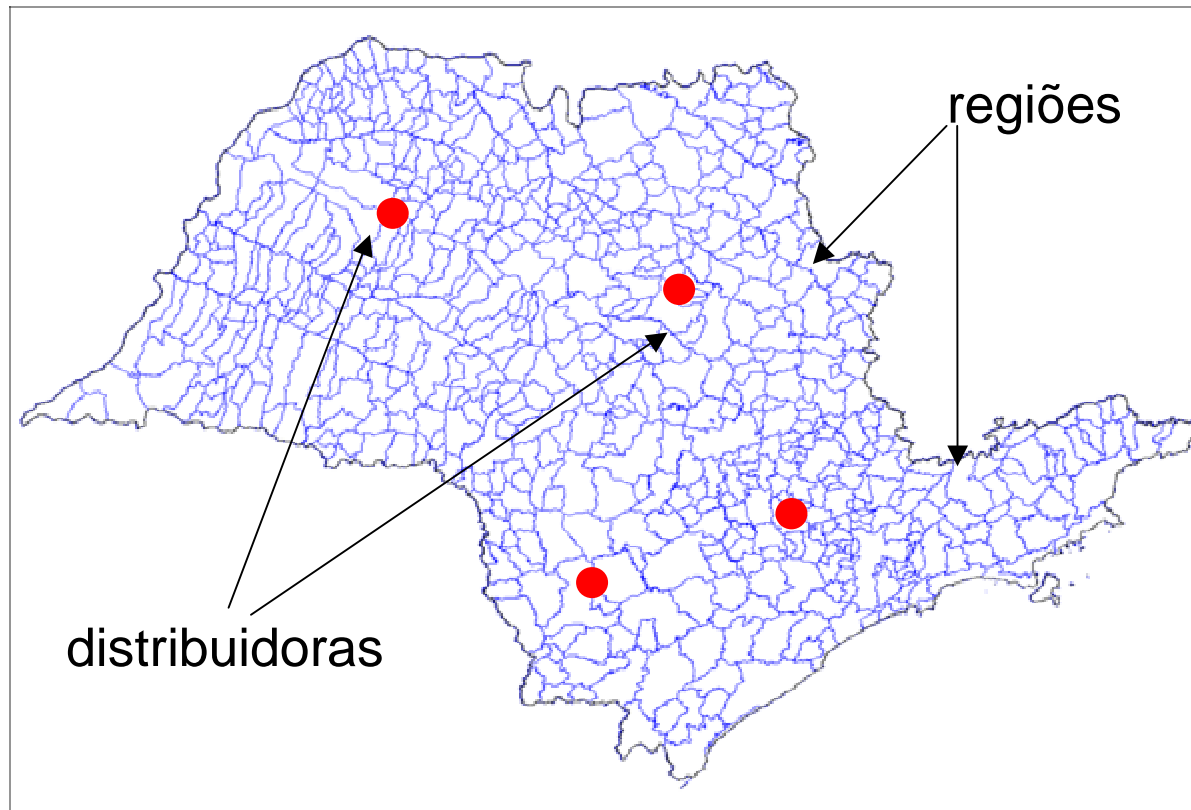
irrestritos

$$\max (\min) \quad f(x)$$

$$\text{s. a.} \quad x \in D \subset \mathbb{R}^n$$

restritos

# Exemplo: localização e alocação

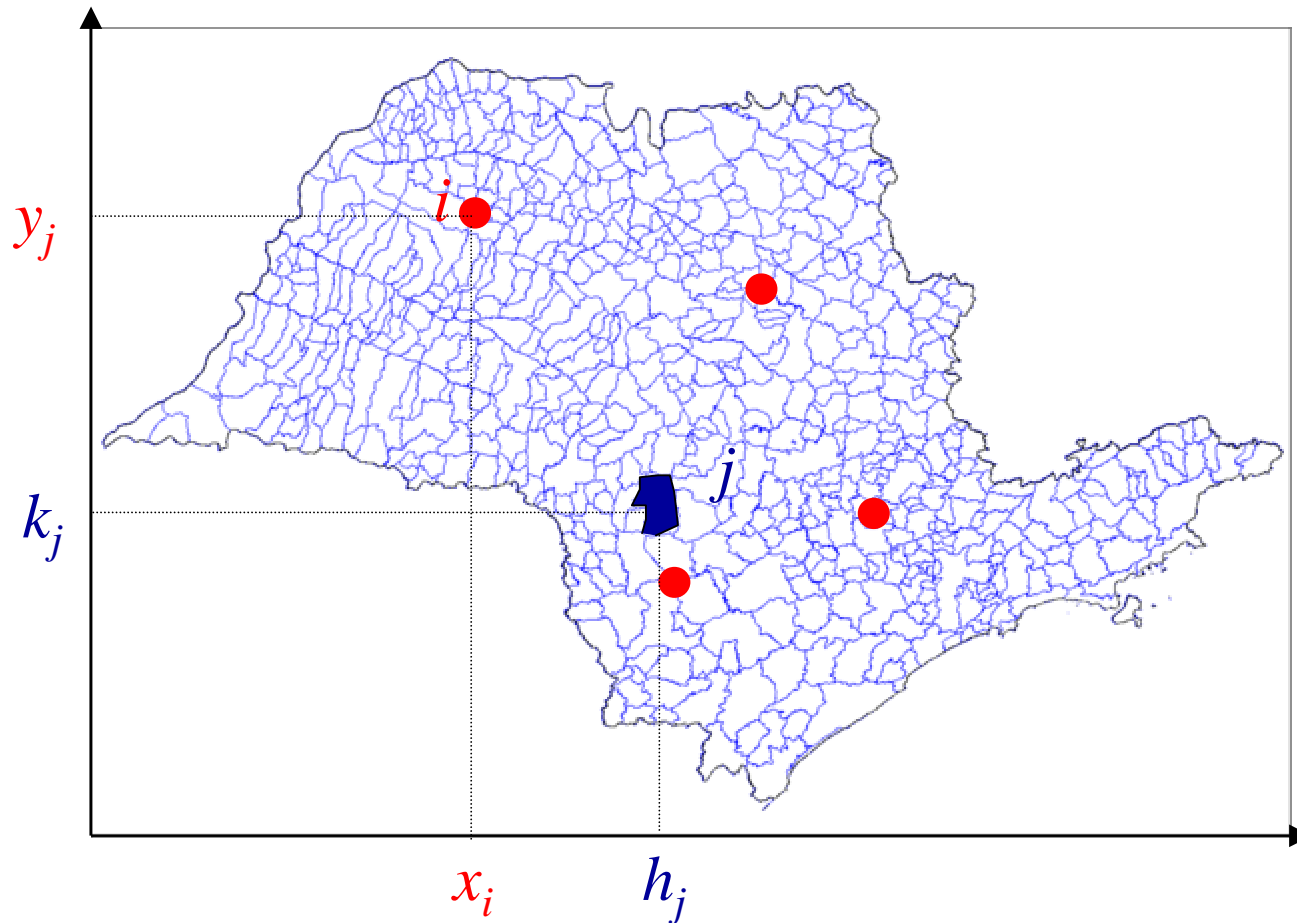


Distribuidores: 17

Regiões: 650 agrupando 24.000 clientes

$i = \text{distribuidor}, i = 1, \dots, 17$

$j = \text{região}, j = 1, \dots, 650$



$d_j = \text{número de viagens por ano para entregas à } j\text{-ésima região}$

- Minimizar custo de transporte

- minimizar número de viagens ( $w_{ij}$ ) de  $i \rightarrow j$
- minimizar distância entre  $i$  e  $j$

$$\min \sum_{i=1}^{17} \sum_{j=1}^{650} w_{ij} \sqrt{(x_i - h_j)^2 + (y_i - h_j)^2}$$

$$\text{s.a } \sum_{i=1}^{17} w_{ij} = d_j, \quad j = 1, \dots, 650$$

$$w_{ij} \geq 0, \quad i = 1, \dots, 17; \quad j = 1, \dots, 650$$

Modelo PNL

# Modelos convexos

$$\min f(\mathbf{x})$$

$$\text{s.a } g_i(\mathbf{x}) \geq a_i, i = 1, \dots, I$$

$$h_j(\mathbf{x}) \leq b_j, j = 1, \dots, J$$

$$l_k(\mathbf{x}) = c_k, k = 1, \dots, K$$

$f(\mathbf{x})$  convexa

$g_i(\mathbf{x})$  côncava  $\forall i$

$h_j(\mathbf{x})$  convexa  $\forall j$

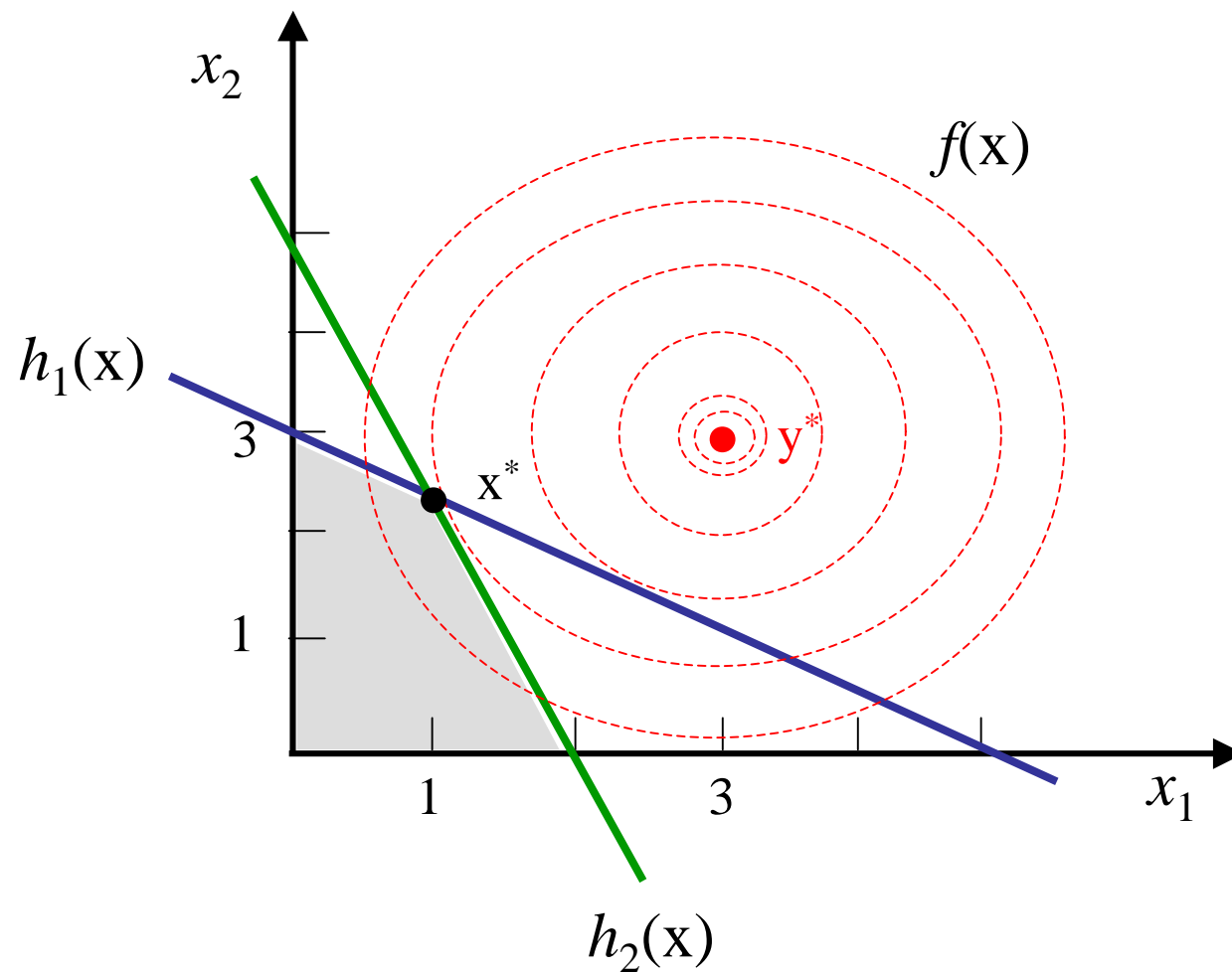
$l_k(\mathbf{x})$  linear  $\forall k$

$$\min \quad (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 3)^2$$

$$\text{s. a.} \quad 3x_1 + 5x_2 \leq 15$$

$$5x_1 + 2x_2 \leq 10$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$



$$\max f(\mathbf{x})$$

$$\text{s.a } g_i(\mathbf{x}) \geq a_i, i = 1, \dots, I$$

$$h_j(\mathbf{x}) \leq b_j, j = 1, \dots, J$$

$$l_k(\mathbf{x}) = c_k, k = 1, \dots, K$$

$f(\mathbf{x})$  côncava

$g_i(\mathbf{x})$  côncava  $\forall i$

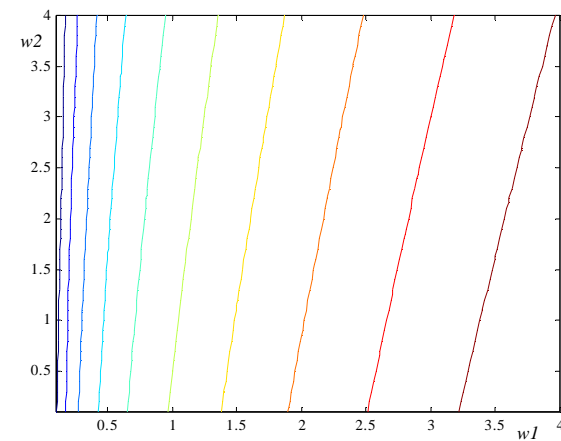
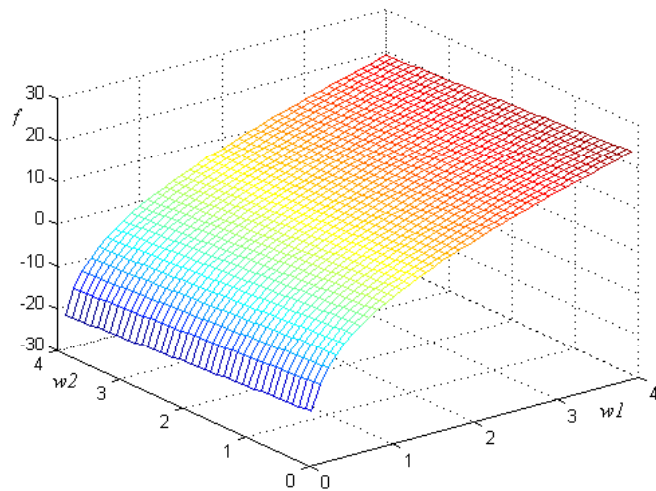
$h_j(\mathbf{x})$  convexa  $\forall j$

$l_k(\mathbf{x})$  linear  $\forall k$

$$\begin{aligned} \max \quad & 3 w_1 - w_2 + 8 \ln w_1 \\ \text{s. a.} \quad & 4 w_1^2 - w_1 w_2 + w_2^2 \leq 100 \\ & w_1 + w_2 = 4 \\ & w_1, w_2 \geq 0 \end{aligned}$$

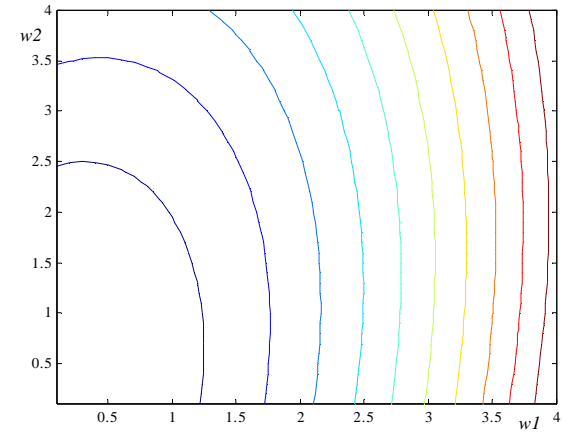
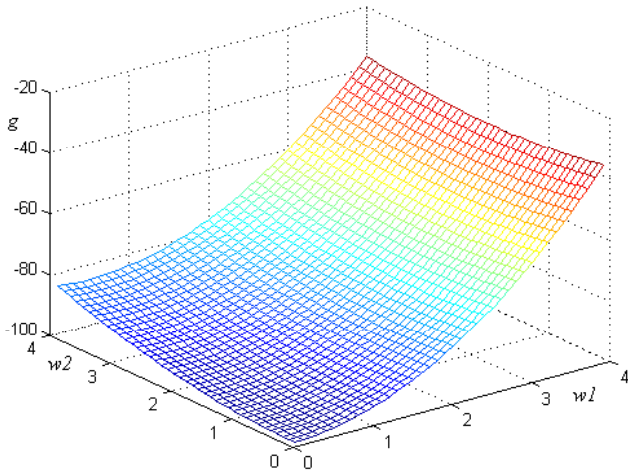
## Função objetivo

$$f(w_1, w_2) = 3 w_1 - w_2 + 8 \ln w_1$$

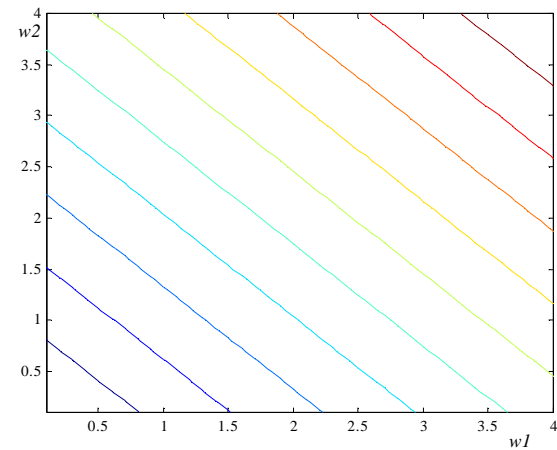
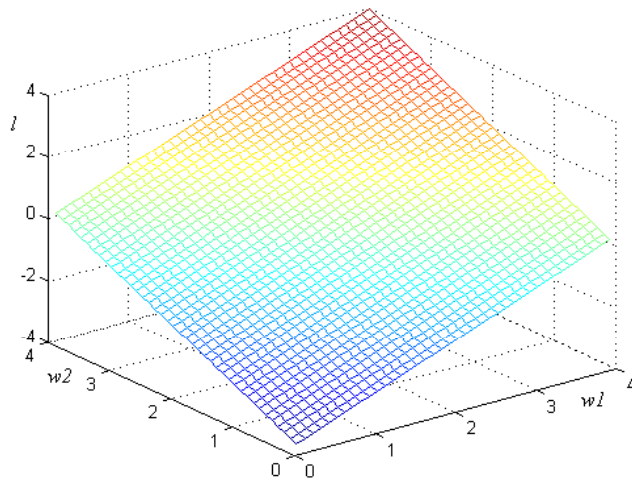


# Restrições principais

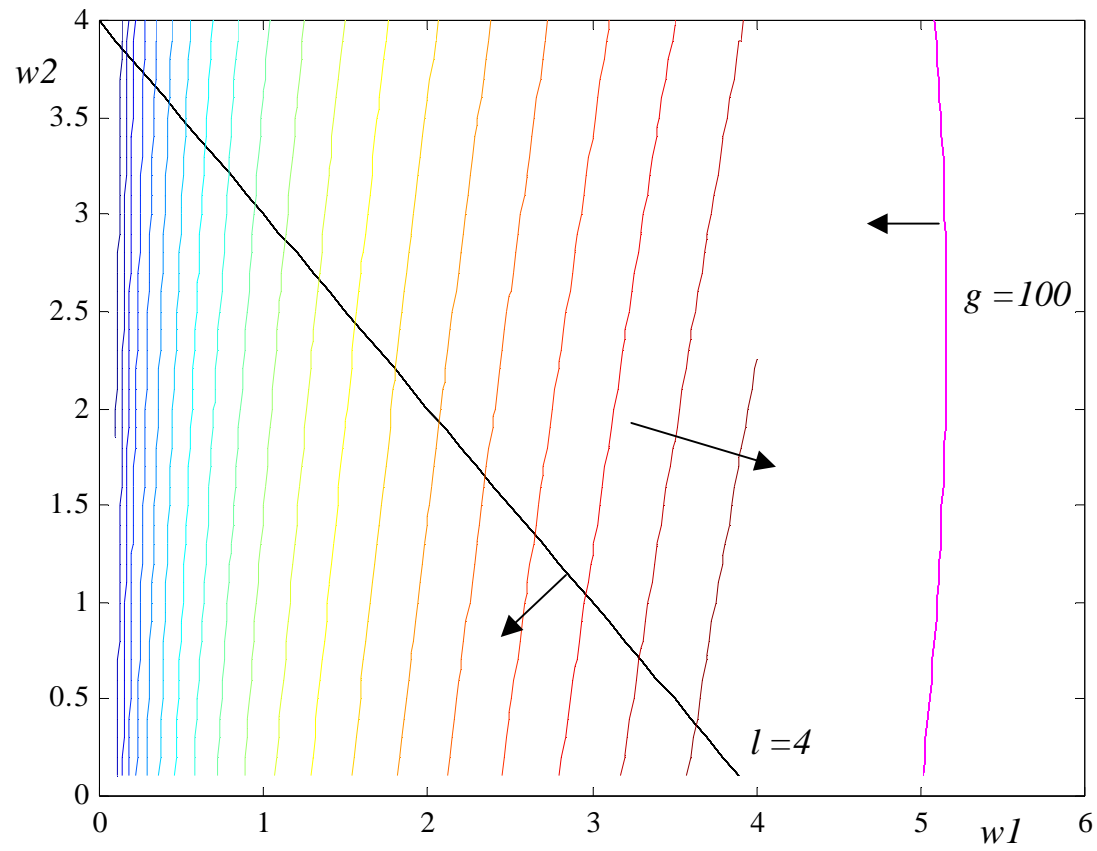
$$h(w_1, w_2) = 4w_1^2 - w_1w_2 + w_2^2 \leq 100$$



$$l(w_1, w_2) = w_1 + w_2 = 4$$



$$\begin{aligned} \max \quad & 3 w_1 - w_2 + 8 \ln w_1 \\ \text{s. a.} \quad & 4 w_1^2 - w_1 w_2 + w_2^2 \leq 100 \\ & w_1 + w_2 = 4 \\ & w_1, w_2 \geq 0 \end{aligned}$$



# Propriedade de modelos convexos

Se a função objetivo do modelo é convexa e as restrições produzem um conjunto convexo factível, então toda solução ótima local é uma solução ótima global.

$g_i(\mathbf{x})$  côncava  $\forall i$

$h_j(\mathbf{x})$  convexa  $\forall j$

$l_k(\mathbf{x})$  linear  $\forall k$



Conjunto convexo

$f$  convexa (côncava)



Função unimodal

# Método dos Multiplicadores de Lagrange

$$\min(\max) f(\mathbf{x})$$

$$\text{s.a} \quad g_i(\mathbf{x}) = b_i$$

$$i = 1, \dots, m$$

Restrições ativas

$$L(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^m v_i [b_i - g_i(\mathbf{x})]$$

Função Lagrangeana

$v_i$  = multiplicador de Lagrange associado à restrição  $i$

# Pontos estacionários da função Lagrangeana

$(x^*, v^*)$  é um ponto estacionário de  $L(x, v)$  se

$$\nabla f(x^*) = \sum_{i=1}^m v_i^* \nabla g_i(x^*) \rightarrow \sum_{i=1}^m \frac{\partial g_i}{\partial x_j} v_i = \frac{\partial f}{\partial x_j}, \forall j$$

$$g_i(x^*) = b_i, \forall i$$

Se  $(x^*, v^*)$  é um ponto estacionário de  $L(x, v)$  e  $x^*$  é uma solução ótima irrestrita de  $L(x, v)$ , então  $x^*$  é uma solução ótima do modelo correspondente com restrições de igualdade.

# Exemplo

$$\begin{aligned} \min \quad & 6x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 \\ \text{s.a} \quad & 24x_1 + 24x_2 = 360 \\ & x_3 = 1 \end{aligned}$$

$$L(\mathbf{x}, \nu) = 6x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + \nu_1[360 - 24x_1 - 24x_2] + \nu_2[1 - x_3]$$

$$\nabla f(\mathbf{x}) = (12x_1, 8x_2, 2x_3)$$

$$\nabla g_1(\mathbf{x}) = (24, 24, 0)$$

$$\nabla g_2(\mathbf{x}) = (0, 0, 1)$$

$$24v_1 = 12x_1$$

$$24v_1 = 8x_2$$

$$1v_2 = 2x_3$$

$$24x_1 + 24x_2 = 360$$

$$1x_3 = 1$$

$$(x_1^*, x_2^*, x_3^*, v_1^*, v_2^*) = (6, 9, 1, 3, 2)$$

$$L(x, v) = 6x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 - 72x_1 - 72x_2 - 2x_3 + 1082$$



**convexa**



$$(x_1^*, x_2^*, x_3^*, v_1^*, v_2^*) = (6, 9, 1, 3, 2) \Rightarrow \text{mínimo de } L(x, v)$$

16

# Multiplicadores de Lagrange: interpretação

$v_i$  = variação valor ótimo  $f$  quando  $b_i$  aumenta de uma unidade

$v_i$  = variável dual

$$v_i^* = \frac{\partial L}{\partial b_i}$$

## Limitações

- condições de estacionariedade difíceis de resolver
- restrições de desigualdade aumenta a complexidade
- soluções ótimas globais somente para modelos tratáveis

17

# Condições de Otimalidade Karush-Kuhn-Tucker

## Forma geral PNL diferenciáveis

$$\min(\max) f(\mathbf{x})$$

$$\text{s.a.} \quad g_i(\mathbf{x}) \geq b_i, \forall i \in G$$

$$g_i(\mathbf{x}) \leq b_i, \forall i \in L$$

$$g_i(\mathbf{x}) = b_i, \forall i \in E$$

$f, g_i$  : funções diferenciáveis

$G, L, E$  : conjuntos de índices

# Condições das folgas complementares

$$v_i[b_i - g_i(x)] = 0 \quad \text{para todas desigualdades } i$$

# Restrições nos sinais dos multiplicadores

objetivo	$i \text{ é } \leq$	$i \text{ é } \geq$	$i \text{ é } =$
min	$v_i \leq 0$	$v_i \geq 0$	irrestrito
max	$v_i \geq 0$	$v_i \leq 0$	irrestrito

# Condições de Karush-Kuhn-Tucker

Soluções  $(\mathbf{x}, \nu)$  satisfazem as condições de KKT se:

1.  $f, g_i$  são funções diferenciáveis
2. condições das folgas complementares
3. restrições no sinais dos multiplicadores
4. restrições primais
5. equação dos gradientes

$$\sum_i \nabla g_i(\mathbf{x}) \nu_i = \nabla f(\mathbf{x})$$

Qualquer  $\mathbf{x}$  para o qual existe um  $\nu$  que satisfaça estas condições é um ponto de KKT

## Característica da direção de busca $\Delta x$

objetivo	$\nabla f(x) \cdot \Delta x > 0$	$\nabla f(x) \cdot \Delta x < 0$
min	não melhora	melhora
max	melhora	não melhora

(14.23)

$\nabla f(x) \cdot \Delta x = 0 \Rightarrow$  necessitamos de mais informação

## Factibilidade da direção de busca $\Delta x$

$$\nabla g_i(x) \cdot \Delta x \begin{cases} \geq 0 & \text{restrições } \geq \textit{ativas} \\ \leq 0 & \text{restrições } \leq \textit{ativas} \\ = 0 & \text{todas restrições } = \end{cases} \quad (14.24)$$

# Condições suficientes de KKT

- As condições de KKT fornecem um teste de primeira ordem para determinar a ausência de direções factíveis que melhoram o valor da função objetivo
- Isto é,  $x$  é um ponto de KKT se e somente se não existe uma direção  $\Delta x$  em  $x$  que satisfaz as condições de primeira ordem (14.23) e (14.24)



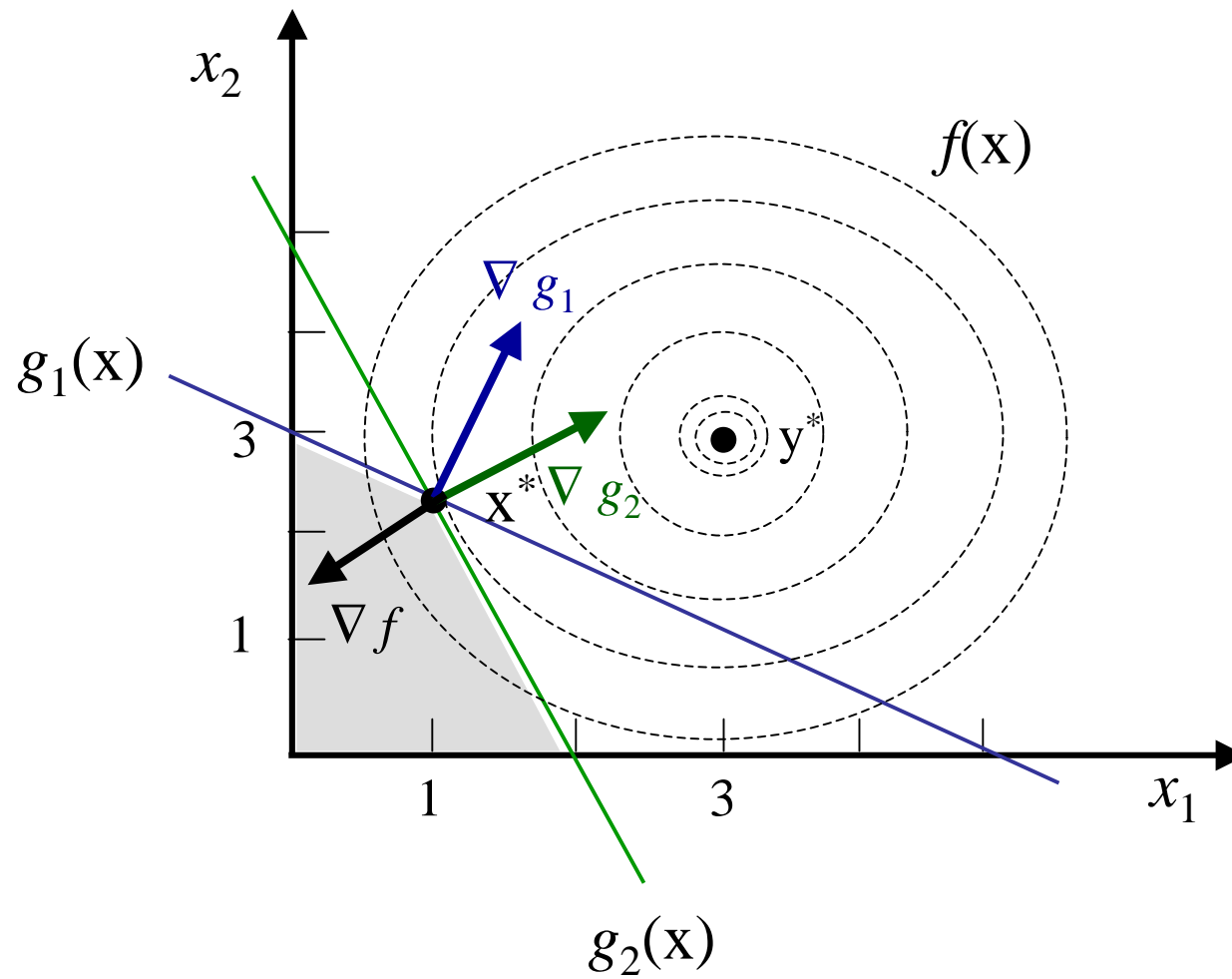
- Condições KKT são suficientes para ótimo local, isto é, se  $x$  é um ponto de KKT, então  $x$  é ótimo local
- Se modelo de PNL é convexo, condições de KKT são suficientes para ótimo global

# Condições necessárias de KKT

- Necessidade: se  $x$  é uma solução ótima, então  $x$  satisfaz KKT
- Solução ótima local é um ponto de KKT se:
  1. todas as restrições são lineares
  2. os gradientes de todas as restrições ativas no ponto de ótimo local são linearmente independentes (qualificação de restrição)

$$\min \quad (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 3)^2$$

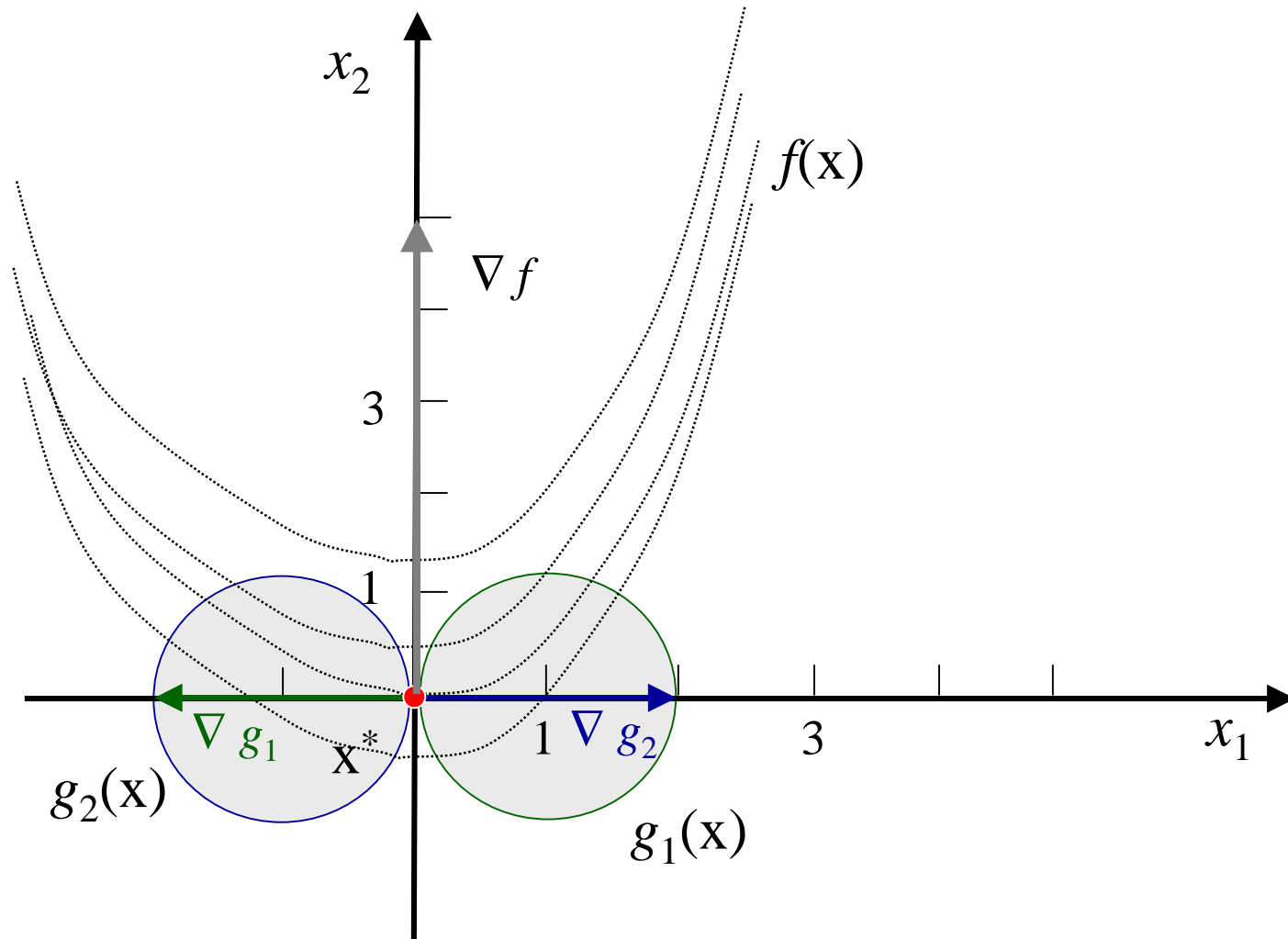
$$\text{s. a.} \quad \begin{aligned} 3x_1 + 5x_2 &\leq 15 \\ 5x_1 + 2x_2 &\leq 10 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$



$$\min \quad x_1^2 + 4x_2$$

$$\text{s. a.} \quad (x_1 - 1)^2 + x_2^2 \leq 1$$

$$(x_1 + 1)^2 + x_2^2 \leq 1$$



# Observação

Este material refere-se às notas de aula do curso EA 044 Planejamento e Análise de Sistemas de Produção da Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação da Unicamp. Não substitui o livro texto, as referências recomendadas e nem as aulas expositivas. Este material não pode ser reproduzido sem autorização prévia dos autores. Quando autorizado, seu uso é exclusivo para atividades de ensino e pesquisa em instituições sem fins lucrativos.